Otros libros de Grupo Editorial Iberoamérica:

- Álgebra lineal 2/e.
  Stanley I. Grossman
- Álgebra y trigonometría con geometría analítica 2/e.
  Earl W. Swokowski
- Análisis numérico
  Richard L. Burden / J. Douglas Faires
- Cálculo con geometría analítica 2/e.
  Earl W. Swokowski
- Cálculo con geometría analítica
  Dennis G. Zill
- Ciencia e ingeniería de los materiales
  Donald R. Askeland
- Ecuaciones diferenciales 2/e.
  Dennis G. Zill
- Estadística matemática con aplicaciones
  William Mendenhall / Richard L. Scheaffer
- Mecánica de materiales
  James M. Gere / Stephen P. Timoshenko
- Control estadístico de la calidad
  Douglas C. Montgomery
- Diseño y análisis de experimentos
  Douglas C. Montgomery
- Turbo Pascal con aplicaciones
  Julien Hennefeld

ISBN 968-7270-70-5

MECÁNICA PARA INGENIERIA
y sus Aplicaciones



Dinámica

David J. McGill
Wilton W. King

Grupo Editorial Iberoamérica



MECANICA PARA INGENIERIA
y sus Aplicaciones ________ II

Dinámica

David J. McGill • Wilton W. King

Georgia Institute of Technology

Traductor:

Ing. José de la Cera Alonso (Dipl. Ing.)
Universidad Autónoma Metropolitana
Azcapotzalco, México, D.F.

Revisor general:

Ing. Francisco Paniagua Bocanegra
Universidad Nacional Autónoma de México.
Miembro de la U.S. Metric Association (USMA)

Grupo Editorial Iberoamérica

Río Ganges No. 64-06500 México, D.F. - Tels. 5112517, 2087741



Versión en español de la obra Engineering Mechanics — Dynamics
por David J. McGill y Wilton W. King
Edición original en inglés publicada por PWS-KENT Publishing Co.
Copyright 1989 en Estados Unidos de Norteamérica
ISBN 0-534-91788-7

ISBN 968-7270-70-5
Impreso en México
Editor. Nicolás Grepe P.
Productor: Enrique Fradera T.
Cubierta: Julie Gecha, Greg Pease.

Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
Río Ganges No. 64, Col. Cuauhtémoc 06500 México, D.F.
Apdo. 5-192, Tels. 9112517, 2087741 FAX 5147024
Reg. CNIEM 1382

A nuestras esposas, Carolyn y Kay

Prólogo

Este libro, **Dinámica**, es el segundo volumen del texto *MECÁNICA PARA INGENIERÍA y Sus Aplicaciones*, que expone en la forma más clara y útil los principios de la mecánica básica para las carreras de ingeniería. La obra contiene una cantidad muy extensa de material, ya que se diseñó para proporcionar a los profesores de las diferentes instituciones, la facilidad de realizar una amplia selección y acrecentar así el enfoque medular de la materia.

Al escribir este libro, los autores han seguido una línea fundamental: elaborar la obra en la misma forma en que se enseña el curso. Para este fin se han incluido muchas notas explicativas al calce de página, y numerosas *Preguntas* se intercalan en el desarrollo de las diversas partes de los capítulos. (Las respuestas respectivas se dan al final de cada capítulo.) Dichas interrogantes son del mismo tipo que las formuladas en clase; para su cabal aprovechamiento deben considerarse como "tareas en casa" formales, y las respuestas se habrán de consultar sólo después de tener en mente la que se considere apropiada. Las preguntas tienen por objeto despertar la reflexión acerca de puntos difíciles y destacar los principios básicos de cada parte de la exposición.

Además de las preguntas intercaladas, al término de cada capítulo se presenta un *Cuestionario de Repaso*, del tipo "Verdadero o Falso", con sus contestaciones. Están destinadas tales cuestiones a la discusión en clase o al trabajo personal de cada estudiante. Problemas para tarea con grados variables de dificultad, aparecen al final de cada sección principal de capítulo. Existen más de 1 150 de tales ejercicios, y las *Respuestas a los Problemas de Número Impar* figuran en la terminación del libro, antes del *Índice*.

Existen varias razones (además del descuido), de por qué puede ser difícil, en una primera resolución, obtener la respuesta correcta a un problema o ejercicio dejado como tarea. Tal problema puede requerir la aplicación de pericia en las matemáticas avanzadas. Ejercicios con una o más de esas características se señalan con asterisco.

Algunos ejemplos y problemas se presentan en las Unidades SI (del Sistema Internacional de Unidades), pero en otros se utiliza el sistema técnico usual todavía en Estados Unidos. Mientras este país se adapta lenta y penosamente a la consideración y uso general de las unidades métricas SI, hemos visto en nuestras actividades de consultoría que una gran cantidad de trabajos técnicos se efectúan aún utilizando las unidades tradicionales de origen inglés (que aquí se designan como "US"). Para los ingenieros resulta más fácil todavía pensar en libras en vez de newtons, y en pies en lugar de metros. Creemos que los estudiantes de Estados Unidos serán mejores profesionales en ingeniería, ciencias, etc., si están perfectamente familiarizados con ambos sistemas de unidades, en especial durante los próximos diez o quince años.

Los temas de la *dinámica* son ricos y variados en sus múltiples aplicaciones; resulta, por consiguiente, de importancia que el estudiante desarrolle una destreza para modelar en forma

realista los problemas de ingeniería. Por ello se ha incluido un gran número de problemas técnicos reales en los ejemplos y los ejercicios. Conscientes de las hipótesis y de las limitaciones inherentes al modelo, los métodos de resolución implican una inapreciable destreza que sólo puede desarrollarse dedicándose con ahínco a la solución de problemas fuera del aula. Sólo de esta manera podrá el estudiante lograr la percepción y creatividad necesarias para la resolución de problemas en la ingeniería.

En el Capítulo 1 se expone la *cinemática* de una partícula (o punto material de un cuerpo). La *cinética* asociada a partículas y centros de masa de cuerpos se describe lógicamente en el Capítulo 2. Aquí se verá que no se ha interrumpido en absoluto el modelo de un cuerpo según el "punto material". Puesto que el estudiante de ingeniería tratará en su actividad profesional con cuerpos de dimensiones finitas, creemos importante presentar lo más pronto posible, las ecuaciones de movimiento válidas para tales entidades. Así pues, las leyes de Euler se han utilizado como base para la cinética, lo cual proporciona una presentación compacta de los principios generales, sin que —de acuerdo con nuestra experiencia y opinión— se pierda comprensión alguna por parte del estudiante. Esto no significa abandonar el modelo de punto material que tan importante función desempeña en la física clásica, y que puede ser aplicado a un gran número de problemas de ingeniería. Como se verá en el Capítulo 2, sin embargo, estos problemas pueden ser atacados directamente mediante la ecuación de movimiento del centro de masa de un cuerpo, sin menoscabo del punto de vista de que un cuerpo tiene dimensiones finitas. Los problemas de trayectoria comprendidos a veces en la cinemática de partículas, quedan incluidos también en este capítulo sobre cinética, dado que para su formulación una ley del movimiento es esencial.

El movimiento de un cuerpo rígido en el plano se trata en detalle en la parte central del libro: la cinemática en el Capítulo 3 y la cinética en los Capítulos 4 y 5. El tema del rodamiento se discute en el Capítulo 3 después de exponer las ecuaciones de velocidad y aceleración con respecto a dos puntos de un cuerpo rígido. Además, se estudian las ecuaciones de velocidad y aceleración del movimiento de un punto en relación con dos marcos de referencia ("marcos móviles") en el Capítulo 3 (cinemática en el plano) y el Capítulo 6 (cinemática tridimensional o general), después de que se presenta al estudiante el conocimiento del vector velocidad angular, que se trata en estos capítulos.

El Capítulo 4 analiza la cinemática en el plano a partir de las ecuaciones de movimiento, formuladas con la ayuda del diagrama de cuerpo libre del objeto en estudio (es decir, con un esquema del cuerpo en el que se indican todas las fuerzas y momentos externos, pero sin incluir los vectores que expresan aceleración). Así pues, el diagrama de cuerpo libre tiene el mismo significado en dinámica que en estática, lo cual facilita al estudiante la transición a temas de mayor grado de dificultad. Los momentos de inercia y los productos inerciales se exponen justo donde aparecen en el desarrollo de la cinética. Esta presentación dota a los estudiantes de una mejor apreciación de estos conceptos, así como de una comprensión histórica, al considerar dichos temas según el mismo camino que siguieron los antiguos maestros.

El Capítulo 5 está dedicado a la resolución de problemas de la cinética de cuerpos rígidos en el plano, con algunas soluciones especiales, aunque generales (o integrales), de las ecuaciones de los Capítulos 2 y 4. Tales nociones se conocen como principios del trabajo y la energía cinética, del impulso y la cantidad de movimiento (ímpetu o moméntum), y del impulso y la cantidad de movimiento angulares.

Los Capítulos 6 y 7 tratan extensamente de la cinemática y la cinética de cuerpos rígidos en tres dimensiones. No hay una extensión lineal natural del movimiento plano al movimiento general, y la causa de ello es que el vector velocidad angular w depende en forma más compleja que "$\theta \hat{k}$", de los ángulos que se utilizan para orientar al cuerpo en el espacio de tres dimensiones. Sabemos que si los estudiantes comprenden lo relativo al vector w, no tendrán dificultad con el movimiento general de cuerpos rígidos. De modo que se empieza el Capítulo 6 con el estudio de w y sus propiedades. La definición de velocidad angular en tres dimensiones se desarrolla en forma motivadora mediante las relaciones entre las derivadas de un vector en dos diferentes marcos de referencia. Aunque este punto de vista suele asociarse a textos más avanzados (por ejemplo, los de Kane o Milne), se observó que los estudiantes del primer nivel de enseñanza universitaria o superior, son suficientemente capaces de apreciar y capitalizar la amplitud y poder de este enfoque. En especial, ello permite al estudiante abordar en forma ordenada problemas atemorizantes, como el movimiento de sistemas de engranajes y uniones de tipo universal para conectar ejes o árboles no colineales.

El Capítulo 8 es una introducción a tres tópicos especiales en el área de la dinámica: vibraciones, problemas de redistribución de masas, y movimiento debido a fuerzas centrales.

Hemos recibido un sinnúmero de útiles sugerencias de quienes impartieron un curso de dinámica utilizando como texto la primera edición de nuestro libro. Agradecemos en especial sus aportaciones a Lawrence Malvern, University of Florida, y a Michael Bernard, nuestro colega en Georgia Tech. Así mismo, nuestro agradecimiento a Don Berghaus, Charles Ueng, James Wang, Wan-Lee Yin, George Rentzepis, Virgil Smith, John Papastavridis y Hyland Chen, por sus comentarios; y a Betty Mitchell, por la transcripción mecanográfica del manuscrito.

Queremos también expresar nuestra gratitud a los revisores de esta edición segunda: Don Carlson, University of Illinois en Champaign-Urbana; John Dickerson, University of South Carolina; Vincent Lee, University of Southern California; Patrick MacDonald, North Carolina State University; James F. Wilson, Duke University, y Han-Chin Wu, University of Iowa.

D. J. McGill
W. W. King

Contenido

MECANICA PARA INGENIERIA y sus Aplicaciones II

Dinámica

Capítulo 1 Cinemática de puntos materiales o partículas

1.1 Introducción

Dinámica es el nombre general dado al estudio de los movimientos de cuerpos y de las fuerzas que acompañan o causan esos movimientos. La parte de la Dinámica que trata sólo con consideraciones de espacio y tiempo se llama *Cinemática*. La parte que trata con las relaciones entre fuerzas y movimientos se llama *Cinética*; como estas relaciones implican consideraciones cinemáticas, es necesario estudiar primero la Cinemática.

En este capítulo presentamos nociones fundamentales de la cinemática de un punto material, o equivalentemente, de un elemento infinitesimal de materia. Usaremos con frecuencia el término *partícula* para tal elemento. Sin embargo, como veremos en el Capítulo 2, la palabra partícula se usa con frecuencia con un sentido más amplio para denotar una porción de materia suficientemente pequeña, tal que no sea necesario distinguir las localizaciones de sus puntos materiales. Por supuesto, esta definición es vaga, de modo que para *ciertos* fines, un camión, un vehículo espacial, o incluso un planeta, pueden modelarse adecuadamente como una partícula.

La derivada de un vector respecto a un escalar (usualmente el tiempo) juega un papel fundamental en la cinemática. La Sección 1.2 se dedica a este tema poniendo énfasis especial al modo en que la derivada se encuentra ligada a un marco de referencia.

Los vectores de posición, velocidad y aceleración se definen en la Sección 1.3. Las formas que esos vectores asumen en el caso más simple del movimiento rectilíneo, se consideran en la Sección 1.4. El movimiento tridimensional descrito con coordenadas rectangulares y cilíndricas se presenta en las Secciones 1.5 y 1.6. En la Sección 1.7 investigamos la relación entre velocidad, aceleración y geometría de la trayectoria recorrida por un punto (o partícula).

1.2 Marcos de referencia y derivadas de vectores

En la siguiente sección y a lo largo de todo el libro, estaremos derivando vectores; la derivada del vector de posición de un punto, por ejemplo, será su velocidad. En esta sección preliminar examinaremos el concepto de la derivada de un vector $\mathbf{A}$, que es una función del tiempo t. La definición de $d\mathbf{A}/dt$, que se escribe frecuentemente como $\dot{\mathbf{A}}$ es muy sencilla:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \right] \tag{1.1}$$

Esta definición es muy parecida a la definición de la derivada de un escalar, por ejemplo dy/dx, que se trata en los textos de Cálculo Diferencial. Lo que debemos observar en un vector es que éste puede cambiar en el tiempo de *dos* maneras, en dirección y en magnitud. Esto significa que $\dot{\mathbf{A}}$ está intrínsecamente unido al marco de referencia en el que se toma la derivada.

Para ilustrar esta idea, consideramos los dos puntos P y Q sobre la superficie de un disco fonográfico en la Fig. 1.1. El disco descansa sobre un tornamesa que gira en el sentido indicado a, digamos $33\frac{1}{3}$ rpm.

Llamemos $\mathbf{R}$ al vector definido por el segmento dirigido que va de P a Q e investiguemos que tan rápido cambia $\mathbf{R}$ en el tiempo al girar el tornamesa. Aunque percibimos que el disco y el tornamesa se comportan como un cuerpo rígido de modo que la distancia entre P y Q (magnitud de $\mathbf{R}$) es constante, la mayor parte de nosotros estimaría que $d\mathbf{R}/dt$ es diferente de cero, debido a la dirección variable de $\mathbf{R}$. Esta conclusión se deduce del hecho de que hemos adoptado automáticamente al edificio (o a la Tierra) como marco de referencia. Si viajáramos sobre el tornamesa y no observáramos los alrededores, nuestra percepción sería que $\mathbf{R}$ es un vector constante y por ello su derivada sería nula. Entonces, $\mathbf{R}$ con respecto al tornamesa es un vector constante y con respecto al edificio es un vector de magnitud constante,

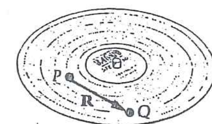


Figura 1.1

pero con dirección variable. Se ve de esto que $d\mathbf{R}/dt$ no puede ser evaluada a menos de que se asocie a un *marco de referencia* que es desde luego un *cuerpo rígido*. Discutiremos más ampliamente el concepto de marco de referencia en la próxima sección y otra vez en el Capítulo 3.

Necesitaremos varias relaciones entre derivadas de vectores que tienen sus análogas en el cálculo de escalares; estas relaciones se infieren directamente de la definición (Ec. 1.1). Si α es un escalar y $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son funciones vectoriales de t, se cumple que

$$\frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{A}) = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\mathbf{A} + \alpha\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{1.3}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) \tag{1.4}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\right) \tag{1.5}$$

La primera y la segunda de esas ecuaciones permiten ser más específicos acerca de la manera en que la derivación está unida el marco de referencia. Supongamos que $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$, son vectores* unitarios mutuamente perpendiculares, y que A_1, A_2, A_3, son las componentes escalares correspondientes de un vector $\mathbf{A}$ de modo que

$$\mathbf{A} = A_1\hat{\mathbf{e}}_1 + A_2\hat{\mathbf{e}}_2 + A_3\hat{\mathbf{e}}_3 \tag{1.6}$$

Si $\mathcal{I}$ es el marco de referencia** y denotamos la derivada de $\mathbf{A}$ en $\mathcal{I}$ por medio de ${}^{\mathcal{I}}d\mathbf{A}/dt$, entonces

$$\frac{{}^{\mathcal{I}}d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{dA_1}{dt}\right)^{\dagger}\hat{\mathbf{e}}_1 + A_1\left(\frac{{}^{\mathcal{I}}d\hat{\mathbf{e}}_1}{dt}\right) + \left(\frac{dA_2}{dt}\right)\hat{\mathbf{e}}_2 + A_2\left(\frac{{}^{\mathcal{I}}d\hat{\mathbf{e}}_2}{dt}\right) + \left(\frac{dA_3}{dt}\right)\hat{\mathbf{e}}_3 + A_3\left(\frac{{}^{\mathcal{I}}d\hat{\mathbf{e}}_3}{dt}\right) \tag{1.7}$$

*Nótese que podríamos usar cualquier conjunto de vectores base (vectores de referencia linealmente independientes) en cuyo caso A_1, A_2 y A_3 no son necesariamente componentes ortogonales de $\mathbf{A}$. La Ec. (1.6) ilustra simplemente la elección más común de escalares y vectores base. Cuando tal es el caso, la magnitud de $\mathbf{A}$, representada por $|\mathbf{A}|$ o simplemente A, es $\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

**En este libro los marcos de referencia (cuerpos rígidos) se denotan por medio de letras mayúsculas de tipo manuscrito. Para la caracterización de puntos se usan letras mayúsculas de molde. Se hace así pues como se verá en el Capítulo 3, los puntos y los cuerpos rígidos tienen propiedades muy diferentes al moverse.

† Nótese que las derivadas de las componentes escalares de $\mathbf{A}$, tal como dA_1/dt, no necesitan índices de referencia, ya que son las mismas en cualquier marco de referencia.

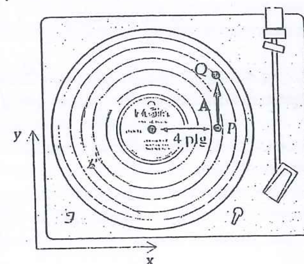
Si ahora escogemos $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$, con direcciones fijas en $\mathcal{J}$, serán constantes en ese marco y

$$\frac{{}^{\mathcal{J}}d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\hat{e}_1 + \frac{dA_2}{dt}\hat{e}_2 + \frac{dA_3}{dt}\hat{e}_3 \tag{1.8}$$

que es la forma más directa de expresar la derivada de un vector y su asociación intrínseca con un marco de referencia. Veremos ahora un ejemplo del uso de la ecuación (1.8), y suponiendo que el lector está familiarizado con las ecuaciones (1.1) a (1.5), se pasará a la Sección 1.3 y a la descripción del movimiento de una partícula (punto material) P.

Ejemplo 1.1

Si la distancia de P a Q sobre el disco de $33\frac{1}{3}$ rpm de la figura es de 3 plg y si **A** es el vector de P a Q, encontrar ${}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{A}}$, en donde el marco $\mathcal{J}$ es la caja del tornamesa en la que se encuentran fijos los ejes x, y, z). El segmento PQ se encuentra en la posición indicada (paralelo a y) cuando $t = 0$.



Solución

En el tiempo t (en segundos), el vector **A** forma un ángulo $\theta(t)$ con y igual a

$$\theta = (33\tfrac{1}{3})\left(\frac{2\pi}{60}\right)t \text{ rad} = 3.49t \text{ rad}$$

El vector **A**, expresado en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ en las respectivas direcciones de x y y, tiene entonces la siguiente forma:

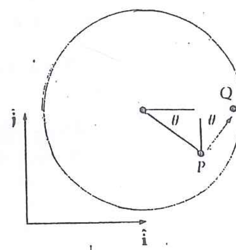
$$\mathbf{A} = 3(\text{sen}\,\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}) \text{ plg}$$

Note que los vectores unitarios no cambian de dirección en $\mathcal{J}$; usando la ecuación (1.8) obtenemos:

$$\frac{{}^{\mathcal{J}}d\mathbf{A}}{dt} = {}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{A}} = 3\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\imath} - 3\,\text{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{\jmath}$$

$$= 3\cos(3.49t)(3.49)\hat{\imath} - 3\,\text{sen}(3.49t)(3.49)\hat{\jmath}$$

$$= 10.5(\cos\theta\hat{\imath} - \text{sen}\,\theta\hat{\jmath}) \text{ plg./sec}$$



Vemos de este resultado que

1. En $\theta = 0$, ${}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{A}}$ tiene la dirección x.
2. En $\theta = \pi/2$, ${}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{A}}$ tiene la dirección.
3. En $\theta = \pi$, ${}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{A}}$ tiene la dirección.
4. En $\theta = 3\pi/2$, ${}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{A}}$ tiene la dirección y.

En los cuatro casos, así como en todos los ángulos intermedios, la derivada de **A** en $\mathcal{J}$ es la del siguiente producto vectorial:

$$[\dot{\theta}(-\hat{k})] \times \mathbf{A}$$

El vector entre corchetes corresponde a la *velocidad angular* del disco ($\mathcal{B}$) en el marco de referencia $\mathcal{J}$. En capítulos posteriores veremos que es precisamente este producto vectorial lo que debe sumarse a ${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{A}}$ para obtener ${}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{A}}$. Aquí, por supuesto, **A** es constante respecto al tornamesa $\mathcal{B}$ por lo que se anula su derivada en $\mathcal{B}$ (o sea ${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{A}}$).

Problemas / Sección 1.2

En los problemas 1.1 al 1.8, en unidades métricas e inglesas, se tiene que $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares con direcciones fijas en el marco de referencia. En cada caso t es el tiempo medido en segundos (símbolo: s, en el SI). Determine en $t = 3$ s la derivada (respecto al tiempo) del vector **L**.

1.1 $\mathbf{L} = 2\hat{\imath} + 3t^2\hat{\jmath} - 8t\hat{k}$ kg · m/s

1.2 $\mathbf{L} = 20\,\text{sen}(\pi t/4)\hat{\imath} - 20\cos(\pi t/4)\hat{k}$ slug · pie/s

1.3 $\mathbf{L} = -100e^{-t/2}\hat{\imath} + 20t\hat{\jmath} - 5t^2\hat{k}$ slug · pie/s

1.4 $\mathbf{L} = 20\cosh(\pi t/4)\hat{\imath} + 20\,\text{senh}(\pi t/4)\hat{k}$ kg · m/s

1.5 $\mathbf{L} = 5t\hat{\imath} - \frac{12}{t^2}\hat{\jmath} + \frac{6}{t^3}\hat{k}$ slug · pie/s

1.6 $\mathbf{L} = e^{-6t}(5\hat{\imath} + 8t\hat{\jmath})$ slug · pie/s

1.7 $\mathbf{L} = -2te^{-t^2}\hat{\imath} + 3^t\hat{\jmath}$ kg · m/s

1.8 $\mathbf{L} = 50\hat{\imath} + 60\ln t\hat{\jmath}$ kg · m/s

1.9-1.16 Si los vectores en los problemas anteriores representan fuerzas **F**, evalúe la integral de cada fuerza en el intervalo de $t = 2$ s a $t = 5$ s. [La unidad SI es el newton (N) y la unidad U.S. es la libra (lb).]

1.3 Posición, velocidad y aceleración

En esta pequeña pero importante sección, presentamos las definiciones de los vectores de posición, velocidad y aceleración de un punto material P al moverse éste relativamente a un marco de referencia $\mathcal{J}$. Es importante mencionar que en tanto que un marco de referencia se identifica usualmente por el material que constituye el cuerpo de referencia (por ejemplo, la Tierra, la Luna o el bastidor de un camión), el marco está en realidad compuesto de todos esos puntos materiales *más* los puntos generados por una extensión rígida del cuerpo a todo el espacio. Así, por ejemplo, nos referimos a un punto sobre la línea central de un tubo recto como a un punto en el (o del) tubo.

Consideremos ahora un punto P que se mueve en una trayectoria como se muestra en la Fig. 1.2. **La trayectoria** es el lugar geométrico de los puntos de $\mathcal{J}$ que ocupa P en el transcurso del tiempo. Si seleccionamos un punto O de $\mathcal{J}$ como punto de referencia (u origen), entonces el segmento dirigido de O a P se denomina **Vector de posición** de P en $\mathcal{J}$ y se designa por $\mathbf{r}_{OP}$.

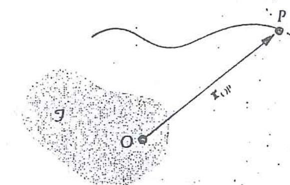


Figura 1.2 Vector de posición para P en $\mathcal{J}$.

La primera y segunda derivadas (respecto al tiempo) del vector de posición se llaman respectivamente *velocidad* ($\mathbf{v}_P$) y aceleración ($\mathbf{a}_P$) de los puntos P en $\mathcal{J}$:

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{r}_{OP}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}_{OP} \quad \text{(La } \textit{magnitud} \text{ de } \mathbf{v}_P \text{ suele llamarse } \textit{rapidez} \text{ de } P.)^* \tag{1.9}$$

$$\mathbf{a}_P = \frac{d^2\mathbf{r}_{OP}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}_{OP} = \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \dot{\mathbf{v}}_P \tag{1.10}$$

Las derivadas en las ecuaciones (1.9) y (1.10) se calculan en el marco $\mathcal{J}$, el único marco considerado aquí. Luego, sin embargo, necesitaremos a veces especificar el marco en que las derivadas, velocidades y aceleraciones, van a ser calculadas; usaremos para ello un índice como en la ecuación (1.8) y escribiremos.

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{J}} = {}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{r}}_{OP} \tag{1.11}$$

Cuando sólo esté implicado un marco, omitiremos la $\mathcal{J}$ en ambos miembros y escribiremos una ecuación como la (1.11) en la forma de la (1.9).

A lo largo del texto hemos insertado preguntas para que el lector reflexione sobre ellas. (Las respuestas estan al final de los capítulos.) He aquí la primera:

Pregunta 1.1. ¿Depende la velocidad y la aceleración de un punto P de: (a) la elección del marco de referencia, (b) el origen seleccionado para el vector de posición?

En este momento es razonable preguntarse porque no hemos introducido derivadas del vector de posición de orden mayor que el segundo. La razón es que las relaciones entre fuerzas y movimientos no implican a esas derivadas de orden superior. Como veremos después en el estudio de la cinética, si conocemos las aceleraciones de las partículas que constituyen un cuerpo, las leyes de fuerza y movimiento proporcionarán las fuerzas externas; recíprocamente, para cuerpos rígidos, si conocemos las fuerzas externas, podemos calcular las aceleraciones, y luego integrando dos veces, los vectores de posición. Las leyes de fuerza y movimiento son válidas sólo en ciertos marcos de referencia; por tal motivo, algunos autores designan a veces al movimiento respecto a tales marcos como *movimiento absoluto*. No hemos usado nosotros aquí la palabra *absoluto* porque queremos enfatizar que la Cinemática expresa inherentemente relaciones entre geometría y tiempo, independientemente de cualquier ley que relacione fuerzas con movimientos. *En Cinemática todos los marcos de referencia tienen la misma importancia.*

Finalmente hacemos notar que las posiciones (o localizaciones) de puntos se establecen normalmente por medio de sistemas de coordenadas. Se presentan en las próximas tres secciones los modos en que posiciones, velocidades y aceleraciones son expresadas en dos de los sistemas más comunes, el ortogonal (o cartesiano) y el cilíndrico.

* (N. del R.) En la terminología físico-matemática en inglés se ha adoptado la convención trivial de llamar ("rápidez") (*speed*) a la magnitud de la (velocidad) (*velocity*). En la nomenclatura en español es mejor tratar el concepto de velocidad como los de aceleración, fuerza, etc. Cuando se requiere destacar su carácter vectorial (de magnitud y dirección) se habla concretamente de vector velocidad, vector aceleración, etc., como es el uso tradicional.

Problemas / Sección 1.3

1.17 Demuestre que la velocidad (y por consiguiente, tampoco la aceleración) de un punto P en un marco $\mathcal{J}$ no depende de la elección del origen. *Sugerencia*: Derive la siguiente relación en $\mathcal{J}$ (Fig. P1.17):

$$\mathbf{r}_{OP} = \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{r}_{O'P}$$

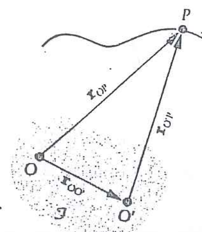


Figura P1.17

En los Problemas 1.18 al 1.22, $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ son vectores unitarios mutuamente perpendiculares con direcciones fijas en el marco de referencia; $\mathbf{v}_P$ es la velocidad de un punto P en movimiento en el marco; t es el tiempo en segundos. Determine para $t = 2$ s, la aceleración del punto para la velocidad dada.

1.18 $\mathbf{v}_P = 2t\hat{\mathbf{i}} - 3t^2\hat{\mathbf{k}}$ m/s

1.19 $\mathbf{v}_P = 20e^{-0.1t}\left(\text{sen}\frac{\pi t}{4}\hat{\mathbf{i}} - \cos\frac{\pi t}{4}\hat{\mathbf{j}}\right)$ pie/s

1.20 $\mathbf{v}_P = \frac{\hat{\mathbf{i}}}{t} - \frac{1}{2t^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3t^3}\hat{\mathbf{k}}$ m/s

1.21 $\mathbf{v}_P = t\left(\text{sen}\frac{\pi t}{4}\hat{\mathbf{i}} + \cos\frac{\pi t}{4}\hat{\mathbf{j}}\right)$ pie/s

1.22 $\mathbf{v}_P = 5e^{-0.1t}\hat{\mathbf{i}} - 4e^{-0.4t}\hat{\mathbf{k}}$ m/s

1.23-1.27 El **desplazamiento** de un punto durante un intervalo de tiempo de t_1 a t_2 se define como la diferencia de los vectores de posición esto es $\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$. En los problemas 1.18 al 1.22, determine el desplazamiento y la magnitud del mismo en el intervalo de $t = 4$ s a $t = 6$ s.

1.4 Cinemática de un punto en movimiento rectilíneo

En esta sección estudiamos problemas en los que el punto P se mueve a lo largo de una línea recta en el marco de referencia $\mathcal{J}$. Esta situación se denomina **movimiento rectilíneo** y la posición de P puede expresarse con una sola coordenada x medida a lo largo de la recta fija sobre la que se mueve P (Fig. 1.3).

El vector de posición de P es simplemente,

$$\mathbf{r}_{OP} = x\hat{\mathbf{i}} \tag{1-12}$$

en donde el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ es paralelo a la recta como se muestra en la Fig. 1.3, y por ello

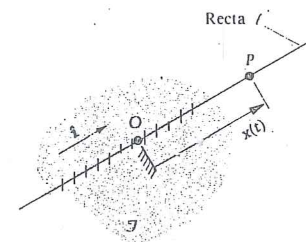


Figura 1.3

75

no cambia en magnitud ni en dirección en $\mathcal{J}$. Por ello las expresiones para la velocidad y la aceleración de P son:

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_{OP} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} \tag{1-13}$$

$$\mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{r}}_{OP} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} \tag{1-14}$$

En el movimiento rectilíneo hay tres casos interesantes, que merecen atención especial:

1. La aceleración es una función conocida del tiempo, $f(t)$.
2. La aceleración es una función conocida de la velocidad, $g(v)$, en donde $v = \dot{x}$.
3. La aceleración es una función conocida de la posición, $h(x)$.

Consideraremos cada caso por separado y daremos ejemplos al respecto.
Primero, si $\ddot{x} = f(t)$, entonces

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = f(t) \Rightarrow \dot{x} = \int f(t)\,dt + C_1 \Rightarrow x = \iint f(t)\,dt + C_1 t + C_2 \tag{1-15}$$

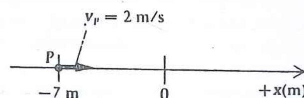
en donde C_1 y C_2 se determinan en función de las condiciones iniciales de velocidad y posición respectivamente, una vez que el problema, o sea $f(t)$, se plantea y las integrales indefinidas se evalúan. Alternativamente podríamos conocer los valores de x en dos instantes en vez de una posición y una velocidad. En cualquier caso requerimos dos de constantes.

Ejemplo 1.2

La aceleración de un punto P en movimiento rectilíneo está dada por la ecuación $\ddot{x} = 5t^2$ m/s², con las condiciones iniciales: $\dot{x}(0) = 2$ m/s y $x(0) = -7$ m. Encuentre $x(t)$.

Solución.

Observemos que este es el problema de un punto que se mueve con una aceleración cuya varía cuadráticamente y con las condiciones iniciales de posición y velocidad de P en $t = 0$. Integrando como antes,



$$\dot{x} = \int 5t^2\,dt + C_1 = \tfrac{5}{3}t^3 + C_1 \text{ m/s}$$

Integrando de nuevo,

$$x = \tfrac{5}{12}t^4 + C_1 t + C_2 \text{ m}$$

Las constantes resultan ser $C_1 = 2$ m/s y $C_2 = -7$ m, ya que

$$\dot{x}(0) = 2 = (\tfrac{5}{3})(0)^3 + C_1 \Rightarrow C_1 = 2 \text{ m/s}$$

$$x(0) = -7 = (\tfrac{5}{12})(0)^4 + 2(0) + C_2 \Rightarrow C_2 = -7 \text{ m}$$

Entonces el movimiento del punto P está dado por la función integrada del tiempo:

$$x = \tfrac{5}{12}t^4 + 2t - 7 \text{ m}$$

Para el segundo caso si $\ddot{x} = g(v)$, entonces

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = g(v)$$

Supóngase que $v(t)$ puede invertirse para obtener $t(v)$; así

$$\frac{dt}{dv} = \frac{1}{g(v)}$$

y

$$t + C_3 = \int \frac{dv}{g(v)}$$

Si la integral puede expresarse como una función $p(v)$, podemos entonces resolver la ecuación $p(v) = t + C_3$ para hallar la velocidad:

$$v = q(t)$$

y luego,

$$v = \frac{dx}{dt} = q(t)$$

de modo que

$$x = \int q(t)\,dt + C_4 \tag{1-16}$$

Este procedimiento se aclarará con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3

La aceleración de un punto P en movimiento unidimensional es proporcional a la velocidad según $\ddot{x} = -2v$ m/s² con las mismas condiciones iniciales que en el ejemplo anterior. Determinar $x(t)$.

Solución

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = -2v \Rightarrow \int \frac{dv}{-2v} = t + C_3$$

Integrando* obtenemos

$$t + C_3 = \frac{-\ln v}{2} \Rightarrow v = e^{-2t-2C_3}$$

Como $v = 2$ cuando $t = 0$, entonces $C_3 = (-\ln 2)/2$ y

$$\frac{dx}{dt} = v = e^{-2t+\ln 2} = 2e^{-2t} \text{ m/s}$$

*Este problema podría también resolverse integrando primero la ecuación diferencial lineal $\dot{v} + 2v = 0$, notando que Ae^{-2t} es la solución general.

Por lo tanto,

$$x = \int 2e^{-2t}\,dt + C_4 = -e^{-2t} + C_4 \text{ m}$$

Pero $x = -7$ m cuando $t = 0$ da $C_4 = -6$ m, y la solución es entonces

$$x = -6 - e^{-2t} \text{ m}$$

El tercer caso ocurre cuando la aceleración es función de la posición, $a = \ddot{x} = h(x)$. Podemos combinar $a = \dot{v}$ y $v = \dot{x}$ para obtener la útil relación

$$a\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dt} \tag{1.17}$$

Entonces, si existe una función $r(x)$ tal que $h(x) = \dfrac{d\,r(x)}{dx}$, obtenemos de la Ecuación (1.17) lo siguiente:

$$\frac{dr}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dt} \tag{1.18}$$

Integrando respecto al tiempo,

$$r(x) = \frac{v^2}{2} + C_5 \tag{1.19}$$

El cuadrado de la rapidez es

$$v^2 = 2r(x) - 2C_5$$

La ecuación (1.19) se llamará una integral de energía en los Capítulos 2 y 5

Ejemplo 1.4

Sea $\ddot{x} = h(x) = -4x$ m/s². Evaluar $v^2(x)$ si las condiciones iniciales son las mismas que en los Ejemplos 1.2 y 1.3.

Solución

Se está tratando la ecuación

$$\ddot{x} + 4x = 0$$

Se sabe por la teoría de las ecuaciones diferenciales que la solución de esta ecuación es $x = A \operatorname{sen} 2t + B\cos 2t$, la que con $x(0) = -7$ m y $\dot{x}(0) = 2$ m/s, se convierte en $x = \operatorname{sen} 2t - 7\cos 2t$ en metros. Sin embargo, obtengamos el resultado deseado usando el procedimiento descrito anteriormente, que es aplicable aunque $h(x)$ *no* sea lineal. Aquí $h(x) = -4x$ y con $r(x) = -2x^2$, la ecuación (1.19) da

$$-2x^2 = \frac{v^2}{2} + C_5$$

o bien

$$v^2 = -4x^2 - 2C_5 = 200 - 4x^2$$

en donde C_5 se determino mediante $v = 2$ m/s y $x = -7$ m, en $t = 0$.

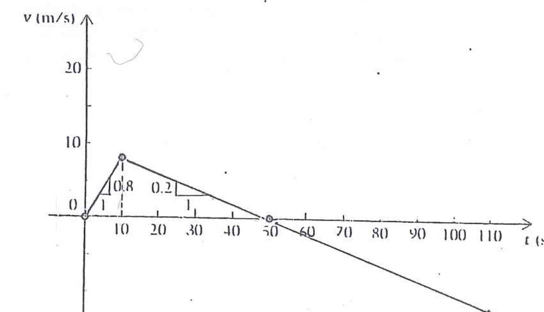
En problemas de cinemática rectilínea en los que la aceleración es una función conocida del tiempo (caso 1), se emplea a veces el llamado *diagrama v-t*. Daremos un solo ejemplo de su uso porque es un método algo limitado en su aplicación.

Ejemplo 1.5

Un punto P se mueve sobre una recta partiendo del reposo en el origen, con aceleración constante de 0.8 m/s² hacia la derecha. Después de 10 s, la aceleración de P cambia repentinamente a 0.2 m/s² hacia la izquierda. Determinar el tiempo total transcurrido hasta que P pasa de nuevo por el origen.

Solución

Si graficamos la velocidad contra el tiempo, la aceleración (dv/dt) será la pendiente de la curva en cualquier punto. El diagrama v-t para este problema se muestra en la figura anexa.



Notamos no sólo que

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{pendiente del diagrama}$$

sino que también

$$x = \int v\,dt + \text{constante}$$

Por consiguiente, el cambio en la posición x entre dos tiempos cualquiera es el área bajo el diagrama v-t entre esos tiempos. Cuatro puntos o tiempos son importantes en el diagrama para este problema:

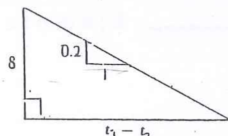
t_1 = tiempo de partida (en este caso cero)

t_2 = tiempo cuando la aceleración cambia (dado igual a 10 s)

t_3 = tiempo cuando la velocidad se ha reducido a cero (la deceleración causa que P se detenga antes de moverse en dirección opuesta)

t_4 = tiempo total requerido y transcurrido antes de que P se encuentre de nuevo en el origen.

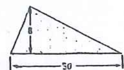
La velocidad en el tiempo t_2 es de 0.8 m/s² × 10 s = 8 m/s, como se ve en el diagrama. Para encontrar el intervalo de tiempo $t_3 - t_2$ usamos los triángulos semejantes de la figura anexa:



$$\frac{0.2}{1} = \frac{8}{t_3 - t_2} \Rightarrow t_3 - t_2 = 40$$

$$t_3 = 50\ \text{s}$$

La distancia total recorrida antes de que el punto se detenga (momentáneamente) es

S_1 = área de  $= \frac{1}{2}(50\ \text{s})(8\ \text{m/s}) = 200\ \text{m}$

Esta es la distancia que recorre por el punto en la dirección positiva (hacia la derecha).

El punto estará nuevamente en $x = 0$ cuando el valor absoluto del área negativa *bajo* el eje t (la distancia recorrida hacia la izquierda de regreso) sea igual a los 200 m recorridos hacia la derecha (representada por el área *sobre* el eje):

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}(t_4 - 50)}_{\text{base del triángulo}}\underbrace{[0.2(t_4 - 50)]}_{\text{altura del triángulo}} = 200$$

que puede reescribirse como:

$$t_4^2 - 100\,t_4 + 500 = 0$$

La única raíz de esta ecuación mayor que 50 s es $t_4 = 94.7$ s, y ésta es la respuesta al problema.

Un método alternativo al uso del diagrama v-t es como sigue. Integrando la aceleración durante el intervalo $0 \le t < 10$ s, y llamando x_1 durante este intervalo a x,

$$\ddot{x}_1 = 0.8 \Rightarrow \dot{x}_1 = 0.8t + C_1 = 0.8t\ \text{m/s} \quad (\text{ya que } \dot{x}_1 = 0 \text{ en } t = 0)$$

Integrando nuevamente (sobre el mismo intervalo), obtenemos,

$$x_1 = 0.4t^2 + C_2 = 0.4t^2\ \text{m} \quad (\text{ya que } x_1 = 0 \text{ en } t = 0)$$

entonces en $t = 10$ s, por sustitución,

$$x_1 = 40\ \text{m} \quad \text{y} \quad \dot{x}_1 = 8\ \text{m/s}$$

Luego, después de que la deceleración comienza (usando x_2 en este intervalo),

$$\ddot{x}_2 = -0.2 \Rightarrow \dot{x}_2 = -0.2t + C_3 \quad (\text{para } t \ge 10\ \text{s})$$

y como $\dot{x}_2 = 8$ m/s cuando $t = 10$ s, obtenemos $C_3 = 10$. Por lo tanto, $\dot{x}_2 = -0.2\,t + 10$ m/s

$$\boxed{\dot{x}_2 = -0.2t + 10\ \text{m/s}}$$

Integrando,

$$x_2 = -0.1t^2 + 10t + C_4\ \text{m}$$

Con $x_2 = 40$ m cuando $t = 10$ s, resulta $C_4 = -50$ m, por lo que

$$\boxed{x_2 = -0.1t^2 + 10t - 50\ \text{m}}$$

Podemos despejar el tiempo para $x_2 = 0$; la ecuación es la misma que en la solución con el diagrama v-t:

$$t_4^2 - 100t_4 + 500 = 0$$

De las raíces, $t_4 = 5.28$ y 94.7 s, sólo la última es válida, ya que 5.28 s ocurre antes del cambio de aceleración.

Aunque ambos métodos proporcionan la respuesta correcta de 94.7 s en el ejemplo anterior, recomendamos utilizar el último procedimiento de integrar las aceleraciones e igualar las velocidades y las posiciones entre los intervalos. La razón es que cuando se tienen aceleraciones *no constantes*, el uso del diagrama v-t requiere el evaluar áreas bajo curvas, las fórmulas de las cuales no se memorizan ordinariamente.

Al usar las ecuaciones es interesante establecer un nuevo origen para t_2 al principio del segundo intervalo:

$$\ddot{x}_2 = -0.2\ \text{m/s}^2 \Rightarrow \dot{x}_2 = -0.2t_2 + C_3 = -0.2t_2 + 8\ \text{m/s}$$

Integrando nuevamente obtenemos

$$x_2 = -0.1t_2^2 + 8t_2 + C_4 = -0.1t_2^2 + 8t_2 + 40\ \text{m}$$

Entonces $x_2 = 0$ conduce a la ecuación

$$t_2^2 - 80t_2 - 400 = 0$$

que tiene la raíz positiva $t_2 = 84.7$, valor que sumado a los 10 s de duración del primer intervalo, nos da otra vez los 94.7 s de tiempo total transcurrido. Es algo más fácil calcular las constantes de integración con este procedimiento de establecer un nuevo origen para el tiempo, que hacerlo con un origen único. El único precio que hay que pagar por esta simplificación es que al final se deben sumar los tiempos parciales.

Ejemplo 1.6

Un punto B parte del reposo en el origen en $t = 0$ y acelera a razón constante de k m/s² en movimiento rectilíneo. Después de 6 s, la aceleración está dada por la función $0.006\ t_2^2$ m/s², en la dirección opuesta, para la cual $t_2 = 0$ cuando $t = 6$ s. Si el punto se detiene en $t = 26$ s (desde el momento de partida) y cambia de dirección, encuentre la aceleración k durante el primer intervalo y la distancia recorrida por B antes de cambiar dirección. Encuentre el tiempo total transcurrido antes de que B pase nuevamente por el origen.

Solución

Comenzamos determinando el movimiento, $x_1(t)$, durante el primer intervalo; integramos la aceleración para obtener la velocidad y la posición:

$$\ddot{x}_1 = k \text{ m/s}^2$$

$$\dot{x}_1 = kt_1 + c_1 = kt_1 \text{ m/s} \qquad (\text{ya que } \dot{x}_1 = 0 \text{ cuando } t_1 = 0)$$

$$x_1 = \frac{kt_1^2}{2} + c_2 = \frac{kt_1^2}{2} \text{ m} \qquad (\text{pues } x_1 = 0 \text{ cuando } t_1 = 0)$$

En $t_1 = 6$ s, la aceleración cambia a un valor negativo y el punto B se desacelera. Al principio de este segundo intervalo, la velocidad (rapidez) y la posición de B están dadas por los valores finales del primer intervalo. Esos valores son $\dot{x}_1$ y x_1 en $t_1 = 6$:

$$x_2|_{t_2=0} = x_1|_{t_1=6} = \frac{k6^2}{2} = 18k \text{ m}$$

$$\dot{x}_2|_{t_2=0} = \dot{x}_1|_{t_1=6} = 6k \text{ m/s}$$

Nótese que comienza el tiempo t_2, al principio del segundo intervalo durante el cual se tiene:

$$\ddot{x}_2 = -0.006t^2 \text{ m/s}^2$$

en donde el signo negativo se necesita para expresar la *deceleración* (o *desaceleración*). Integrando obtenemos

$$\dot{x}_2 = -0.002t_2^3 + c_3$$
$$= -0.002t_2^3 + 6k \text{ m/s}$$

ya que $\dot{x}_2 = 6\ k$ m/s cuando $t_2 = 0$. Integrando una segunda vez,

$$x_2 = -0.0005t_2^4 + 6kt_2 + c_4$$
$$= -0.0005t_2^4 + 6kt_2 + 18k \text{ m}$$

en donde C_4 se calculó usando la condición inicial de que $x_2 = 18k$ metros cuando $t_2 = 0$.

Ahora usamos la condición de que $\dot{x}_2 = 0$ en $t_2 = 26 - 6 = 20$ s; esto permite determinar k:

$$0 = -0.002(20^3) + 6k$$

$$k = 2.67 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo k en la expresión para x_2 con $t_2 = 20$ s, obtenemos la posición de B en el "retorno":

$$x_{2\,(\text{retorno})} = -0.0005(20^4) + 6(2.67)(20) + 18(2.67)$$
$$= 288 \text{ m}$$

Finalmente, para obtener el tiempo t_2 (final) cuando B pasa de nuevo por el origen, hacemos

$$x_2 = 0 = -0.0005t_{2(\text{final})}^4 + 6(2.67)t_{2(\text{final})} + 18(2.67)$$

O bien

$$t_{2(\text{final})}^4 - 32{,}000t_{2(\text{final})} - 96{,}100 = 0 \qquad (1)$$

La única raíz positiva de esta ecuación* es (mediante una calentadora y con tres cifras decimales):

$$t_{2(\text{final})} = 32.7 \text{ s}$$

El tiempo total es t_2 (final) más la duración del primer intervalo, ó sea 38.7 s.

Antes de dejar este ejemplo se desea indicar que durante el primer intervalo de tiempo, *mientras que la aceleración es constante,*

$$x = \frac{kt^2}{2} + v_0t + x_0 \text{ m} \qquad (1.20)$$

en donde

$$x_0 = x(0) \text{ m}$$
$$v_0 = \dot{x}(0) \text{ m/s}$$

Haciendo $v = \dot{x}$,

$$v = kt + v_0 \text{ m/s} \qquad (1.21)$$

y eliminando t obtenemos

$$v^2 = v_0^2 + 2k(x - x_0) \text{ m}^2/\text{s}^2 \qquad (1.22)$$

Esta expresión da la magnitud de la velocidad en términos del desplazamiento. Muchos estudiantes han usado esta relación en cursos elementales de física; sin embargo, existe una ten-

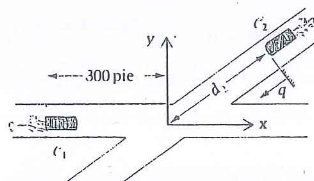
*La regla de los signos de Descartes dice que el número máximo de raíces reales positivas de la Ec. (1) es uno (número de cambios de signo en el primer miembro). Habrá exactamente una porque el lado izquierdo es negativo para $t_{2FIN} = 0$, y positivo para valores grandes de t_{2FIN}.

dencia a olvidar las condiciones bajo las cuales es válida; sólo se cumple en el *movimiento rectilíneo* con *aceleración constante*. No se podría haber usado durante el segundo intervalo del ejemplo precedente ni tampoco las ecuaciones para x y v de las cuales se derivó.

Ejemplo 1.7

Dos automóviles se acercan a un punto común (el origen en la figura), cada uno a 55 mi/h en línea recta, como se indica. El automóvil $\mathcal{C}_1$, no aumenta ni disminuye su velocidad; el conductor del $\mathcal{C}_2$ aplica los frenos. Encontrar la menor tasa de deceleración de $\mathcal{C}_2$ que permitirá $\mathcal{C}_1$ cruzar antes la intersección, si:

a. $d_2 = 200$ pie
b. $d_2 = 100$ pie



Solución

Situando el origen en el punto de intersección de las trayectorias de los dos vehículos, tenemos para $\mathcal{C}_1$:

$$\dot{x}_1 = 55 \text{ mi/h}\left(\frac{88 \text{ pie/s}}{60 \text{ mph}}\right) = 80.7 \text{ pie/s}$$

$$x_1 = 80.7t + C_1 \text{ pie}$$

Con la condición inicial $x_1 = 300$ pie cuando $t = 0$, obtenemos

$$x_1 = 80.7t - 300 \text{ pie}$$

La parte trasera de $\mathcal{C}_1$ estará en el origen (punto de posible colisión) cuando $x^1 = 0$:

$$0 = 80.7t_0 - 300$$

$$t_0 = 3.72 \text{ s}$$

Estudiemos ahora el movimiento de $\mathcal{C}_2$; usaremos para él la coordenada q. Si llamamos K la deceleración desconocida, tenemos

$$\ddot{q} = -K \text{ pie/s}^2$$

por lo que

$$\dot{q} = -Kt + C_2 \overset{*}{=} -Kt + 80.7 \text{ pie/s}$$

y

$$q = \frac{-Kt^2}{2} + 80.7t + C_3 \text{ pie}$$

Pero $C_3 = 0$, ya que $q = 0$ en $t = 0$.

Ahora vemos que en t = 3.72 s la posición de $\mathcal{C}_2$ es

$$q = \frac{-K(3.72^2)}{2} + 80.7(3.72)$$

$$= -6.92K + 300 \text{ pie}$$

Finalmente, el auto $\mathcal{C}_2$ pasa justamente frente a la parte trasera de $\mathcal{C}_1$ si q es d_2 en este instante:

$$d_2 = -6.92K + 300 \text{ pie}$$

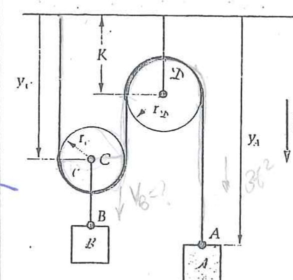
Por consiguiente:

a. Si $d_2 = 200$ pie, $K = 14.5$ pie/s^2
b. Si $d_2 = 100$ pie, $K = 28.9$ pie/s^2

Observe también que si $d_2 = 300$ pie, $K = 0$; esto se debe a que no se requiere *ninguna* deceleración para las mismas distancias a las mismas velocidades. Además, si $d_2 > 300$ entonces K es negativa, lo que significa que $\mathcal{C}_2$ tendría que *acelerar* para llegar a la intersección al mismo tiempo que $\mathcal{C}_1$.

En algunas ocasiones se presentan condiciones especiales en un problema que requieren cierto ingenio para expresar las relaciones cinemáticas. Si se tiene una cuerda inextensible, por ejemplo, tendremos que expresar la constancia de la longitud matemáticamente. Este es el caso en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.8



El bloque $\mathcal{A}$ se desplaza hacia abajo con $v_A = 3t^2 \downarrow$ m/s; determinar la velocidad del bloque $\mathcal{B}$ cuando $t = 4$ s.

Solución

La longitud L de la cuerda que pasa alrededor de las dos pequeñas poleas es constante. Esto da una ecuación de restricción que debe usarse en la solución. El procedimiento es como sigue:

$$L = y_C + \pi r_C + (y_C - K) + \pi r_{\mathcal{D}} + (y_A - K) \text{ m}$$

Derivando y notando que L, π, r_C, $r_{\mathcal{D}}$ y K son constantes obtenemos:

$$0 = 2\dot{y}_C + \dot{y}_A \Rightarrow \dot{y}_C = -\frac{\dot{y}_A}{2} = -\frac{3}{2}t^2$$

Las velocidades de C y B son iguales ya que ambos puntos se mueven sobre la misma trayectoria con un tramo de longitud constante entre ellos. Por consiguiente,

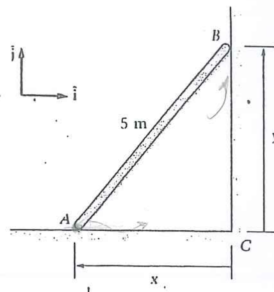
$$\mathbf{v}_B = -\frac{3}{2}t^2\hat{\jmath}\ \text{m/s}$$ (Nótese que C se mueve hacia arriba, ya que $\hat{\jmath}$ está dirigida hacia abajo.)

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_B|_{t=4} = -24\hat{\jmath}\ \text{m/s} \quad \text{ó} \quad 24\uparrow \text{m/s}$$

Ejemplo 1.9

Los extremos A y B de la barra rígida se mueven a lo largo de las guías horizontal y vertical como se muestra. El extremo A se mueve hacia la derecha con velocidad constante de 8 m/s. Encontrar la velocidad y aceleración de B en el instante en que A está a 3 m de la esquina C.



Solución

En términos de los parámetros y vectores unitarios mostrados en la figura,

$$\mathbf{v}_A = -\dot{x}\hat{\imath} = 8\,\hat{\imath}\ \text{m/s}, \qquad \mathbf{v}_B = \dot{y}\hat{\jmath}$$

$$\mathbf{a}_A = -\ddot{x}\hat{\imath} = 0 \qquad \mathbf{a}_B = \ddot{y}\hat{\jmath}$$

Como la distancia de A a B es constante e igual a 5 m pues,

$$x^2 + y^2 = 25$$

entonces

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

ó

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0$$

Cuando $x = 3$ m, $y = 4$ m y

$$3(-8) + 4\dot{y} = 0$$

ó

$$\dot{y} = 6\ \text{m/s}$$

de modo que

$$\mathbf{v}_B = 6\,\hat{\jmath}\ \text{m/s}$$

Derivando nuevamente

$$\dot{x}\dot{x} + x\ddot{x} + \dot{y}\dot{y} + y\ddot{y} = 0$$

Por lo tanto, en el instante de interés:

$$(-8)(-8) + (3)(0) + (6)(6) + 4\ddot{y} = 0$$

ó

$$\ddot{y} = -25\ \text{m/s}^2$$

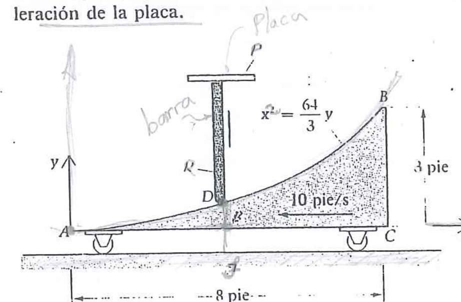
y

$$\mathbf{a}_B = -25\hat{\jmath}\ \text{m/s}^2$$

Este último ejemplo ilustra un tipo diferente de restricción, la de un punto sobre un cuerpo que mantiene contacto con una superficie (o línea) de otro cuerpo en movimiento.

Ejemplo 1.10

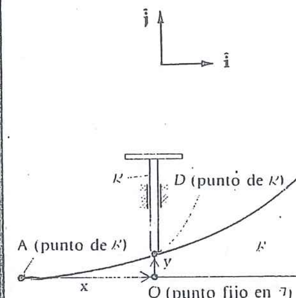
La curva AB en el bloque $\mathcal{B}$ es una parábola cuyo vértice está en A. Su ecuación es $x^2 = (64/3)y$. El bloque $\mathcal{B}$ es empujado hacia la izquierda con velocidad constante de 10 pie/s. La barra $\mathcal{R}$ se desliza sobre la parábola forzando a la placa $\mathcal{P}$ hacia arriba. Calcular la aceleración de la placa.



Solución

Notemos que la placa $\mathcal{P}$ y la barra $\mathcal{R}$ juntos constituyen un cuerpo rígido único, cada uno de cuyos puntos tienen movimiento unidimensional (según y). Las velocidades y aceleraciones de todos esos puntos son por lo tanto iguales. Nos fijaremos en el punto D, que es el punto más bajo de $\mathcal{R}$ en contacto con $\mathcal{B}$.

Tomamos como marco de referencia $\mathcal{I}$ el suelo, con origen en O, como se ve en el diagrama.



$$\mathbf{r}_{OA} = -x\hat{\imath} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_{OD} = y\hat{\jmath}\ \text{pie} \tag{1}$$

Como D siempre descansa sobre la superficie parabólica de $\mathcal{B}$, $y = (3/64)x^2$, por lo que

$$\mathbf{r}_{OD} = \tfrac{3}{64}x^2\hat{\jmath}\ \text{pie} \tag{2}$$

Para obtener la aceleración de D, primero encontramos su velocidad:

$$\mathbf{v}_D = \tfrac{3}{32}x\dot{x}\hat{\mathbf{j}} \text{ pie/s} \tag{3}$$

Para obtener $\dot{x}$ se diriva $\mathbf{r}_{0A}$ en la ecuación (1):

$$\dot{\mathbf{r}}_{0A} = \mathbf{v}_A = -\dot{x}\hat{\mathbf{i}} = -10\hat{\mathbf{i}} \text{ pie/s} \tag{4}$$

puesto que todos los puntos de $\mathscr{B}$ tienen velocidad constante de 10 pie/s hacia la izquierda.

La sustitución de $\dot{x} = 10$ en la ecuación (3) da

$$\mathbf{v}_D = \tfrac{3}{32}x(10)\hat{\mathbf{j}} = \tfrac{15}{16}x\hat{\mathbf{j}} \text{ pie/s} \tag{5}$$

y vemos que la velocidad de D depende de x. Derivando $\mathbf{v}_D$ resulta la aceleración de D:

$$\mathbf{a}_D = \frac{15}{16}\dot{x}\hat{\mathbf{j}} = \frac{150}{16}\hat{\mathbf{j}} = 9.38\hat{\mathbf{j}} \text{ pie/s}^2 \tag{6}$$

La ecuación (6) da la aceleración de todos los puntos de la placa. Nótese que la aceleración de D es constante.

Pregunta 1.2 ¿Sería $\mathbf{a}_D$ constante si la superficie inclinada (a) fuese plana, o (b) una parábola cúbica, en vez de ser una parábola cuadrática?

Problemas / Sección 1.4

1.28 Un bloque se desliza en una ranura rectilínea (Fig. P 1. 28) con una aceleración dada por

$$a_s = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} = -\pi^2 \operatorname{sen} \pi t \hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}^2$$

Determine el movimiento $x(t)$ del bloque si en $t = 0$:

a. está pasando por el origen, y
b. tiene velocidad $\dot{x}\hat{\mathbf{i}} = 2\pi\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s.

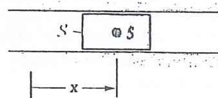


Figura P1.28

1.29 Suponga que un aeroplano aterriza suavemente sobre una pista a 60 mi/h. Si luego se desacelera a razón constante de 10 pie/s² hasta detenerse, encuentre la longitud requerida de pista.

1.30 Un tren viaja a 70 km/h. Si sus frenos lo desaceleran a razón constante de 0.5 m/s², calcule la distancia desde la estación en donde los frenos deben aplicarse para que el tren se detenga justamente en la estación. ¿Cuánto tardaría el tren en parar?

1.31 Un punto P parte del reposo y acelera uniformemente ($\ddot{x}$ = constante) hasta alcanzar una velocidad de 88 pie/s después de recorrer 120 pies. Encuentre la aceleración de P.

1.32 Si en el problema anterior se aplica una deceleración de 3 pie/s², comenzando ésta cuando P está a 120 pie, determine el tiempo y la distancia requerida para alcanzar el reposo.

1.33 Un auto viaja a 55 mi/h sobre un camino recto. El conductor aplica los frenos durante 6 s, produciéndose una deceleración constante de 5 pie/s² y luego acelera a 2 pie/s². ¿Cuánto tiempo tarda el auto en alcanzar su velocidad original?

1.34 En el problema anterior, suponga que la aceleración que sigue al frenado no es constante sino que esta dada por $\ddot{x} = 0.6\,t$ pie/s². ¿Cuánto tarda ahora en alcanzar 55 mi/h?

En los Problemas 1.35 al 1.37, la gráfica describe la velocidad de un punto P en movimiento rectilíneo. Trace las curvas que muestran la posición $x(t)$ y la aceleración $a(t)$ de P si el punto se encuentra en la posición indicada x_0 en $t = 0$.

1.35 $x_0 = -1125$ m
Intervalo de tiempo: $0 \le t \le 20$ s (Fig. Pl. 35)

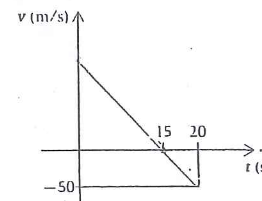


Figura P1.35

1.36 $x_0 = 10$ m
Intervalo de tiempo: $0 \le t \le 30$ s (Fig. Pl. 36)

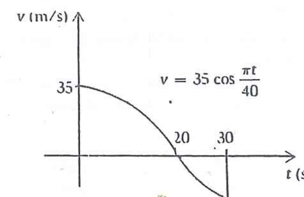


Figura P1.36

1.37 $x_0 = 10$ m
Intervalo de tiempo: $2 \le t \le 5$ s (Fig. Pl. 37)

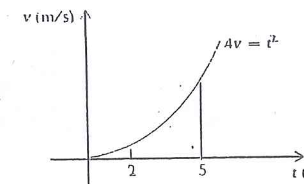


Figura P1.37

1.38 Un conductor acelera su auto a lo largo de una pista recta con aceleración constante desde cero hasta 120 mi/h. En ese momento empieza a desacelerar con razón constante hasta que el auto se detiene. El recorrido total es de $\frac{1}{4}$ mi. ¿Cuánto tiempo transcurre desde su partida hasta que se detiene? *Sugerencia*: esboce un diagrama v-t

1.39 Ben Johnson estableció un récord mundial de 9.83 s el 31 de agosto de 1987 en la carrera de los cien metros planos. También había establecido el mismo año el récord de 6.4 s en la carrera de 60 m. Suponiendo que en cada carrera Johnson aceleró uniformemene hasta alcanzar cierta velocidad v_0 y luego mantuvo esa velocidad máxima hasta el final de ambas carreras, encuentre (a) el tiempo t_0 requerido para alcanzar v_0; (b) el valor de v_0 y (c) la distancia recorrida mientras existió aceleración.

1.40 Un tren viaja de una ciudad a otra que está a 134 mi de distancia. Acelera desde el reposo hasta alcanzar una velocidad máxima de 100 mi/h en 4 min; el promedio de velocidad en este intervalo es de 65 mi/h. Mantiene su velocidad máxima hasta poco antes de su arribo, cuando empieza a decelerar, hasta alcanzar el reposo; la velocidad promedio durante la deceleración es de 40 mi/h. Si el tiempo total empleado para el viaje es de 85 min. encuentre el intervalo de deceleración.

1.41 Un punto Q en movimiento rectilíneo pasa por el origen en $t = 0$ y luego durante 5 s la aceleración de Q es de 6 pie/s² hacia la derecha. Comenzando en $t = 5$ s, la aceleración de Q es de $12\,t$ pie/s² hacia la izquierda. Si después de 2 s más el punto Q está 13 pie a la derecha del origen, ¿cuál fué la velocidad de Q en $t = 0$?

1.42 Un punto parte del reposo en $x = 0$ con aceleración constante hacia la derecha durante 10 s. Luego continúa a velocidad constante por 8 s más. En la tercera etapa de su movimiento, decelera a 5 m/s² y pasa por el origen nuevamente cuando el tiempo total del recorrido ha sido de 28 s. Determine la aceleración en los primeros 10 s.

1.43 Un automóvil pasa por un punto P con velocidad de 80 mi/h. En P comienza a decelerar a una razón proporcional al tiempo. Si después de 5 s el vehículo va a 50 mi/h, ¿qué distancia ha recorrido?

1.44 Repita el problema anterior pero ahora suponga que la deceleración es proporcional al cuadrado del tiempo. Los demás datos permanecen iguales.

1.45 Una partícula tiene una aceleración rectilínea que varia linealmente igual a $\mathbf{a} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} = 12t\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s². Se efectúan dos observaciones del movimiento de la partícula: su velocidad en $t = 1$ s es $\dot{x}\hat{\mathbf{i}} = 2\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s y su posición en $t = 2$ s está dada por $x = 3\,\hat{\mathbf{i}}$ m.

a. Encuentre el desplazamiento de la partícula en $t = 5$ s respecto al que tenía en $t = 0$.
b. Determine la distancia recorrida por la partícula en ese intervalo de tiempo.

1.46 Un punto P se mueve sobre una recta. La aceleración de P está dada por $\mathbf{a}_p = \ddot{x}_p\hat{\mathbf{i}} = (3\,t^2 - 30\,t + 56)\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s². La velocidad de P en $t = 0$ es $-60\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s y su posición en ese instante es de $x_p = 7$ m. Encuentre la distancia recorrida por P en el intervalo de $t = 0$ a $t = 13$ s.

* **1.47** La posición de un punto P sobre una recta está dada por la ecuación $x = t$ sen $(\pi t/2)$. El punto comienza a moverse en $t = 0$. Encuentre la distancia total recorrida por P cuando éste pasa por el origen (contando la salida como el primer pase) por tercera vez.

1.48 Una partícula que se mueve sobre una línea recta está sujeta a una aceleración directamente proporcional a su distancia a un punto fijo P sobre la línea y dirigida hacia P. Inicialmente la partícula está a 5 pie a la izquierda de P y se mueve hacia la derecha con velocidad de 24 pie/s. Si la partícula se detiene momentáneamente a 13 pie a la derecha de P, encuentre su velocidad al pasar por P.

1.49 Una partícula se mueve sobre el eje x y tiene una aceleración dirigida siempre hacia el origen. La magnitud de la aceleración es nueve veces la distancia desde el origen. Cuando la partícula está a 6 m a la izquierda del origen, tiene una velocidad de 3 m/s hacia la derecha. Encuentre el tiempo que tarda la partícula para ir de esta posición al origen.

1.50 Un punto P tiene una aceleración dada por la ecuación $\ddot{x} = -5x^2$ m/s^2. Determine la velocidad de P en función de su posición x si P está en 0.3 m con $\dot{x} = 0.6$ m/s cuando $t = 0$.

1.51 Suponga que las condiciones iniciales son las mismas que en el problema anterior pero $\ddot{x} = -5\dot{x}^2$. Encuentre x en función del tiempo.

1.52 La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria horizontal es proporcional a su distancia a un punto fijo sobre la trayectoria. Cuando $t = 0$, la partícula está a 1 pie a la derecha del punto fijo. Cuando $v = 20$ pie/s hacia la derecha, $a = 5$ pie/s^2 hacia la derecha. Determine la posición de la partícula cuando $t = 4$s. (Ver la Fig. Pl. 52.)

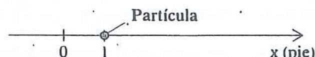


Figura P1.52

1.53 Un auto pasa frente a un autopatrulla policiaco estacionado, con velocidad de 70 mi/h (Fig. Pl. 53). Tres segundos después el autopatrulla policial comienza a acelerar desde el reposo a razón de 10 pie/s^2 hasta que alcanza la velocidad de 85 mi/h. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar al otro automóvil si ninguno de los dos vehículos acelera o desacelera?

1.54 En el problema anterior suponga que el conductor del auto ve al de la policía 10 s después de que éste ha empezado a moverse y luego decelera a razón de 3 pie/s^2. ¿Cuánto tiempo toma a la policía *pasar* al primer auto si la conductora policial está persiguiendo en realidad a otro vehículo que va más adelante?

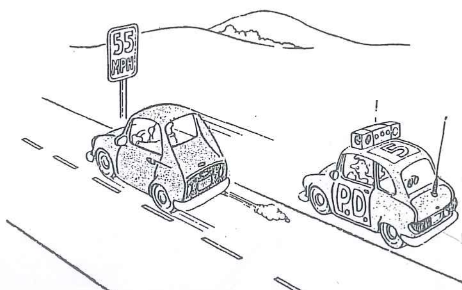


Figura P1.53

1.55 Dos automóviles parten del reposo en la misma posición y en el mismo instante y viajan a lo largo de una pista recta. El auto $\mathcal{A}$ acelera a razón de 6.6 pie/s^2 hasta alcanzar una velocidad de 90 mi/h y permanece luego con esta velocidad. El auto $\mathcal{B}$ acelera a razón de 4.4 pie/s^2 hasta alcanzar una velocidad de 96 mi/h y luego permanece con esta velocidad.

a. ¿Cuál auto ganará la carrera de 3 millas y por qué margen?
b. ¿Cuál será la máxima ventaja de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{B}$?
c. ¿Qué distancia han recorrido los autos cuando $\mathcal{B}$ pasa a $\mathcal{A}$?

* **1.56** Un auto va 40 pie detrás de un camión; ambos se mueven a 55 mi/h (Fig. Pl 56). Repentinamente el camión frena decelerando a razón de 10 pie/s^2. Dos segundos después el auto frena con una deceleración a_C. Encuentre el valor mínimo de a_C para que el auto no choque contra el camión. *Sugerencia*: Se debe tener x (camión) $>$ x (auto) para *todo* tiempo t antes de que los vehículos se detengan.

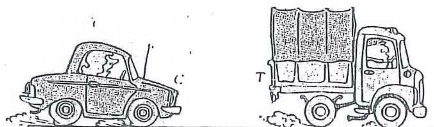


Figura P1.56

1.57 El punto B del bloque $\mathcal{B}$ tiene una aceleración constante de 10 m/s^2 hacia arriba. En el instante mostrado en la Fig. Pl. 57, está 30 m abajo del nivel del punto A de $\mathcal{A}$.

*Los asteriscos señalan los problemas más difíciles.

En este momento, v_A y v_B son cero. Determine las velocidades de A y B al pasar uno frente al otro.

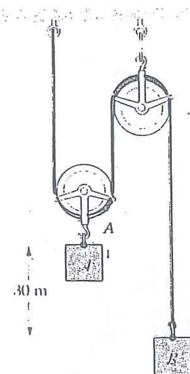


Figura P1.57

1.58 Las aceleraciones de los bloques $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son de 2 m/s^2 ↓ y de 3 m/s^2 ↑ respectivamente. (Fig. Pl. 58.) El sistema entero está en reposo en el instante dado. Encuentre cuánto tardará el bloque $\mathcal{C}$ en llegar al suelo. (No suponga que las poleas P_1 y P_2 permanecen al mismo nivel.)

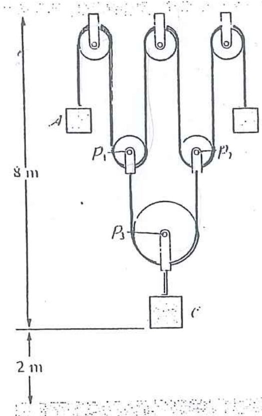


Figura P1.58

* **1.59** El bloque $\mathcal{A}$ tiene $v_A = 10$ m/s hacia la derecha en $t = 0$ y una aceleración constante de 2 m/s^2 hacia la izquierda. Halle la distancia recorrida por el bloque $\mathcal{B}$ durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 8$ s. (Fig. Pl. 59.)

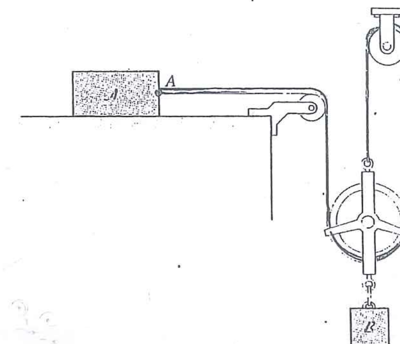


Figura P1.59

1.60 Un hombre y su hija han ideado una manera de levantar 8000 lb de tejas hasta el techo de su casa; han fijado una polea en la chimenea (Fig. Pl. 60) y usarán el auto para levantar la carga mediante una cuerda. Cuando el parachoques del auto está en $x = 0$ (desprecie d), el embalaje con las tejas se encuentra en el suelo y la cuerda está tensa. Si el auto se desplaza hacia la izquierda con velocidad constante $v_A = 2$ *mi/h, encuentre la velocidad y aceleración de los ladrillos en función de x.* Utilice el triángulo de la figura para expresar y en función de x y diferencie el resultado.

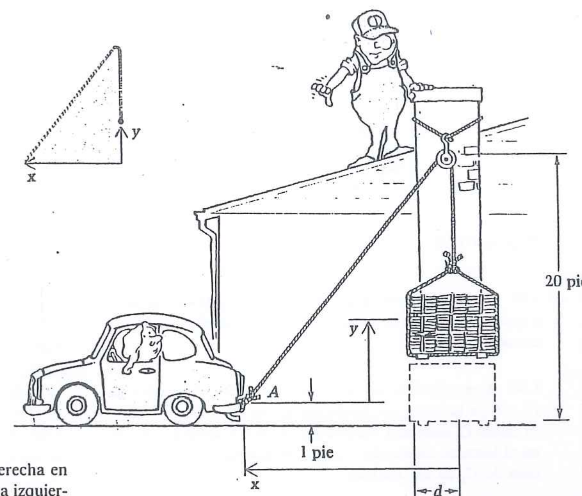


Figura P1.60

1.61 La cuerda mostrada en la Fig. Pl. 61, unida a la pared en D, pasa por una pequeña polea fija en B a $\mathcal{B}$; luego pasa por otra polea $\mathcal{P}$ y termina en el punto A del cuerpo $\mathcal{A}$. La cuerda tiene 44 m de longitud y el sistema está en reposo en la posición indicada. Repentinamente el punto B se mueve hacia la derecha con aceleración constante $a_B = 2$ m/s^2. Determine la velocidad de A justamente antes de que llegue a la polea.

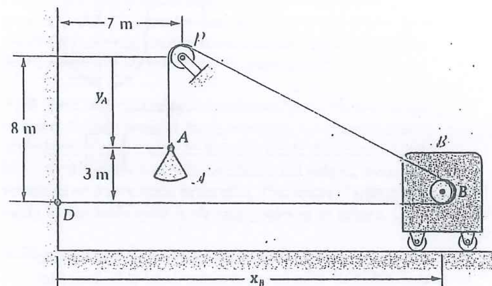


Figura P1.61

1.62 El centro C del rodillo en la ranura horizontal de la Fig. Pl. 62 tiene un movimiento dado por $x = 0.2\,t^2$ m. Encuentre la velocidad del punto B. *Sugerencia:* Establezca el Teorema de Pitágoras y tome la derivada de la ecuación, notando que es constante la longitud L de la barra que conecta los rodillos.

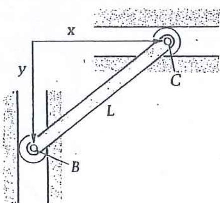


Figura P1.62

1.63 La velocidad del punto A en la Fig. Pl. 63 es constante e igual a 2 m/s hacia la derecha. Calcule la velocidad de B cuando $x = 10$ m.

1.64 Los collarines en la Fig. Pl. 64 están conectados en C_1 y C_2 a la barra por medio de juntas esféricas o rótulas. El punto C_2 tiene una velocidad de $2\,\hat{\imath}$ m/s y aceleración cero en el instante mostrado. Calcule la velocidad y la aceleración de C_1 en ese instante.

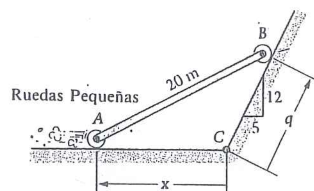


Figura P1.63

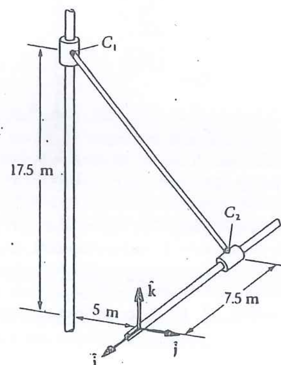


Figura P1.64

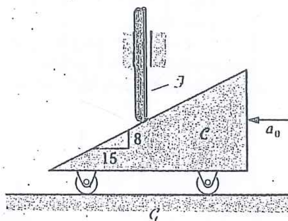


Figura P1.65

1.65 La leva en forma de cuña en la Fig. Pl. 65 se mueve hacia la izquierda con aceleración constante a_0. Encuentre la aceleración del seguidor $\mathcal{F}$.

1.66 En el Ejemplo 1.10 sea $x^3 = (512/3)y$ la ecuación de la superficie. Si el movimiento comienza cuando $x = y = 0$, halle la aceleración de la placa $\mathcal{P}$ cuando $y = 2$ pie.

1.5 Coordenadas ortogonales (cartesianas).

En esta sección añadiremos las componentes y y z de la posición a la componente rectilínea x estudiada en la sección precedente. Esto permite al punto P moverse sobre una curva en un espacio de dos o tres dimensiones en vez de estar restringido a moverse sobre una línea recta en el marco de referencia $\mathcal{I}$.

Supóngase que P se encuentra en un estado general (tridimensional) de movimiento en el marco $\mathcal{I}$. Podemos estudiar este movimiento estableciendo un conjunto de ejes ortogonales en $\mathcal{I}$, como se muestra en la Fig. 1.4. El vector de posición de P es

$$\mathbf{r}_{OP} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{1.23}$$

en donde (x, y, z) son las **coordenadas ortogonales** (o **cartesianas**) de P, medidas según los ejes incluidos, y $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ son los vectores unitarios respectivos según los ejes dados (Fig. 1.4). Mediante las definiciones básicas (ecuaciones 1.9 y 1.10) es posible derivar $\mathbf{r}_{OP}$ y obtener expresiones para la velocidad y aceleración en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{v}_P = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k} \tag{1.24}$$

$$\mathbf{a}_P = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k} \tag{1.25}$$

Consideramos ahora ejemplos en los que los puntos se mueven en dos y en tres dimensiones.

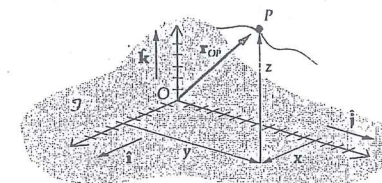


Figura 1.4 Coordenadas ortogonales (o cartesianas) de P.

Ejemplo 1.11

El vector de posición de un punto P es

$$\mathbf{r}_{OP} = 2t\hat{\imath} + t^3\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k} \text{ pie}$$

Determinar la velocidad y aceleración de P en $t = 1$ s.

Solución

Derivando el vector de posición, obtenemos el vector velocidad de P:

$$\mathbf{v}_P = 2\hat{\imath} + 3t^2\hat{\jmath} + 6t\hat{k} \text{ pie/s}$$

Diferenciando nuevamente obtenemos la aceleración de P:

$$\mathbf{a}_P = 6t\hat{\jmath} + 6\hat{k} \text{ pie/s}^2$$

En $t = 1$ s, la velocidad y la aceleración de P son:

$$\mathbf{v}_P|_{t=1} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}} = 7\left(\frac{2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}}\right) \text{ pie/s}$$

$$\mathbf{a}_P|_{t=1} = 6\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}} = 6\sqrt{2}\left(\frac{\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{2}}\right) \text{ pie/s}^2$$

Adviértase que la magnitud de la velocidad (rapidez) de P en $t = 1$ es $|\mathbf{v}_P| = 7$ pie/s, y la magnitud de la aceleración en $t = 1$ es $6\sqrt{2}$ pie/s^2. Volveremos a este ejemplo en la sección 1.7.

Vemos en este ejemplo que si el vector de posición de P se conoce en función del tiempo, es muy fácil obtener la velocidad y aceleración del punto. En el siguiente ejemplo se da la aceleración de P y se busca su *posición*. Como este problema implica integración en vez de dirivación, se tienen que considerar las condiciones iniciales. Estas condiciones permiten calcular las constantes de integración, como vimos en el caso del movimiento rectilíneo en la sección anterior.

Ejemplo 1.12

Un punto Q tiene el vector aceleración

$$\mathbf{a}_Q = 4\hat{\mathbf{i}} - 6t\hat{\mathbf{j}} + \text{sen}\, 0.2t\hat{\mathbf{k}} \text{ m/s}^2$$

En $t = 0$, el punto Q se encuentra en $(x, y, z) = (1, 3, -5)$ m y tiene un vector velocidad de $2\hat{\mathbf{i}} - 7\hat{\mathbf{j}} + 3.4\hat{\mathbf{k}}$ m/s. Cuando $t = 3$ s, encuentre la velocidad de Q y su distancia al punto de partida.

Solución

Integrando obtenemos

$$\mathbf{v}_Q = 4t\hat{\mathbf{i}} - 3t^2\hat{\mathbf{j}} - 5\cos 0.2t\mathbf{k} + \mathbf{c} \text{ m/s}$$

en donde $\mathbf{c}$ es un vector constante. Usando la condición inicial para la velocidad en $t = 0$, obtenemos

$$\mathbf{v}_Q|_{t=0} = 0\hat{\mathbf{i}} - 0\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{c} = 2\hat{\mathbf{i}} - 7\hat{\mathbf{j}} + 3.4\hat{\mathbf{k}} \text{ m/s}$$

por lo que

$$\mathbf{c} = 2\hat{\mathbf{i}} - 7\hat{\mathbf{j}} + 8.4\hat{\mathbf{k}} \text{ m/s}$$

Por tanto

$$\mathbf{v}_Q = (4t + 2)\hat{\mathbf{i}} - (3t^2 + 7)\hat{\mathbf{j}} + (8.4 - 5\cos 0.2t)\hat{\mathbf{k}} \text{ m/s}$$

Integrando de nuevo obtenemos

$$\mathbf{r}_{OQ} = (2t^2 + 2t)\hat{\mathbf{i}} - (t^3 + 7t)\hat{\mathbf{j}} + (8.4t - 25\,\text{sen}\,0.2t)\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{c}' \text{ m}$$

en donde $\mathbf{c}'$ es otro vector constante evaluado a continuación a partir de la condición inicial para la *posición* de Q en $t = 0$:

$$\mathbf{r}_{OQ}|_{t=0} = 0\hat{\mathbf{i}} - 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{c}' = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}} \text{ m}$$

de modo que

$$\mathbf{c}' = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}} \text{ m}$$

y entonces

$$\mathbf{r}_{OQ} = (2t^2 + 2t + 1)\hat{\mathbf{i}} - (t^3 + 7t - 3)\hat{\mathbf{j}} + (8.4t - 25\,\text{sen}\,0.2t - 5)\hat{\mathbf{k}} \text{ m}$$

Sustituyendo $t = 3$ s en las expresiones para $\mathbf{v}_Q$ y $\mathbf{r}_{OQ}$ obtenemos las respuestas:

$$\mathbf{v}_Q|_{t=3} = 14\hat{\mathbf{i}} - 34\hat{\mathbf{j}} + (8.4 - 5\cos 0.6)\hat{\mathbf{k}}$$
$$= 14\hat{\mathbf{i}} - 34\hat{\mathbf{j}} + 4.27\hat{\mathbf{k}} \text{ m/s}$$

La velocidad de Q está dada por

$$v_Q|_{t=3} = \sqrt{14^2 + (-34)^2 + 4.27^2} = 37.0 \text{ m/s}$$

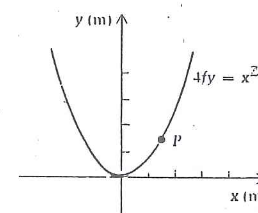
La posición en $t = 3$ s es

$$\mathbf{r}_{OQ}|_{t=3} = 25\hat{\mathbf{i}} - 45\hat{\mathbf{j}} + (20.2 - 25\,\text{sen}\,0.6)\hat{\mathbf{k}}$$
$$= 25\hat{\mathbf{i}} - 45\hat{\mathbf{j}} + 6.08\hat{\mathbf{k}} \text{ m}$$

La distancia d entre Q y su punto de partida es entonces

$$d = |\mathbf{r}_{OQ}(3) - \mathbf{r}_{OQ}(0)|$$
$$= \sqrt{(25 - 1)^2 + (-45 - 3)^2 + [6.08 - (-5)]^2}$$
$$= 54.8 \text{ m}$$

Ejemplo 1.13



El punto P viaja sobre la parábola (con distancia focal $f = \frac{1}{2}$m) con rapidez constante de 0.2 m/s. Determine la aceleración de P: (a) en función de x y (b) en $x = 2$ m.

Solución

Diferenciando obtenemos las componentes de la velocidad:

$$2y = x^2$$

$$2\dot{y} = 2x\dot{x} \Rightarrow \dot{y} = x\dot{x}$$

Entonces

$$\mathbf{v}_P = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + x\dot{x}\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s} \quad (1)$$

La aceleración de P es

$$\mathbf{a}_P = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} = \ddot{x}\hat{\imath} + (\dot{x}^2 + x\ddot{x})\hat{\jmath}\ \mathrm{m/s^2} \tag{2}$$

Como $|\mathbf{v}_P|$, ó sea v_P, es constante,

$$v_P = 0.2 = \sqrt{\dot{x}^2 + (x\dot{x})^2}\ \mathrm{m/s}$$

$$\dot{x} = \frac{0.2}{\sqrt{1 + x^2}}\ \mathrm{m/s} \tag{3}$$

Vemos también en (2) que se necesita $\ddot{x}$; dirivando (3) obtenemos

$$\ddot{x} = \frac{-0.2\, x\dot{x}}{(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{-0.2\left(\dfrac{0.2}{\sqrt{1 + x^2}}\right)x}{(1 + x^2)^{3/2}}\ \mathrm{m/s^2}$$

o bien

$$\ddot{x} = \frac{-0.04x}{(1 + x^2)^2}\ \mathrm{m/s} \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2),

$$\mathbf{a}_P = \frac{-0.04x}{(1 + x^2)^2}\hat{\imath} + \left[\frac{0.04}{1 + x^2} - \frac{0.04x^2}{(1 + x^2)^2}\right]\hat{\jmath}\ \mathrm{m/s^2}$$

Cuando $x = 2$ m,

$$\mathbf{a}_P = \frac{-0.04(2)}{5^2}\hat{\imath} + \left[\frac{0.04}{5} - \frac{0.04(2^2)}{5^2}\right]\hat{\jmath}$$

$$= -0.0032\hat{\imath} + 0.0016\hat{\jmath}\ \mathrm{m/s^2}$$

Antes de terminar esta Sección se destaca que la forma sencilla de las ecuaciones (1.24) y (1.25) se debe a que los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ permanecen constantes tanto en magnitud como en dirección cuando los ejes están fijos en el marco de referencia. Para aplicaciones *planares* (Capítulo 3) la componente z de la velocidad será idénticamente igual a cero, obteniendo para un punto en movimiento plano (moviéndose sólo en un plano paralelo al xy):

$$\mathbf{r}_{OP} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \quad \text{(en donde } z \text{ es constante)} \tag{1.26}$$

$$\mathbf{v}_P = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} \tag{1.27}$$

$$\mathbf{a}_P = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} \tag{1.28}$$

Problemas / Sección 1.5

1.67 El pasador móvil P de una manivela en rotación tiene una posición definida por

$$x = 20 \cos \pi t \text{ m}$$
$$y = 20 \operatorname{sen} \pi t \text{ m}$$

Encuentre la velocidad de P cuando $t = 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ y 2 s.

1.68 En el problema anterior, determine la aceleración de P en el mismo instante.

1.69 Un punto P se mueve sobre una circunferencia en el sentido mostrado en la Fig. P1.69. Exprese $\mathbf{r}_{OP}$ en coordenadas (x, y, z) y dirive para obtener $\mathbf{v}_P$ y $\mathbf{a}_P$. (El ángulo θ está en radianes.)

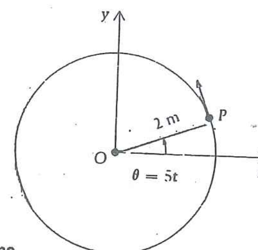


Figura P1.69

1.70 Resuelva de nuevo el problema anterior; sin embargo, ahora el ángulo θ crece cuadrática, en vez de linealmente, con el tiempo, según la fórmula $\theta = 3t^2$ rad.

1.71 Un punto P parte del origen y se mueve a lo largo de la parábola mostrada en la Fig. P1.71 con una componente x de velocidad dada por $\dot{x} = 3$ pie/s. Encuentre la velocidad y aceleración de P en el punto $(x, y) = (1, 1)$.

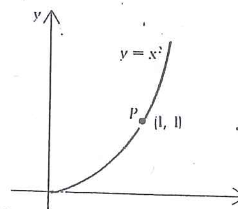


Figura P1.71

1.72 El cuerpo (punto) P está restringido a moverse en las dos ranuras mostradas: una en el cuerpo $\mathcal{A}$ y la otra en el marco de referencia $\mathcal{R}$. La aceleración constante de $\mathcal{A}$ es de 4 cm/s² hacia la izquierda. Si P alcanza el fondo de la ranura (en $\mathcal{A}$) 2 s después del instante mostrado en la Fig. P1.72, cuando $\mathcal{A}$ está en reposo:

a. ¿A través de que altura h se movió P?
b. ¿Qué distancia recorrió?

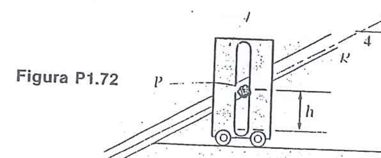


Figura P1.72

1.73 El pasador mostrado en la Fig. P1.73 se mueve en una ranura parabólica del marco de referencia $\mathcal{T}$ y está guiado por la ranura vertical del cuerpo $\mathcal{B}$. Para este último cuerpo, $x = 0.05\,t^3$ m localiza la línea central de su ranura.

a. Calcule la aceleración de P en $t = 5$ s.
b. Determine el tiempo (s) en que son iguales las componentes x y y de $\mathbf{a}_P$.

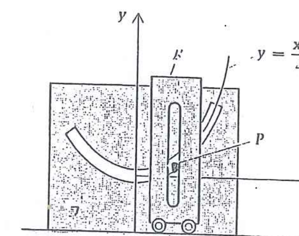


Figura P1.73

1.74 Un pasador P se mueve en una ranura en forma de seno hiperbólico, como se muestra en la Fig. P1.74; es guiado por la ranura vertical del cuerpo $\mathcal{B}$, que tiene una velocidad de 0.08 m/s hacia la derecha. Encuentre $\mathbf{v}_P$ y $\mathbf{a}_P$ cuando $x = 0.2$ m.

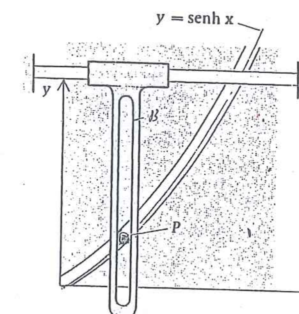


Figura P1.74

1.75 Un punto P describe una trayectoria con las siguientes coordenadas dadas en función del tiempo t (en segundos):

$$x = 12 \cos \frac{\pi t}{2} \text{ m} \qquad y = 8 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2} \text{ m}$$

$$z = 0$$

a. Calcule la velocidad $\mathbf{v}_P(t)$ y la aceleración $\mathbf{a}_P(t)$ de P.
b. Determine la posición, velocidad y aceleración de P cuando $t = 4$ s.
c. Elimine el tiempo t de las expresiones para x y y y obtenga la ecuación de la trayectoria de P.

1.76 El movimiento de una partícula P está dado por $x = C \cosh kt$ (en pies) y $y = C \operatorname{senh} kt$ (en pies), en donde C y k son constantes. Obtenga la ecuación de la trayectoria de P eliminando el tiempo t.

1.77 En el problema anterior determine la velocidad (rapidez) de P en función de la distancia $r\ (= \sqrt{x^2 + y^2})$ del origen a P.

1.78 Describa precisamente la trayectoria del movimiento de una partícula si sus coordenadas xy están dadas por $(2.5t^2 + 7,\ 6t^2 + 9)$ metros, cuando t está en segundos.

1.79 Una partícula P se mueve en el plano xy. El movimiento de P está dado por

$$x = 30t + 6 \text{ pie}$$

$$y = 20t - 7 \text{ pie}$$

Obtenga la ecuación de la trayectoria de P en la forma $y = f(x)$.

1.80 Repita el Problema 1.79 si

$$x = 5t \text{ m}$$

$$y = 25t^2 \text{ m}$$

1.81 Repita el Problema 1.79 si

$$x = 2 + 3 \operatorname{sen} t \text{ pie}$$

$$y = 4 \cos t \text{ pie}$$

1.82 Una cicloide es la curva descrita por un punto (como el P) en el borde de un círculo rodante. En términos del parámetro θ (el ángulo indicado en la figura), las ecuaciones de la cicloide son:

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = a(1 - \cos \theta)$$

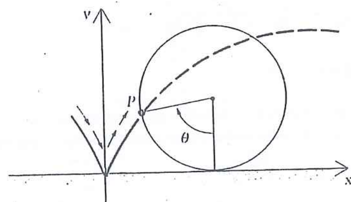


Figura P1.82

Observando que θ cambió en el tiempo, calcule la velocidad (rapidez) de P en $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ radianes, en términos de a y $\dot{\theta}$.

En los Problemas 1.83 al 1.86 un punto P viaja sobre la curva con la componente x de la velocidad, dada por $\dot{x} = 3$ plg/s. En cada caso $x = 1$ cuando $t = 0$. Determine el vector velocidad de P cuando $t = 10$ s en cada caso.

1.83 Curva logarítmica.

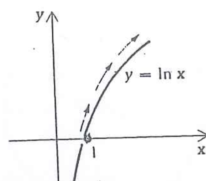


Figura P1.83

1.84 Curva exponencial.

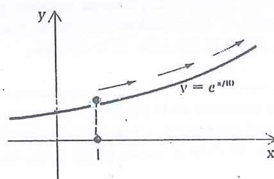


Figura P1.84

1.85 Rama en el primer cuadrante de una hipérbola rectangular.

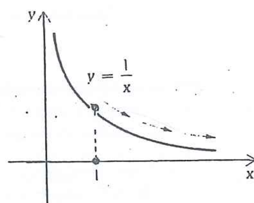


Figura P1.85

1.86 Rama en el primer cuadrante de una parábola semicúbica.

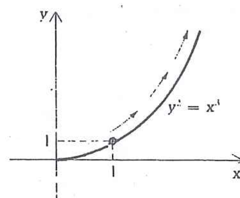


Figura P1.86

1.87-1.90 Encuentre los vectores aceleración en $t = 10$ s de los puntos cuyos movimientos se describen en los Problemas 1.83-1.86.

1.91 Dos puntos P y Q tienen vectores de posición en un marco de referencia dados por $\mathbf{r}_{OP} = 50t\hat{\mathbf{i}}$ (metros) y $\mathbf{r}_{OQ} = 40\hat{\mathbf{i}} - 20t\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre la distancia mínima entre P y Q y el tiempo en que esto ocurre.

1.92 Describa la trayectoria de un punto P que tiene las siguientes coordenadas cartesianas en función del tiempo: $x = a \cos \omega t$, $y = a \operatorname{sen} \omega t$ y $z = bt$, en donde a, b y ω son constantes. Indique el significado de cada constante.

1.93 Para los siguientes valores de las constantes, obtenga la velocidad de P en $t = 5$ s en el problema anterior: $a = 2$ m, $b = 0.5$ m/s y $\omega = 1.2$ rad/s.

1.94 La aceleración de un punto está dada por

$$\mathbf{a}_P = 6t\hat{\mathbf{i}} + 12t^2\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}} \text{ m/s}^2$$

En $t = 0$, las condiciones iniciales son: $\mathbf{v}_P = 2\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $\mathbf{r}_{OP} = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 9\hat{\mathbf{k}}$ metros. Encuentre el vector de posición de P en $t = 5$ s y determine que tan alejado está P de su posición en $t = 0$.

1.95 Un punto se mueve sobre una trayectoria con un vector de posición dado en función del tiempo por $\mathbf{r}_{OP} = \operatorname{sen} 2t\hat{\mathbf{i}} + 3t\hat{\mathbf{j}} + e^{6t}\hat{\mathbf{k}}$, en metros, cuando t está en segundos. Obtenga:

a. La velocidad del punto en $t = 0$.
b. Su aceleración en $t = \pi/2$ s.
c. La componente del vector velocidad, en $t = 0$, que es paralela a la recta ℓ en el plano xy dado por $y = (\frac{5}{12})x - 6$ mostrada en la Fig. P1. 95.

* **1.96** Un auto viaja en un tramo de una carretera que se aproxima en forma a la curva cosenoide de la Fig. P1.96. Si el conductor mantiene una rapidez constante de 55 mi/h, determine las componentes x y y de la velocidad cuando $x = 2500$ pie.

* **1.97** Un auto viaja a lo largo de la carretera del problema anterior con una componente x constante de velocidad igual a 54.9 mi/h. ¿En qué tramo de la carretera excede el conductor la velocidad límite de 55 mi/h?

1.98 Determine la magnitud mínima de la aceleración del auto del Problema 1.96. ¿En qué parte de la curva se experimenta esta aceleración?

1.99 Halle la magnitud máxima de la aceleración del auto del Problema 1.97. ¿En qué parte de la curva ocurre esto?

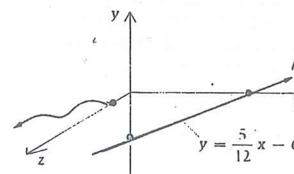


Figura P1.95

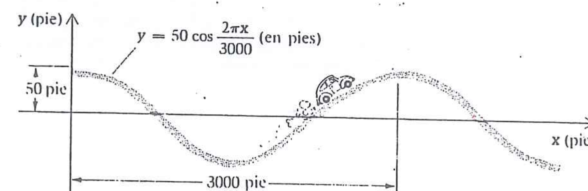


Figura P1.96

1.6 Coordenadas cilíndricas

Si un punto se mueve de tal manera que su proyección sobre el plano xy se describe más fácilmente con coordenadas polares (r y θ) que con x y y, podemos entonces usar *coordenadas cilíndricas* ventajosamente. Estas coordenadas no son otra cosa que *coordenadas polares* r y θ junto con una coordenada "axial" z. Entonces r y θ localizan la proyección de P sobre el plano xy z da la distancia de P desde plano.

Fijando el mismo conjunto de ejes ortogonales (x, y, z) en el marco de referencia $\mathcal{I}$, como hicimos en la sección precedente mostramos ahora también las coordenadas r y θ (Fig. 1.5). Nótese que P' es la proyección de P sobre el plano xy. En la Fig. 1.5 vemos que los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ están en el plano xy y que:

1. La dirección de $\hat{\mathbf{e}}_r$ es la de OP'.
2. $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ es normal a $\hat{\mathbf{e}}_r$ en la dirección de θ creciente.

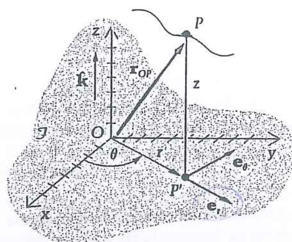


Figura 1.5 Coordenadas cilíndricas de P.

Ayudará luego en la sección notar cuidadosamente ahora que $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ cambian (en dirección) cuando varía θ pero no r o z. Así, si el punto P se mueve a lo largo de una recta radial o una vertical, los dos vectores unitarios permanecen iguales. Pero si P se mueve en forma tal que θ cambia, entonces las direcciones de $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ cambiarán también.

Las coordenadas ortogonales y cilíndricas (ambas tienen la z en común) están relacionadas por

$$x = r\cos\theta \tag{1.29}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

que pueden derivarse, según las ecuaciones (1.24) y (1.25) para obtener fórmulas para la velocidad y la aceleración en términos de las coordenadas cilíndricas (y sus derivadas) y de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$. Sin embargo usualmente es deseable expresar la velocidad y la aceleración en términos del conjunto de vectores unitarios $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{k}})$ que están asociados naturalmente con coordenadas cilíndricas. De modo que es útil expresar un vector de posición $\mathbf{r}_{OP}$ como

$$\mathbf{r}_{OP} = r\hat{\mathbf{e}}_r + z\hat{\mathbf{k}} \tag{1.30}$$

Pregunta 1.3 ¿Por qué no aparece ningún término en $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ en la ecuación (1.30)?

Derivando la ecuación (1.30) obtenemos la velocidad de P:

$$\mathbf{v}_P = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \tag{1.31}$$

Para evaluar $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r$ vemos en la Fig. 1.6 que

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{j}} \tag{1.32a}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}} \tag{1.32b}$$

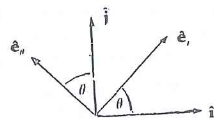


Figura 1.6

Por consiguiente

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r = \dot{\theta}(-\text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}) = \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta \tag{1.33}$$

y entonces la velocidad en coordenadas cilíndricas toma la forma

$$\mathbf{v}_P = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \tag{1.34}$$

Diferenciando otra vez obtenemos

$$\mathbf{a}_P = \ddot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \tag{1.35}$$

Usando las ecuaciones (1.32) encontramos que

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta = \dot{\theta}(-\cos\theta\hat{\mathbf{i}} - \text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{j}}) = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_r \tag{1.36}$$

Entonces la expresión para la aceleración en coordenadas cilíndricas es

$$\mathbf{a}_P = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \tag{1.37}$$

En el caso especial en que el movimiento tiene lugar en un plano definido por z = constante, tenemos $\dot{z} = \ddot{z} = 0$. En este caso necesitamos sólo las coordenadas polares r y θ; las direcciones de $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ se llaman, respectivamente, **radial** y **transversal**.

Pregunta 1.4 Si un punto P se mueve con $z \equiv 0$, entonces $\mathbf{r}_{OP} = r\hat{\mathbf{e}}_r$ y $|\mathbf{r}_{OP}| = r$. ¿Por qué no es entonces $|\mathbf{v}_P| = \dot{r}$?

Antes de entrar a los ejemplos de esta sección, volvemos brevemente al cálculo de las derivadas de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$. Notemos que cada derivada resulta perpendicular al vector que se diriva. Para entender por qué sucede esto, consideremos una deducción alternativa de la fórmula para $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r$. La dependencia del tiempo de $\hat{\mathbf{e}}_r$ se debe a la dependencia del tiempo de la coordenada θ de la cual depende $\hat{\mathbf{e}}_r$ explícitamente; podemos escribir así

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r = \frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{d\theta}\dot{\theta}$$

Estudiemos la derivada $d\hat{\mathbf{e}}_r/d\theta$. Por definición,

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\left[\frac{\hat{\mathbf{e}}_r(\theta + \Delta\theta) - \hat{\mathbf{e}}_r(\theta)}{\Delta\theta}\right] = \lim_{\Delta\theta\to 0}\left(\frac{\Delta\hat{\mathbf{e}}_r}{\Delta\theta}\right)$$

Con ayuda de la Fig. 1.7 vemos que:

1. La dirección de $\Delta\hat{\mathbf{e}}_r$ (y por tanto de $\Delta\hat{\mathbf{e}}_r/\Delta\theta$) se acerca a la de $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ cuando $\Delta\theta$ tiende a cero.
2. La magnitud de $\Delta\hat{\mathbf{e}}_r/\Delta\theta$ es $[2(1)\text{sen}(\Delta\theta/2)]/\Delta\theta$, que se aproxima a la unidad cuando $\Delta\theta$ tiende a cero.

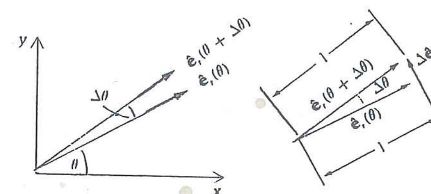


Figura 1.7 Cambio en $\hat{\mathbf{e}}$ al variar θ.

Entonces $d\hat{e}_r/d\theta = \hat{e}_\theta$, y obtenemos $\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$ de acuerdo con la ecuación (1.33). Conviene que el lector esboce una prueba geométrica similar de la ecuación (1.36).

Esta ortogonalidad mutua de un vector y su derivada no está restringida a los vectores unitarios; es, de hecho, una propiedad de todos los vectores de magnitud constante. Podemos demostrar que este es el caso notando que si A es un vector tal, entonces

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 = \text{constante}$$

y por ello

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = 0$$

o bien

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$$

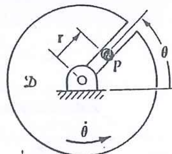
o bien

$$2\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \tag{1.38}$$

Por consiguiente, si no se anula el vector ni su derivada, estas cantidades son mutuamente perpendiculares. Haremos uso de este resultado frecuentemente a lo largo del libro. Presentamos ahora algunos ejemplos de velocidad y aceleración en coordenadas cilíndricas.

Ejemplo 1.14

Un pasador P se mueve hacia afuera respecto a un disco circular horizontal y su coordenada radial r está dada en función del tiempo por $r = 3t^2/2$ m. El disco $\mathcal{D}$ gira de acuerdo con la fórmula $\theta = 4t^2/3$ rad. Encuentre la velocidad y la aceleración de P en $t = 1$ s.



Solución

De la ecuación (1.34),

$$\mathbf{v}_P = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{k}$$

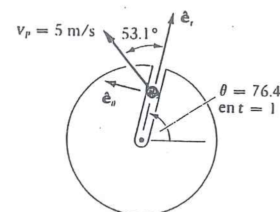
$$= 3t\hat{e}_r + \left(\frac{3}{2}t^2\right)\left(\frac{8}{3}t\right)\hat{e}_\theta + 0$$

$$= 3t\hat{e}_r + 4t^3\hat{e}_\theta \text{ m/s}$$

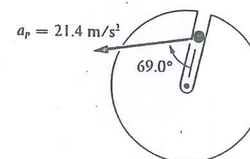
Entonces

$$\mathbf{v}_P|_{t=1} = 3\hat{e}_r + 4\hat{e}_\theta \text{ m/s}$$

y vemos que la velocidad (en magnitud) de P en $t = 1$ s es de 5 m/s.



Velocidad $\mathbf{v}_P$



Aceleración $\mathbf{a}_P$

De la ecuación (1.37) obtenemos

$$\mathbf{a}_P = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta + \ddot{z}\hat{k}$$

$$= \left[3 - \left(\frac{3}{2}t^2\right)\left(\frac{8}{3}t\right)^2\right]\hat{e}_r + \left[\left(\frac{3}{2}t^2\right)\frac{8}{3} + 2(3t)\left(\frac{8}{3}t\right)\right]\hat{e}_\theta + 0$$

$$= \left(3 - \frac{32}{3}t^4\right)\hat{e}_r + 20t^2\hat{e}_\theta$$

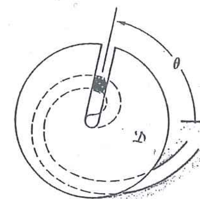
Entonces

$$\mathbf{a}_P|_{t=1} = \frac{-23}{3}\hat{e}_r + 20\hat{e}_\theta \text{ m/s}^2$$

En $t = 1$, tenemos $r = 3/2$ m y $\theta = 4/3$ rad; se muestran estos resultados en los diagramas anexos.

Adviértase que existe un tiempo $t = \sqrt[4]{9/32}$ s, en que $\ddot{r}$ y $-r\dot{\theta}^2$, partes de la componente radial de $\mathbf{a}_P$, se cancelan entre sí, haciendo a esta componente igual a cero en ese instante. Se aconseja al lector calcular y bosquejar $\mathbf{v}_P$ y $\mathbf{a}_P$ en otros instantes, por ejemplo, en $t = 2$s.

Ejemplo 1.15



En el ejemplo precedente, descártese la r y la θ dados. Suponga en vez de ello que $\dot{\theta}_{\mathcal{D}}$ = constante = 0.3 rad/s y que el pasador se desliza no sólo en la ranura del disco $\mathcal{D}$ sino también en la ranura espiral cortada en el marco de referencia y definida por $r = 0.1\,\theta$ metros, con θ en radianes. Determinar la velocidad y la aceleración del pasador cuando $\theta = \pi$ rad.

Solución

De $r = 0.1\,\theta$ obtenemos $\dot{r} = 0.1\,\dot{\theta}$ y $\ddot{r} = 0.1\,\ddot{\theta}$, que es cero ya que $\dot{\theta}$ = constante. Entonces

$$\mathbf{v}_P = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta = 0.1\dot{\theta}\hat{e}_r + 0.1\theta\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

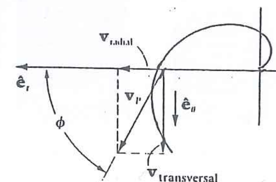
$$= 0.0300\hat{e}_r + 0.0942\hat{e}_\theta \text{ m/s}$$

Para la aceleración se tiene:

$$\mathbf{a}_P = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

$$= (0 - 0.1\theta\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + [0 + 2(0.1\dot{\theta})\dot{\theta}]\hat{e}_\theta$$

$$= -0.0283\hat{e}_r + 0.0180\hat{e}_\theta \text{ m/s}^2$$



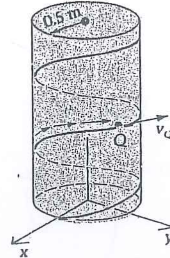
Veremos en la próxima sección que la velocidad es siempre tangente a la trayectoria del punto. El ángulo ϕ entre la trayectoria y el eje $(-x)$ puede encontrarse a partir de las componentes de la velocidad, como se muestra en la figura.

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0.0942}{0.0300}\right) = 72.3°$$

En los próximos ejemplos se tendrá movimiento en la dirección z así como en la radial (r y en la transversal (θ).

Ejemplo 1.16

Un punto Q se mueve sobre una hélice, como se muestra en la figura. El paso de la hélice es de 0.2 m y el punto viaja con rapidez constante de 20 m/s. Determinar la velocidad de Q en términos de sus componentes cilíndricas.



Solución

El *paso* de una hélice es el avance (constante) de Q en la dirección z por cada revolución en θ. Por tanto,

$$\frac{p\theta}{2\pi} = z \tag{1}$$

de modo que

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi\dot{z}}{p} \tag{2}$$

o, para este problema,

$$\dot{\theta} = 31.42\dot{z} \tag{3}$$

Notando que $\dot{r} = 0$ ya que Q viaja sobre un cilindro (con r constante); la ecuación (1.34) da entonces para la velocidad del punto:

$$\mathbf{v}_Q = r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \tag{4}$$

$$= 0.5\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \tag{5}$$

o, usando (3),

$$\mathbf{v}_Q = 15.71\dot{z}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \tag{6}$$

La rapidez de Q es constante e igual a 20 m/s; entonces

$$\sqrt{(15.71\dot{z})^2 + \dot{z}^2} = 20 \tag{7}$$

$$\dot{z} = 1.271 \text{ m/s} \tag{8}$$

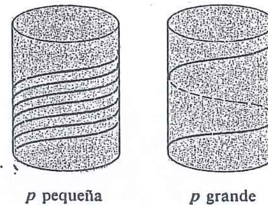
De la ecuación (3) obtenemos

$$\dot{\theta} = 31.42(1.271) = 39.94 \text{ rad/s} \tag{9}$$

Por lo tanto, el vector velocidad de Q es [sustituyendo (9) y (8) en (5)],

$$\mathbf{v}_Q = 19.97\hat{\mathbf{e}}_\theta + 1.271\hat{\mathbf{k}} \text{ m/s} \tag{10}$$

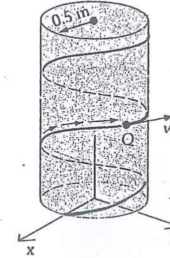
Obsérvese que $|\mathbf{v}_Q| = 20.0$ m/s, como era de esperar. Nótese también que un paso más grande extenderá la hélice (ver la figura). Las ecuaciones de este ejemplo muestran que la componente $\hat{\mathbf{k}}$ resultará más grande que la componente $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ para un mayor p.



p pequeña p grande

Ejemplo 1.17

Determinar la aceleración de Q en el ejemplo anterior.



Solución

De la ecuación (1.37) obtenemos

$$\mathbf{a}_Q = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{e}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

como r es constante en el cilindro esta ecuación se reduce a

$$\mathbf{a}_Q = -r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_r + r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

Más aún, como $|\mathbf{v}_Q|$ es constante, las ecuaciones (8) y (3) del ejemplo anterior muestran que $\dot{z}$ y $\dot{\theta}$ son constantes. Por lo tanto sólo se tiene una componente diferente de cero de la aceleración:

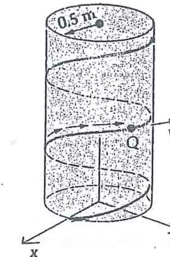
$$\mathbf{a}_Q = -r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_r = -0.5(39.9^2)\hat{\mathbf{e}}_r = -796\hat{\mathbf{e}}_r \text{ m/s}^2$$

Nótese que el punto Q *nunca* tiene componente radial de la velocidad (ver la figura), y *sólo* tiene componente radial de la aceleración.

Ejemplo 1.18

Determinar los vectores velocidad y aceleración del punto Q en el Ejemplo 1.16 si en vez de que la velocidad de Q sea constante, se conoce su posición vertical en función del tiempo:

$$z = 0.08t^3 \text{ m}$$



Solución

De acuerdo con el Ejemplo 1.16 (ver la figura),

$$\dot{\theta} = 31.4\dot{z} = 31.4(0.24t^2)$$

$$= 7.54t^2 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{v}_Q = 0.5(7.54t^2)\hat{\mathbf{e}}_\theta + 0.24t^2\hat{\mathbf{k}}$$

$$= 3.77t^2\hat{\mathbf{e}}_\theta + 0.24t^2\hat{\mathbf{k}} \text{ m/s}$$

Sin embargo, esta vez la velocidad depende del tiempo; por ejemplo en $t = 10$ s,

$$\mathbf{v}_Q|_{t=10} = 377\hat{\mathbf{e}}_\theta + 24.0\hat{\mathbf{k}} \text{ m/s}$$

Para la aceleración, vemos que $\dot{r}$ es aún cero, por lo que

$$\mathbf{a}_Q = -r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_r + r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

Esta vez, los tres términos son diferentes de cero. Tenemos así que

$$\dot{z} = 0.24t^2 \text{ m/s} \qquad \dot{\theta} = 7.54t^2 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{z} = 0.48t \text{ m/s}^2 \qquad \ddot{\theta} = 15.1t \text{ rad/s}^2$$

Entonces

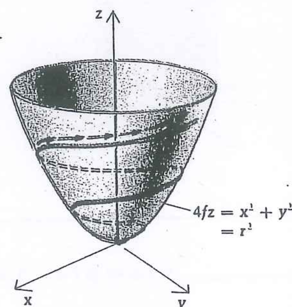
$$\mathbf{a}_Q = -0.5(7.54t^2)^2\hat{\mathbf{e}}_r + 0.5(15.1t)\hat{\mathbf{e}}_\theta + (0.48t)\hat{\mathbf{k}}$$

$$= -28.4t^4\hat{\mathbf{e}}_r + 7.55t\hat{\mathbf{e}}_\theta + 0.48t\hat{\mathbf{k}} \text{ m/s}^2$$

En el ejemplo final de esta sección consideraremos el caso en que además de variar θ y z como en los tres ejemplos precedentes, también varía el radio.

Ejemplo 1.19

Un punto P se mueve describiendo una trayectoria espiral que se enrolla alrededor del paraboloide de revolución mostrado en la figura. La distancia focal f es igual a 1/4 m y el punto avanza 4.0 m verticalmente en cada revolución. Si la velocidad de P es de 0.7 m/s constante, determine la componente vertical del vector velocidad de P en función de r.



Solución

De $z = r^2$ obtenemos

$$\dot{z} = 2r\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{\dot{z}}{2r} \text{ m/s} \quad (1)$$

De la relación para el paso $p\theta/2\pi = z$, obtenemos

$$4.0\dot{\theta} = 2\pi\dot{z} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\pi}{2}\dot{z} \text{ rad/s} \quad (2)$$

Por consiguiente, la rapidez de P puede expresarse como

$$|\mathbf{v}_P| = 0.7 = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\dot{z}}{2r}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}r\dot{z}\right)^2 + \dot{z}^2} \text{ m/s}$$

La respuesta es entonces

$$\dot{z} = \frac{1.4r}{\sqrt{1 + 4r^2 + \pi^2 r^4}} \text{ m/s}$$

Ampliaremos un poco el ejemplo precedente. Podemos ver que $\dot{z}$ varía con el radio r (distancia del eje z a P), que es cero inicialmente y se aproxima a cero nuevamente para valores grandes de r. Su máximo puede determinarse con ayuda del Cálculo:

$$\frac{d\dot{z}}{dr} = 0$$

o bien

$$0 = \frac{\sqrt{1 + 4r^2 + \pi^2 r^4}\,\dfrac{d(1.4r)}{dr} - 1.4r\,\dfrac{d\sqrt{1 + 4r^2 + \pi^2 r^4}}{dr}}{(\sqrt{1 + 4r^2 + \pi^2 r^4})^2}$$

De esto se obtiene

$$\pi^2 r^4 = 1 \Rightarrow r = 0.56 \text{ m}$$

en donde

$$\dot{z}_{max} = 0.44 \text{ m/s}$$

Nótese en la ecuación (2) del ejemplo que en este valor de $\dot{z}$,

$$\dot{\theta} = 0.69 \text{ rad/s}$$

De la ecuación (1), vemos que en el mismo instante

$$\dot{r} = \frac{\dot{z}}{2r} = 0.39 \text{ m/s}$$

y por lo tanto, cuando $\dot{z}$ es máximo, la rapidez (o magnitud de la velocidad) es

$$|\mathbf{v}_P| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

$$= \sqrt{0.39^2 + (0.56 \times 0.69)^2 + 0.44^2} = 0.70 \text{ m/s}$$

como debe ser, ya que no cambia con el tiempo.

Pregunta 1.5 ¿Cuál es la magnitud máxima de la componente radial de $\mathbf{v}_P$?

Problemas / Sección 1.6

1.100 El avión en la Fig. P1.100 viaja con rapidez y altitud constante. El radar detecta al avión y calcula la distancia D, el ángulo θ y la rapidez de variación de cambio de θ (o sea $\dot{\theta}$) en todo momento. En términos de θ y $\dot{\theta}$, encuentre la rapidez del avión.

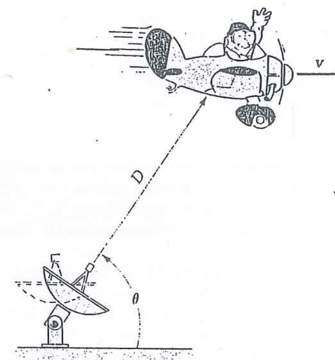


Figura P1.100

1.101 Una bala de acero se mueve radialmente hacia afuera en una ranura de un disco horizontal que gira alrededor del eje z vertical. En el instante mostrado en la Fig. P1.101, la bola está a 3 plg del centro del disco y se mueve radialmente hacia afuera con una velocidad de 4 plg/s respecto al disco, y con una aceleración radial también respecto al disco de 5 plg/s^2 hacia el exterior. ¿Qué valores de $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ debería tener la bola en el instante mostrado para que su aceleración total fuese cero?

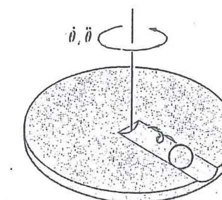


Figura P1.101

1.102 El disco mostrado en la Fig. P1.102 es horizontal y gira según la fórmula $\dot{\theta} = ct$ alrededor de la vertical. Ciertas fuerzas obligan a la canica a moverse en una ranura tal que

su distancia radial desde el centro es igual a kt_2; c y k son constantes.

a. Encuentre la aceleración de la canica.
b. ¿En qué tiempo desaparece la aceleración radial?

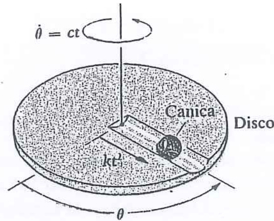


Figura P1.102

1.103 Una partícula se mueve sobre una curva llamada lemniscato de Bernoulli, definida por la ecuación $r^2 = 2 \cos 2\theta$, (en pie^2); se mueve a lo largo de la rama señalada con flechas y pasa por P en $t = 0$. El ángulo θ crece con el tiempo según la fórmula $\theta = 3t^2 + 2t$ rad, con t en segundos. En el punto P, halle la velocidad y la aceleración de la partícula.

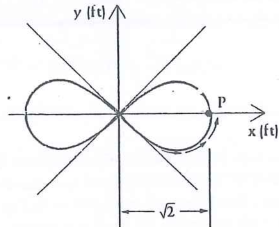


Figura P1.103

* **1.104** Un punto P se mueve sobre la espiral de Arquímedes con rapidez constante de 2 m/s (Fig. P1.104). La ecuación de la espiral es $r = 3\theta$. Encuentre la aceleración de P cuando $\theta = 270°$.

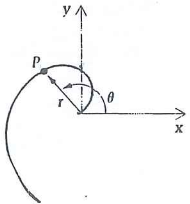


Figura P1.104

1.105 La cardioide tiene la ecuación $r = a(1 + \cos\theta)$. El punto P viaja sobre esta curva en la dirección indicada, en forma tal que $\dot{\theta} = K$ = constante. En función de K y a encuentre la velocidad de P en los cuatro puntos en que la trayectoria corta a los ejes coordenados. Exprese el resultado en términos de las componentes radial y transversal y luego conviértalo a componentes ortogonales expresando $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ en términos de $\hat{i}$ y $\hat{j}$ en cada posición.

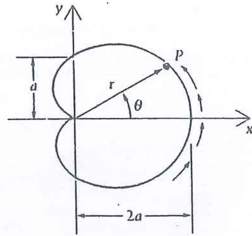


Figura P1.105

1.106 En el problema anterior calcule la aceleración de P en los mismos cuatro puntos. Igual que antes, resuelva el problema primero con componentes $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$ y luego convierta el resultado a componentes $(\hat{i}, \hat{j})$.

1.107 Un punto P parte del origen y se mueve a lo largo de la parábola mostrada en la figura con una componente x de la velocidad constante igual a $\dot{x} = 3$ pie/s. Usando el siguiente procedimiento, encuentre las componentes radial y transversal de la velocidad y aceleración de P en el punto $(x, y) = (1, 1)$. Encuentre $\mathbf{v}_P$ y $\mathbf{a}_P$ en componentes ortogonales (ver el Problema 1.71); luego resuelva esos vectores a lo largo de $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\theta$ para obtener las componentes radial y transversal.

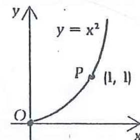


Figura P1.107

1.108 Resuelva el problema anterior por un camino diferente. Partiendo de las relaciones polares $r = \sqrt{x_2 + y_2}$ y $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ y derive para obtener $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$; luego sustituya estos valores en las ecuaciones (1.34) y (1.37).

1.109 La rosa de cuatro folios de la Fig. 1.109 tiene la ecuación $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$ (en pies). Una partícula P parte del origen y viaja sobre la trayectoria indicada con $\dot{\theta} = 1/6$ rad/s = constante. Cuando P se encuentra en el punto más alto en el primer cuadrante, encuentre:

a. La velocidad (rapidez) de P
b. La aceleración de P

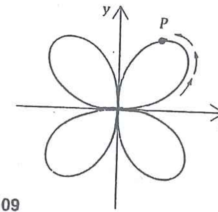


Figura P1.109

* **1.110** El punto P en la Fig. P1.110 se mueve sobre el caracol (o limazón) definido en coordenadas polares por

$$r = 5 - 3 \cos\theta \text{ (en metros)}$$

Si el ángulo polar está definido por $\theta = 10t^2$ rad, encuentre la velocidad de P cuando éste se encuentra en su punto más alto.

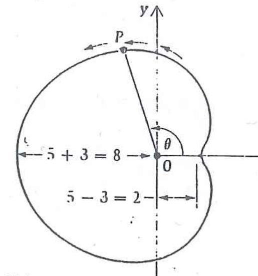


Figura P1.110

1.111 En el problema anterior, determine la aceleración de P en (a) el mismo punto más alto y (b) en $\theta = \pi$ rad.

* **1.112** Un punto P se mueve sobre la figura en forma de ocho en la dirección indicada (Fig. P1.112) con rapidez constante de 2 m/s. Encuentre el vector aceleración de P en el instante siguiente en que su velocidad es horizontal.

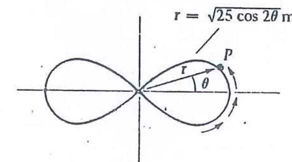


Figura P1.112

* **1.113** Un insecto está dormido sobre un disco de 33 1/3 rpm a 6 plg del eje de rotación. Cuando el disco se pone en movimiento el insecto despierta y empieza a caminar en línea recta respecto al disco hacia el centro con velocidad de 1 plg/s (Fig. P1.113). Si el insecto puede resistir una aceleración máxima de 100 plg/s^2, ¿llegará al centro si (a) comienza a moverse después de que el disco alcanza su velocidad normal, y (b) comienza a moverse tan pronto como el disco se pone en movimiento? Suponga que la tornamesa acelera linealmente (en el tiempo) hasta alcanzar su velocidad normal en una revolución y que $\ddot{r} = -\frac{1}{4}$ plg/s^2 hasta $\dot{r} = -1$ plg/s.

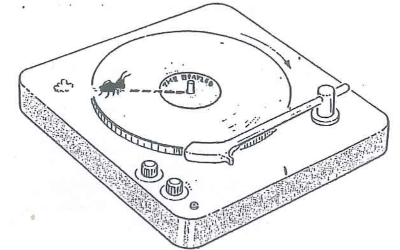


Figura P1.113

1.114 David lanza una piedra a Goliat con una honda; ésta gira una revolución más 136° y en esa posición la piedra sale despedida con una rapidez de 50 pie/s (Fig. P1.114). Al girar la honda la velocidad angular de la piedra crece lineal-

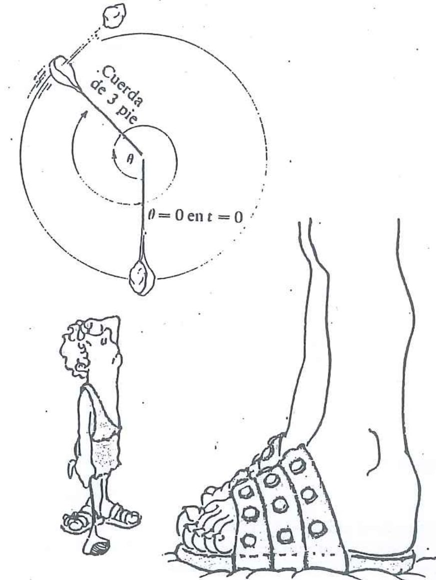


Figura P1.114

mente con el tiempo t, o sea $\dot{\theta} = kt$, en donde k es una constante. Encuentre la aceleración de la piedra en el instante anterior a su liberación.

1.115 En el Problema 1.60 demuestre que la velocidad de los ladrillos puede obtenerse tomando simplemente la componente de la velocidad de la unión con el parachoques, punto A, *a lo largo de la cuerda*. Usando las expresiones en coordenadas cilíndricas para la velocidad, explique por qué funciona este procedimiento.

1.116 Dos personas que se mueven a 2.5 pie/s hacia la derecha tiran de una cuerda para arrastrar una caja $\mathcal{B}$ sobre el suelo en el nivel inferior (Fig. P1.116). Determine la rapidez de $\mathcal{B}$ en función del ángulo θ entre la cuerda y la vertical.

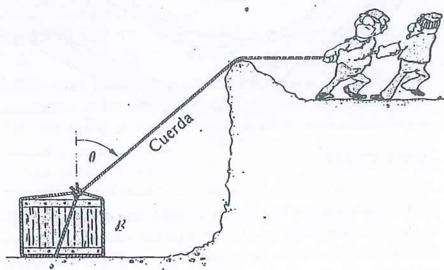


Figura P1.116

1.117 La barra rígida $\mathcal{R}$ en la Fig. P1.117 se mueve de manera que sus extremos A y B permanecen en contacto con las superficies. Si en el instante mostrado, la velocidad de A es de 0.5 pie/s hacia la derecha, calcule la velocidad de B:

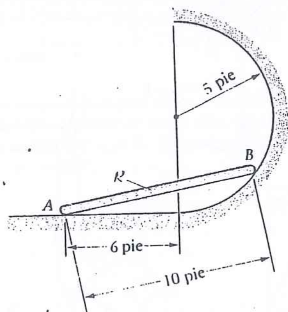


Figura P1.117

1.118 En el problema 1.117 determine la aceleración de B en el instante mostrado si la aceleración de A es de 1.0 pie/s^2 hacia la izquierda en el mismo instante.

1.119 Una hormiga viaja hacia arriba por el pasamanos de una escalera en espiral (Fig. P1.119), de acuerdo con

$$\mathbf{r}_{OA} = 2\cos\frac{t}{50}\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\mathrm{sen}\frac{t}{50}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{t}{50}\,\hat{\mathbf{k}}\ \mathrm{m}$$

Encuentre la posición y la velocidad de la hormiga cuando $t = 30$ s.

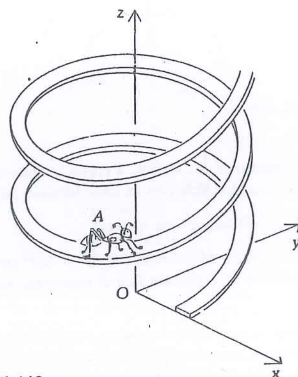


Figura P1.119

1.120 Encuentre la aceleración de la hormiga (en $t = 30$ s) en el problema anterior.

1.121 Un punto P parte del origen en $t = 0$ y se mueve en una trayectoria sobre el paraboloide de revolución mostrado en la Fig. P1.121. La trayectoria está descrita (con parámetro t) por

$$r = k_1 t$$

$$\theta = k_2 t^2$$

Determine los vectores de posición, velocidad y aceleración del punto cuando este alcanza el borde superior del paraboloide. (H, R, k_1 y k_2 son constantes.)

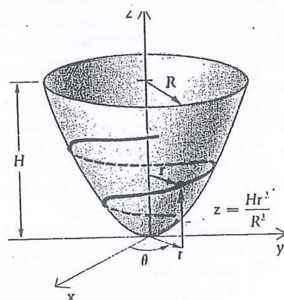


Figura P1.121

1.122 Una cuenta B se desliza hacia abajo y alrededor de una superficie cilíndrica sobre un alambre helicoidal (Fig. P1.122). El paso p de la hélice es igual a la magnitud del descenso vertical de la cuenta por cada cambio en θ de 2π; R es el radio de la hélice.

a. Observando que θ (y por consiguiente también z) es una función del tiempo, escriba las ecuaciones para $\mathbf{r}_{OB}$, $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{a}_B$ en coordenadas cilíndricas.
b. Para los valores $R = 0.3$ m, $p = 0.2$ m y $\theta = 0.6t$ rad/s, evalue y bosqueje los vectores velocidad y aceleración de B cuando $t = 10$ s.

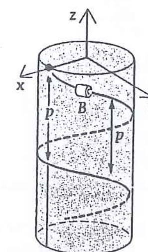


Figura P1.122

1.123 La montaña mostrada en la Fig. P1.123 tiene el perfil del paraboloide de revolución $H - z = kr_2$, en donde H = altura = 5000 pie, r es el radio en z y k es una constante. El radio de la base es también de 5000 pie. Un auto viaja hacia arriba de la montaña sobre una trayectoria en espiral. En cada vuelta el auto asciende 1000 pie. El auto viaja con *rapidez constante* de 60 mi/h. Calcule los valores máximos y mínimos absolutos de la componente radial de la velocidad durante el viaje e indique dónde se encuentra el auto en esos dos instantes.

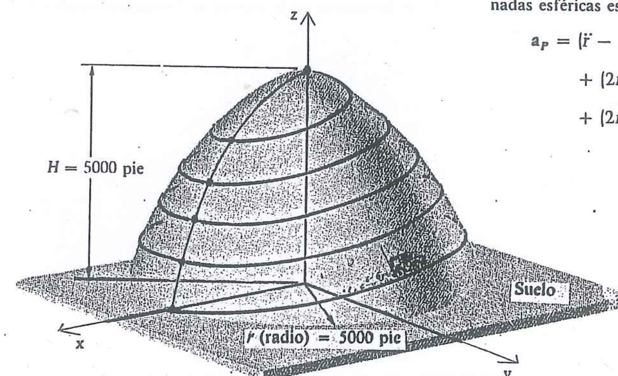


Figura P1.123

* **1.124** En el problema anterior, encuentre las posiciones del auto (r, θ, z) para las cuales las siguientes componentes de la velocidad son iguales:

a. Radial ($\dot{r}$) y transversal ($r\dot{\theta}$)
b. Radial y vertical ($\dot{z}$)
c. Transversal y vertical

* **1.125** Demuestre que la velocidad de un punto P en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) está dada por

$$\mathbf{v}_P = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\phi$$

Ver la Fig. P1.125. *Sugerencia*: Como pasos intermedios, obtenga los resultados

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r = \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_r + \dot{\phi}\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\phi = -\dot{\phi}(\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta)$$

Luego derive el simple vector de posición $\mathbf{r}_{OP} = r\hat{\mathbf{e}}_r$.

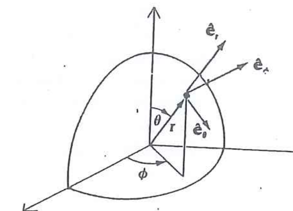


Figura P1.125

1.126 Demuestre derivando $\mathbf{v}_2$ en el problema anterior que la expresión correspondiente para la aceleración en coordenadas esféricas es

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_P = {} & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)\hat{\mathbf{e}}_r \\ & + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta \\ & + (2\dot{r}\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{\mathbf{e}}_\phi\end{aligned}$$

* **1.127** La velocidad de un punto P que se mueve en un plano es la resultante de una parte, $v\hat{\mathbf{e}}_r$, a lo largo del radio desde un punto fijo O al punto P, y de otra parte $u\hat{\mathbf{i}}$, que es siempre paralela a una recta fija (Fig. P1.127). Demuestre que la aceleración de P puede escribirse como $a_v\hat{\mathbf{e}}_r + a_u\hat{\mathbf{i}}$, en donde

$$a_v = \frac{dv}{dt} - \frac{uv}{r}\cos\theta \quad \text{y} \quad a_u = \frac{du}{dt} + \frac{uv}{r}$$

en donde r es la longitud del radio vector de O a P y θ es el ángulo formado con la dirección fija.

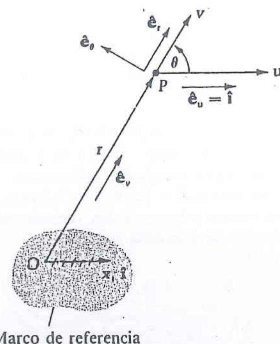


Figura P1.127

1.7 Componentes tangencial y normal

En esta sección examinaremos otra manera más de expresar la velocidad y la aceleración de un punto P. En vez de centrarnos en un sistema específico de coordenadas, estudiaremos ahora la manera en que el movimiento de P está relacionado con su trayectoria. Por ello, las componentes de velocidad y aceleración que resultan se llaman a veces *intrínsecas* o *naturales*.

La trayectoria de un punto P, como se mencionó en la sección 1.3, es el lugar geométrico de puntos del marco de referencia $\mathcal{F}$ ocupados sucesivamente por P durante su movimiento. Comenzamos entonces definiendo algún punto de referencia sobre la trayectoria. Desde este origen se mide la longitud de arco s a lo largo de la trayectoria hasta el punto P. Es claro que la coordenada longitud de arco depende del tiempo, o sea $s = s(t)$.

En la Fig. 1.8 vemos un vector de posición, $\mathbf{r}_{OP}$, para el punto P. Este vector, como se dijo en secciones anteriores, define la localización de P y por tanto puede considerarse función de la longitud de arco s:

$$\mathbf{r}_{OP} = \mathbf{r}_{OP}(s) = \mathbf{r}_{OP}[s(t)] \tag{1.39}$$

Derivando para obtener la velocidad de P (la definición es la misma independientemente de como representemos los vectores), resulta

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_{OP} = \frac{d\mathbf{r}_{OP}}{dt}.$$

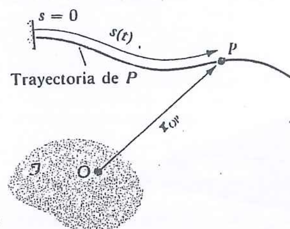


Figura 1.8 Longitud del recorrido de P en su trayectoria.

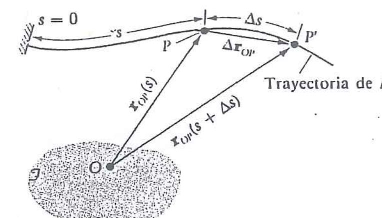


Figura 1.9 Cambios en $\mathbf{r}_{OP}$ al variar s.

y por la regla de la cadena,

$$\mathbf{v}_P = \frac{d\mathbf{r}_{OP}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$= \dot{s}\lim_{\Delta s\to 0}\left[\frac{\mathbf{r}_{OP}(s+\Delta s) - \mathbf{r}_{OP}(s)}{\Delta s}\right]$$

$$= \dot{s}\lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\Delta\mathbf{r}_{OP}}{\Delta s}\right) \tag{1.40}$$

La Fig. 1.9 muestra las cantidades $\Delta\mathbf{r}_{OP}$ y Δs.

Sugerimos que el lector esboce un arco sobre una hoja grande de papel y luego use una regla para dibujar el triángulo OOP' (Fig. 1.10). Luego el límite en la ecuación (1.40) puede tomarse, por ejemplo, dividiendo Δs a la mitad cada vez. Después de unas pocas divisiones de Δs sobre la hoja, será claro que al tender Δs a cero, esto es al acercarse P' a P, ocurren dos cosas muy interesantes.

1. $\Delta\mathbf{r}_{OP}$ se vuelve tangente a la trayectoria de P en la longitud de arco s.
2. La magnitud de $\Delta\mathbf{r}_{OP}/\Delta s$ tiende a $\Delta s/\Delta s = 1$.

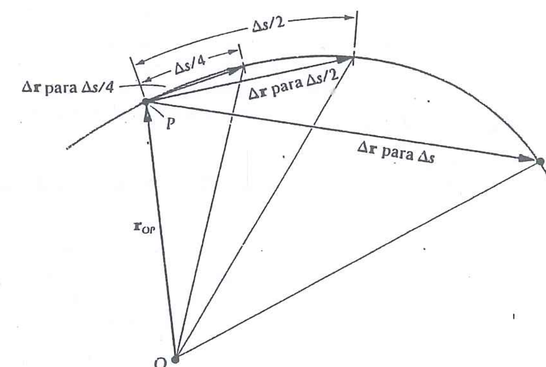


Figura 1.10 Contracción de Δs hacia cero.

Estos dos resultados tomados en conjunto muestran que $d\mathbf{r}_{OP}/ds$ es siempre un vector unitario tangente a la trayectoria y que apunta en la dirección de s creciente. Es por ello que este vector se denomina $\hat{\mathbf{e}}_t$, el **vector tangente unitario**. La ecuación (1.40) puede ser entonces escrita como

$$\mathbf{v}_P = \dot{s}\hat{\mathbf{e}}_t \tag{1.41}$$

De la ecuación (1.41) vemos que el vector velocidad del punto P es *siempre tangente a su trayectoria*. El valor absoluto $|\dot{s}|$ de la parte escalar, que es la magnitud $|\mathbf{v}_P|$ del vector velocidad $\mathbf{v}_P$, se llama velocidad (o rapidez) de P en $\mathcal{J}$, como lo mencionamos en la sección 1.3.

Ahora derivamos nuevamente para obtener la aceleración de P. Usando la ecuación (1.41) obtenemos

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \ddot{s}\hat{\mathbf{e}}_t + \dot{s}\frac{d\hat{\mathbf{e}}_t}{dt}$$

$$= \ddot{s}\hat{\mathbf{e}}_t + \dot{s}^2\frac{d\hat{\mathbf{e}}_t}{ds} \tag{1.42}$$

Como $\hat{\mathbf{e}}_t$ es un vector unitario, $d\hat{\mathbf{e}}_t/ds$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{e}}_t$ y por consiguiente perpendicular a la trayectoria. La ecuación (1.42) muestra una separación importante de la aceleración en dos partes, una tangente y la otra normal a la trayectoria de P. La componente tangente a la trayectoria, $\ddot{s}$, es (para $\dot{s} > 0$) la rapidez de variación de la *magnitud* del vector velocidad de P. La componente normal a la trayectoria refleja la rapidez de variación de la *dirección* del vector velocidad.

Un análisis más amplio de $d\hat{\mathbf{e}}_t/ds$ en la ecuación (1.42) se facilita si restringimos primero la atención al caso de una curva bidimensional (plana). Para tal fin, sea θ la inclinación de una tangente a la curva plana, como se muestra en la Fig. 1.11. Podemos imaginar que al crecer s, $\hat{\mathbf{e}}_t$ gira de manera que $d\hat{\mathbf{e}}_t/ds$ apunta hacia el interior de la curva, o sea en la dirección de $\hat{\mathbf{e}}_n$ mostrada en la figura. Podemos obtener este resultado analíticamente escribiendo

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_t}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\frac{d\hat{\mathbf{e}}_t}{d\theta} \tag{1.43}$$

En la Fig. 1.11 vemos que

$$\hat{\mathbf{e}}_t = \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{j}}$$

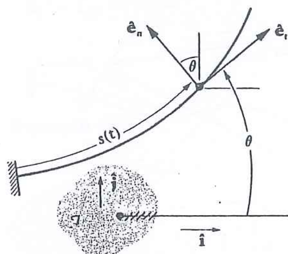


Figura 1,11 Vectores unitarios tangente y normal a una curva plana.

Derivando obtenemos

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_t}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}$$

que es un vector unitario normal a la curva. Si $d\theta/ds$ es positivo, como se ilustra en la Fig. 1.11 entonces $d\hat{\mathbf{e}}_t/d\theta = \hat{\mathbf{e}}_n$. Si $d\theta/ds$ es negativo (curva cóncava hacia abajo), entonces $d\hat{\mathbf{e}}_t/d\theta = -\hat{\mathbf{e}}_n$, o sea $d\hat{\mathbf{e}}_t/d\theta$ apunta hacia el exterior de la curva, como puede verificarse facilmente dibujando un croquis. En ambos casos,

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_t}{ds} = \left|\frac{d\theta}{ds}\right|\hat{\mathbf{e}}_n \tag{1.44}$$

El lector recordará probablemente de su estudio del Cálculo Diferencial que $|d\theta/ds|$ es la **curvatura** de una curva plana. El recíproco de la curvatura es el **radio de curvatura** ρ. El radio de curvatura es el radio del círculo que proporciona la mejor aproximación local para un segmento infinitesimal de la curva. La ecuación (1.43) puede entonces expresarse como,

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n \tag{1.45}$$

En tres dimensiones es más difícil visualizar esta situación. No podemos usar el desarrollo anterior porque $\hat{\mathbf{e}}_t$ no puede expresarse en función de un simple ángulo como θ. En consecuencia, en el caso general adoptamos una definición de la curvatura que, en dos dimensiones, se reduce a la que hemos ya establecido. Esto es, se define simplemente la curvatura $1/\rho$ como la magnitud del vector $d\hat{\mathbf{e}}_t/ds$.

El vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_n$ definido como

$$\hat{\mathbf{e}}_n = \frac{1}{|d\hat{\mathbf{e}}_t/ds|}\frac{d\hat{\mathbf{e}}_t}{ds} = \rho\frac{d\hat{\mathbf{e}}_t}{ds} \tag{1.46}$$

se denomina **vector normal unitario principal** de la curva. Sustituyendo en la ecuación (1.42),

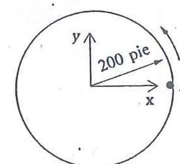
$$\mathbf{a}_P = \ddot{s}\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{(\dot{s})^2}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n \tag{1.47}$$

Una forma alternativa en la que el parámetro s no está explícitamente implicado se obtiene si escogemos a s de modo que en el instante de interés $\dot{s} > 0$. Por tanto, $\dot{s} = |\mathbf{v}_P|$ y

$$\mathbf{a}_P = \left(\frac{d}{dt}|\mathbf{v}_P|\right)\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{|\mathbf{v}_P|^2}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n \tag{1.48}$$

En esta expresión se ve muy claramente la descomposición natural de la aceleración en partes relacionadas con la rapidez de variación de la magnitud de la velocidad y con la rapidez de variación de la dirección de la velocidad. Veremos ahora algunos ejemplos del uso de las componentes tangencial y normal.

Ejemplo 1.20



Un automóvil parte de A e incrementa su rapidez alrededor de la pista a razón de 6 pie/s² viajando en sentido antihorario. Determinar la posición y el tiempo en que la magnitud de la aceleración del vehículo alcanza el valor de 20 pie/s².

Solución

$$\ddot{s} = 6 \text{ pie/s}^2$$

$$\dot{s} = 6t + \cancel{C_1}^{\,0} \text{ pie/s (La constante es cero puesto que } \dot{s} = 0 \text{ en } t = 0.)$$

$$s = 3t^2 + \cancel{C_2}^{\,0} \text{ pie (La constante es cero puesto que } s = 0 \text{ } s = 0 \text{ en } t = 0.)$$

La magnitud de la aceleración de Q es

$$|a_Q| = a_Q = \sqrt{\ddot{s}^2 + (\dot{s}^2/\rho)^2}$$

$$= \sqrt{36 + (36t^2/200)^2} \text{ pie/s}^2$$

Cuando $a_Q = 20$ pie/s² obtenemos la ecuación

$$20^2 = 36 + (0.18t^2)^2 = 36 + 0.0324t^4$$

$$t = \sqrt[4]{\frac{364}{0.0324}} = 10.3 \text{ s}$$

En $t = 10.3$ s, $s = 318$ pie, lo cual representa $318\ (2\pi r) = 0.253$ de revolución, o sea 91.1° en sentido antihorario desde el eje x.

Ejemplo 1.21

Verificar los resultados del Ejemplo 1.13 en $x = 2$ m, usando las componentes $\hat{e}_t$ y $\hat{e}_n$.

Solución

Se sabe que $\dot{s} = |\mathbf{v}_P| = 0.2$ m/s. Como $\mathbf{v}_P$ es tangente a la trayectoria de P podemos calcular $\hat{e}_t$:

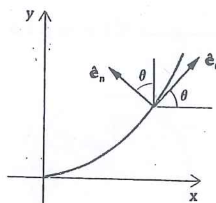
$$y = \frac{x^2}{4f} = \frac{x^2}{2} \text{ para } f = \tfrac{1}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = x = 2 \qquad \text{(en el punto dado)}$$

$$\theta = \tan^{-1}(2) = 63.4°$$

$$\hat{e}_t = \cos\theta\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}$$

$$= 0.448\hat{\imath} + 0.894\hat{\jmath}$$

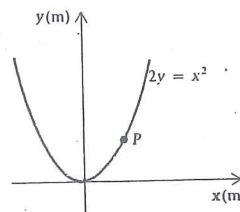


El radio de curvatura es

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}\right| = \left|\frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\right| = \frac{1}{5^{3/2}}$$

o bien

$$\rho = 11.2 \text{ m}$$



Con $\hat{e}_n = -\operatorname{sen}\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}$ tenemos

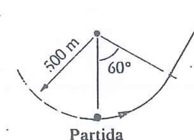
$$\mathbf{a}_P = \ddot{s}\hat{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{e}_n$$

$$= 0 + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{e}_n \qquad \text{(ya que } \dot{s} \text{ es constante)}$$

$$= \frac{0.04}{11.2}(-0.894\hat{\imath} + 0.448\hat{\jmath})$$

$$= -0.0032\hat{\imath} + 0.0016\hat{\jmath} \text{ m/s}^2 \qquad \text{(igual que antes)}$$

Ejemplo 1.22



Partida

Después de recoger pasajeros, un tren acelera uniformemente hasta que su rapidez es de 100 km/h en $t = 300$ s. Si durante este tiempo el tren viaje sobre una trayectoria plana aproximadamente dada por la circunferencia y la recta mostradas en la figura, encuentre la magnitud de la aceleración del tren cuando (a) $t = 1$ min y (b) $t = 2$ min.

Solución

Primero determinamos la componente tangencial de la aceleración del tren*:

$$\ddot{s} = \text{constante} = k \qquad \text{(Esto es lo que significa } \textit{uniforme}.)$$

$$\dot{s} = kt + C_1 = kt \qquad \text{(ya que } \dot{s} = 0 \text{ en } t = 0)$$

$$s = \frac{kt^2}{2} + C_2 = \frac{kt^2}{2} \qquad \text{(pues } s = 0 \text{ en } t = 0)$$

En $t = 300$ s,

$$\dot{s} = 100\frac{\text{km}}{\text{hr}}\,\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\,\frac{1 \text{ hr}}{3600 \text{ s}} = 27.8 \text{ m/s}$$

Por tanto,

$$k = \frac{27.8}{300} = 0.0927 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo este valor de la aceleración, obtenemos la rapidez y la posición del tren en $t = 1$ min:

$$\dot{s} = kt = (0.0927)(60) = 5.56 \text{ m/s}$$

y

$$s = 0.0927\,\frac{60^2}{2} = 167 \text{ m}$$

Nótese que $2\pi r = 2\pi\,(500) = 3140$ m, de modo que el tren ha recorrido sólo $(167/3140)360 = 19.1°$ del tramo circular y no ha al-

*En este ejemplo el tren se considera como una partícula.

canzado aún la parte recta de su trayectoria cuando $t = 60$ s. Por lo tanto,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\ddot{s}^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(0.0927)^2 + \frac{5.56^4}{500^2}} \text{ m/s}^2$$

$$= 0.111 \text{ m/s}^2 \text{ en } t = 60 \text{ s}$$

En $t = 2$ min $= 120$ s, la longitud de arco recorrida por el tren es

$$s = \frac{kt^2}{2} = \frac{0.0927(120^2)}{2} = 667 \text{ m}$$

que corresponde a un ángulo de (667/3140)360 = 76.5°. Como el tren entra a la parte recta de la trayectoria cuando $\theta = 60°$, la aceleración en $t = 120$ s *no* tiene componente normal y

$$|\mathbf{a}| = \ddot{s} = 0.0927 \text{ m/s}^2 \text{ en } t = 120 \text{ s}$$

Ejemplo 1.23

En el Ejemplo 1.11 hallar para el punto P en $t = 1$ s: componentes tangencial y normal de la aceleración, radio de curvatura y vector normal principal.

Solución

Se sabe que

$$\mathbf{r}_{OP} = 2t\hat{\imath} + t^3\hat{\jmath} + 3t^2\hat{k} \text{ pie}$$

$$\mathbf{v}_P = 2\hat{\imath} + 3t^2\hat{\jmath} + 6t\hat{k} \text{ pie/s}$$

$$\mathbf{a}_P = 6t\hat{\jmath} + 6\hat{k} \text{ pie/s}^2$$

Si escribimos la velocidad $\mathbf{v}_P$ como una magnitud multiplicada por un vector unitario, podemos determinar $\dot{s}$ y $\hat{e}_t$ para P:

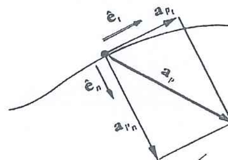
$$\mathbf{v}_P = \sqrt{4 + 9t^4 + 36t^2}\left(\frac{2\hat{\imath} + 3t^2\hat{\jmath} + 6t\hat{k}}{\sqrt{4 + 9t^4 + 36t^2}}\right) \text{ pie/s}$$

$$= \dot{s}\hat{e}_t$$

en donde notamos que $\dot{s} > 0$, ya que estamos escogiendo el sentido de s creciente para el de la velocidad.

Encontramos las componentes tangencial y normal de la aceleración de P en $t = 1$ s:

$$\mathbf{v}_P|_{t=1} = 7\left(\frac{2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}}{7}\right) = |\mathbf{v}_P|\hat{e}_t \text{ pie/s}$$



Ahora que tenemos $\hat{e}_t$, puede servir para separar la aceleración $\mathbf{a}_P = 6\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ pie/s² (en $t = 1$) en sus componentes tangencial y normal (ver la figura). La componente tangencial de $\mathbf{a}_P$ (o sea la componente paralela a $\hat{e}_t$) es, de acuerdo con la figura, el producto escalar de $\mathbf{a}_P$ y $\hat{e}_t$:

$$a_{P_t}|_{t=1} = \mathbf{a}_P|_{t=1} \cdot \hat{e}_t|_{t=1}$$

$$= 6\sqrt{2}\left(\frac{\hat{\jmath} + \hat{k}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}}{7}\right)$$

$$= \frac{6}{7}(3 + 6) = \frac{54}{7} \text{ pie/s}^2$$

Luego obtenemos la componente normal de la aceleración restando vectorialmente la componente $\mathbf{a}_{P_t}$ ($= (54/7)\hat{e}_t$) de la aceleración total $\mathbf{a}_P$. O sea, como

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P_t} + \mathbf{a}_{P_n}$$

obtenemos

$$a_{P_n}|_{t=1} = |\mathbf{a}_{P_n}|\Big|_{t=1} = \left|\mathbf{a}_P|_{t=1} - \mathbf{a}_{P_t}|_{t=1}\right|$$

$$= \left|6\hat{\jmath} + 6\hat{k} - \frac{54}{7}\left(\frac{2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}}{7}\right)\right| \text{ pie/s}^2$$

$$= \left|\frac{-108\hat{\imath} + 132\hat{\jmath} - 30\hat{k}}{49}\right| = 3.53 \text{ pie/s}^2$$

Como $a_{P_n} = \dot{s}^2/\rho = |\mathbf{v}_P|^2/\rho$, el radio de curvatura es:

$$\rho = \frac{7^2}{3.53} = 13.9 \text{ pie}$$

El vector unitario $\hat{e}_n$ se obtiene de:

$$\hat{e}_n = \frac{\mathbf{a}_{P_n}}{a_{P_n}} = \frac{\mathbf{a}_P - \mathbf{a}_t}{a_{P_n}} = \frac{-108\hat{\imath} + 132\hat{\jmath} - 30\hat{k}}{49(3.53)}$$

$$= -0.624\hat{\imath} + 0.763\hat{\jmath} - 0.173\hat{k}$$

Es instructivo calcular directamente $d\,|\mathbf{v}_P|\,/dt$ ya que en este caso conocemos $|\mathbf{v}_P|$ en función del tiempo:

$$|\mathbf{v}_P| = \sqrt{4 + 9t^4 + 36t^2} \text{ pie/s};$$

$$\frac{d|\mathbf{v}_P|}{dt} = \frac{\frac{1}{2}(36t^3 + 72t)}{\sqrt{4 + 9t^4 + 36t^2}} \text{ pie/s}^2$$

Entonces

$$\frac{d|\mathbf{v}_P|}{dt}\Big|_{t=1} = \frac{\frac{1}{2}(108)}{\sqrt{49}} = \frac{54}{7} \text{ pie/s}^2$$

que es por supuesto el resultado que ya obtuvimos al analizar las componentes del vector aceleración.

Pregunta 1.6 ¿Cómo encontraría usted el vector de posición del origen O al centro de curvatura en $t = 1$ s?

Los componentes tangencial y normal de la velocidad y aceleración serán muy útiles más tarde cuando se conozca la trayectoria de un punto (por ejemplo, el centro C de una rueda que tiene rodamiento sobre una vía curva). Podemos usar entonces las ecuaciones (1.4) y (1.7) para expresar $\mathbf{v}_P$ y $\mathbf{a}_P$.

Problemas / Sección 1.7

1.128 La partícula P se mueve sobre una circunferencia (Fig. P1.128) según la función del tiempo indicada. Encuentre los tiempos t y ángulos θ en que las componentes tangencial y normal de la aceleración son iguales.

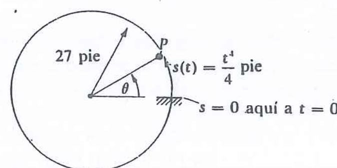


Figura P1.128

1.129 En el Ejemplo 1.22 calcule la distancia que el tren ha recorrido sobre la porción recta de su trayectoria cuando su rapidez es de 100 km/h.

1.130 El punto de la Fig. P1.130 se mueve en una trayectoria circular según $s = 2t^3 - 3t^2$ m.

a. ¿Cuáles son los vectores de posición, velocidad y aceleración en $t = 3$ s?
b. ¿Qué distancia ha recorrido?

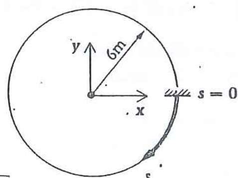


Figura P1.130

1.131 Un auto acelera uniformemente desde el reposo y alcanza una rapidez de 60 mi/h en 1 min sobre la pista circular mostrada en la Fig. P1.131. Se mantiene luego con esa velocidad de 60 mi/h. Determine la posición del auto al final del intervalo de 1 min y encuentre el tiempo requerido para que el auto alcance el punto más alto T. También obtenga la aceleración del auto cuando alcanza el punto T.

1.132 Demuestre que si la posición de una partícula está definida por $x = 5 \cos t$ y $y = 5 \operatorname{sen} t$ (en pies), entonces

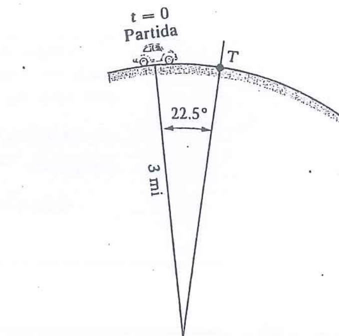


Figura P1.131

la trayectoria de la partícula es un círculo. Obtenga la ecuación de la longitud de arco s en función del tiempo.

1.133 En el Problema 1.78 determine la longitud de arco s en función del tiempo.

1.134 En el Problema 1.67 determine la expresión para $\dot{s}$ (t). Integre, para un movimiento que comienza en $t = 0$ en $(x, y) = (20, 0)$ m, y obtenga $s(t)$. Evalúe la longitud de arco en $t = 2$ s y muestre que el resultado es la circunferencia del círculo sobre el que viaja P.

1.135 Un punto P se mueve describiendo una trayectoria dada por $s = ct^3$, en que c = constante = 1 pie/s³. En $t = 2$ s, la magnitud de la aceleración es de 15 pie/s². Para ese tiempo encuentre el radio de curvatura de la trayectoria de P.

1.136 Un punto D se mueve a lo largo de una curva en el espacio con una rapidez dada por $\dot{s} = 6t$ m/s, en donde t se mide desde cero cuando D está en $s = 0$. Si en cierto tiempo t' la magnitud de la aceleración de D es de 12 m/s² y el radio de curvatura es de 3 m, determine t'.

1.137 En el Problema 1.103 encuentre el radio de curvatura de la trayectoria de P en el instante dado. Note que $\hat{\mathbf{e}}_t = \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{e}}_\theta$ y que $\hat{\mathbf{e}}_n = -\hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{e}}_r$.

1.138 Encuentre el radio de curvatura de la curva de Agnesi en $x = 0$. (Ver la Fig. P1.138.)

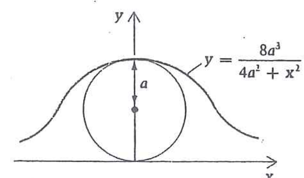


Figura P1.138

1.139 Un punto P se mueve de izquierda a derecha a lo largo de la curva definida en el problema anterior con una componente x constante de velocidad $(\dot{x}_0)$. Calcule la aceleración de P cuando éste alcanza el punto $(x, y) = (0, 2a)$.

1.140 En el Problema 1.105 exprese $\mathbf{v}_P$ en los mismos cuatro puntos en términos de las componentes tangencial y normal.

1.141 En el Problema 1.105, para la posición = /2, exprese $\mathbf{a}_P$ en términos de las componentes tangencial y normal y encuentre el radio de curvatura de la trayectoria de P en ese punto.

1.142 Un punto P parte del origen y se mueve a lo largo de la parábola mostrada en la Fig. P1.142, con una componente x constante de velocidad, $\dot{x} = 3$ pie/s. Determine las componentes tangencial y normal de la velocidad y aceleración de P en el punto $(x, y) = (1, 1)$.

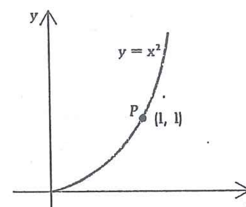


Figura P1.142

* **1.143** En el problema 1.104, encuentre el centro de curvatura de la trayectoria de P cuando $\theta = 270°$.

1.144 En un instante particular un punto tiene una velocidad $3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ plg/s y una aceleración $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{k}}$ plg/s². En este instante encuentre: (a) el vector normal unitario principal, (b) la curvatura de la trayectoria y (c) la rapidez de variación de la velocidad (rapidez) del punto.

1.145 Un punto P tiene un vector de posición $\mathbf{r}_{OP} = t^2\hat{\mathbf{i}} + t^3\hat{\mathbf{j}} - t^6\hat{\mathbf{k}}$ (en metros). Encuentre el vector del origen al centro de curvatura de la trayectoria de P en $t = 1$ s. Encuentre d $\mathbf{v}_P$ $/dt$ en el mismo instante.

1.146 El vector de posición de un punto está dado en función del tiempo por $\mathbf{r}(t) = t^2\hat{\mathbf{i}} - t\hat{\mathbf{j}} + t^3\hat{\mathbf{k}}$ (en pies). Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en $t = 1$ s y determine el radio de curvatura en ese instante.

1.147 Una partícula P tiene las coordenadas $(x, y, z) = (3t, 0, 4 \ln t)$ (en metros), dadas en función del tiempo. ¿Cuál es el vector del origen al centro de curvatura de la trayectoria de P en $t = 1$ s?

1.148 Demuestre, expresando la velocidad y la aceleración en componentes tangencial y normal que

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = va_n = \frac{|\dot{s}^3|}{\rho}$$

de manera que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} \quad \text{ó} \quad \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3}$$

1.149 Existe otra fórmula para el radio de curvatura ρ estudiada en Cálculo Diferencial, la cual está dada en términos de un parámetro, como el tiempo t, y para una curva plana,

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \right|$$

Deduzca esta fórmula a partir del resultado del problema anterior y úsela para encontrar el radio de curvatura en $t = 8$ s si

$$x = 6 \operatorname{senh} 0.02t \text{ pies} \quad y \quad y = t^3 - 10t^2 + 7.2 \text{ pies}$$

1.150 Encuentre la diferencia entre las velocidades (y también entre las aceleraciones) de los autos A y B en la Fig. P1.150, si en el instante mostrado

$$\dot{s}_A = 30 \text{ mi/h} \qquad \ddot{s}_A = 500 \text{ mi/h}^2$$
$$\dot{s}_B = 50 \text{ mi/h} \qquad \ddot{s}_B = -1000 \text{ mi/h}^2$$

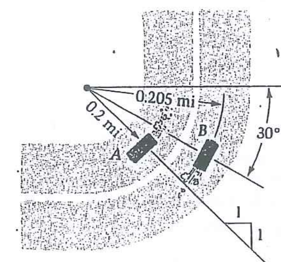


Figura P1.150

1.151 Una partícula se mueve sobre la curva $(x - a)^2 + y^2 = a^2$, en donde a es una distancia constante en me-

tros. La primera y segunda derivadas respecto al tiempo de la longitud de arco s están relacionadas por

$$\dot{s} = K a \ddot{s}$$

en donde la constante K tiene el valor de 1 s/m. La distancia s se mide en sentido antihorario sobre la curva desde el punto (2s, 0) metros. Cuando $t = 0$, la rapidez de la partícula es $\dot{s} = 1$ m/s y $s = a$. Encuentre las componentes normal y tangencial de la aceleración en $t = 0$. Muestre esas componentes en un diagrama.

1.152 Use el Ejemplo 1.21 para mostrar que el centro de curvatura no tiene que estar sobre el eje y para una curva simétrica respecto a y. *Sugerencia*: Use $f = 1$ y $x = 2$, encuentre ρ, y compárelo con la distancia de (2, 1) al eje y a lo largo de la normal a la tangente en este punto.

* **1.153** En el Problema 1.96 encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración del auto cuando $x = 2500$ pie. Verifique su resultado calculando $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ en ese punto y mostrando que $\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

* **1.154** Una partícula P parte del reposo en el origen y se mueve a lo largo de la parábola mostrada en la Fig. P1.154. Su rapidez está dada por $\dot{s} = 3s + 2$, en donde $\dot{s}$ está en m/s cuando s está en metros. Determine la velocidad de P cuando su coordenada s es igual a 5 m. Obtenga también el tiempo transcurrido.
Sugerencia: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$, de modo que $s = \int \sqrt{1 + y'^2}\,dx$. Introduzca y' y use una tabla de integrales para obtener $s(x)$.

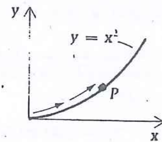


Figura P1.154

1.155 Existe un tercer vector unitario relacionado con el movimiento de un punto en su trayectoria; se llama *vector binormal unitario* $\hat{e}_b$ y forma un triedro ortogonal móvil con $\hat{e}_t$ y $\hat{e}_n$, y se define por $\hat{e}_b = \hat{e}_t \times \hat{e}_n$.

a. Derive $\hat{e}_b \cdot \hat{e}_t = 0$ respecto a s. Luego, usando $d\hat{e}_t/ds = \hat{e}_n/\rho$, demuestre que $d\hat{e}_b/ds \cdot \hat{e}_t = 0$ y, por consiguiente, $d\hat{e}_b/ds$ es paralelo a $\hat{e}_n$.
b. Usando la parte (a), sea $db/ds = \tau\,\hat{e}_n$ † (τ se llama la *torsión* de la trayectoria o curva). Luego derive $\hat{e}_n = \hat{e}_b \times \hat{e}_t$ con respecto a s y demuestre que

$$\frac{d\hat{e}_n}{ds} = -\left(\frac{1}{\rho}\hat{e}_t + \tau\hat{e}_b\right)^{\dagger}$$

Las tres ecuaciones marcadas con cruces dan las derivadas de los tres vectores unitarios asociados a una curva en el espacio y se llaman *fórmulas de Serret-Frenet*.

1.156 La derivada de la aceleración [llamada rapidez de aceleración (en inglés, *jerk*)] se estudia en la dinámica del impacto de vehículos y en la cinemática de mecanismos que contienen levas y seguidores. Demuestre que esta derivada para un punto tiene la forma siguiente en términos de sus componentes intrínsecas:

$$J_P = \dot{a}_P = \left(\dddot{s} - \frac{\dot{s}^3}{\rho^2}\right)\hat{e}_t + \left(\frac{3\dot{s}\ddot{s}}{\rho} - \frac{\dot{\rho}\dot{s}^2}{\rho^2}\right)\hat{e}_n - \frac{\dot{s}^3}{\rho}\tau\hat{e}_b$$

* **1.157** El siguiente problema de "persecución" es muy difícil, pero ilustra excepcionalmente bien el hecho de que el vector velocidad es tangente a la trayectoria. Lo incluimos junto con un conjunto de pasos para el lector que lo quiera "proseguir". Un perro parte del punto $(x, y) = (D, O)$ y corre hacia su amo con rapidez constante $2V_O$. (Ver la Fig. P1.157.) La dirección de la velocidad del perro está siempre dirigida hacia su amo, quien parte en el mismo instante desde el origen y se mueve a lo largo de la dirección positiva y con rapidez V_O. Encuentre la posición del amo cuando el perro lo alcanza y determine el tiempo transcurrido. *Sugerencias*: La coordenada y del amo es y_M (igual desde luego a V_Ot). Demuestre que:

1. $\dfrac{-dy_D}{dx} = \dfrac{y^M - y^D}{x}$, en donde (x, y_D) representa las coordenadas del perro en cualquier instante.
2. $2V_0 = \dfrac{ds_D}{dt} = \dfrac{\sqrt{dx^2 + dy_D^2}}{dt} = \dfrac{-dx\sqrt{1 + y_D'^2}}{dt}$.
3. $V_O = dy_M/dt$
4. De los pasos 2 y 3, dividiendo y reagrupando términos se obtiene
$2y_M' = -\sqrt{1 + y_D'^2}\;(y_M' = dy_M/dx)$.
5. Del paso 1 tenemos $y_M' = -xy_D''$.
6. Y de los pasos 4 y 5, $2xy_D'' = \sqrt{1 + y_D'^2}$.
7. Haciendo $y_D' = p$, del paso 6, $dp/\sqrt{1 + p^2} = dx/2x$.
8. Integrando el paso 7 con ayuda de una tabla de integrales obtenemos
$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(C_1) = \ln\left(\dfrac{x}{C_1}\right)^{1/2}$
9. Del paso 8 obtenemos $p + \sqrt{1 + p^2} = (x/C_1)^{1/2}$.
10. Del paso 9 obtenemos $p - \sqrt{x/C_1} = -\sqrt{1 + p^2}$.
11. Del paso 10, elevando al cuadrado ambos miembros y despejando a p, resulta
$$2p = \sqrt{\frac{x}{C_1}} - \sqrt{\frac{C_1}{x}} = 2y_D'$$

12. $y_D' = 0$ cuando $x = D$ (condición inicial).
13. De los pasos 11 y 12 tenemos $C_1 = D$, por lo que
$$2y_D' = \frac{x}{D} - \frac{D}{x}$$

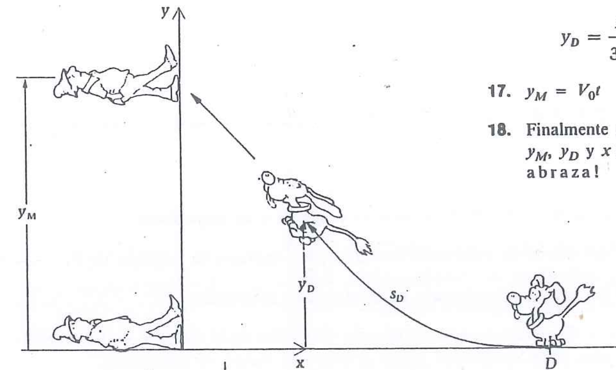


Figura P1.157

14. Integrando el paso 13 obtenemos
$$y_D = x^{3/2}/3\sqrt{D} - \sqrt{xD} + C_2.$$
15. $y_D = 0$ cuando $x = D$ (condición final).
16. De los pasos 14 y 15 resulta que $C_2 = 2D/3$, y así
$$y_D = \frac{x^{3/2}}{3\sqrt{D}} - \sqrt{xD} + \tfrac{2}{3}D$$
17. $y_M = V_0t$
18. Finalmente escriba las condiciones que relacionan a y_M, y_D y x cuando el perro alcanza a su amo ¡y lo abraza!

Problemas para computadora / Capítulo 1

* **1.158** Una partícula se mueve en el plano xy según la ecuación $r = k\theta$, en donde k es una constante, y tiene la rapidez constante v_0. La partícula pasa por el origen con $r = \theta = 0$ en $t = 0$.

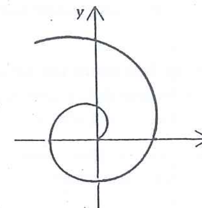


Figura P1.15

a. Demuestre que $k\dot{\theta}\sqrt{1 + \theta^2} = v_0$.
b. Con la sustitución trigonométrica $\theta = \tan\phi$ y consultando la tablas de integrales, integre la ecuación y obtenga:
$$\frac{\theta\sqrt{1 + \theta^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\sqrt{1 + \theta^2} + 1 + \theta}{\sqrt{1 + \theta^2} + 1 - \theta}\right] = \frac{v_0 t}{k}$$
c. Para el caso $v_0/k = 1$, use la computadora para graficar θ contra el tiempo, para θ de 0 a 2π radianes.

Respuestas a las preguntas del texto / Capítulo 1

p1.1 (a) Sí; podríamos simplemente definir un marco en el que P estuviera fijo y se tendría entonces $\mathbf{v}_P = 0 = \mathbf{a}_P$. (b) No; considerando O' como un segundo origen en $\mathcal{I}$ y derivando la relación $\mathbf{r}_{OP} = \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{r}_{O'P}$ en $\mathcal{I}$ se ve que: $\mathbf{v}_P$ (con origen en O) $= \mathbf{v}_P$ (con origen en O'). La derivada de $\mathbf{r}_{OO'}$ en, $\mathcal{I}$ es, por supuesto, igual a cero. Ver el problema 1.17.

p1.2 Si la superficie es plana entonces $\mathbf{a}_D$ desaparece. Si es cúbica, $\mathbf{a}_D$ es lineal en x.

p1.3 De la Fig. 1.5 vemos que $\hat{e}_\theta$ es perpendicular a $\mathbf{r}_{OP}$. Sin embargo, nótese que en la escritura y uso de la Ec. (1.30) está implícito el ángulo polar θ.

p1.4 Por una parte, $\dot{r}$ puede ser negativo. Pero $|\mathbf{v}_P| \neq |\dot{r}|$ también porque la magnitud de la derivada de un vector no es igual al valor absoluto de la derivada de la magnitud del vector. Derivando $\mathbf{r}_{OP}$ se genera un término $(r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta)$ en $\mathbf{v}_P$ además del término $\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r$.

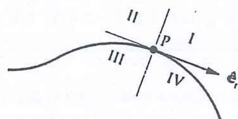
p1.5 Cuando $r = 0$, tenemos $\dot{z} = 0 = \dot{\theta}$. Entonces $\dot{r}$, la componente radial de $\mathbf{v}_P$ es máxima ahí en el valor 0.7, que es la rapidez constante. (Nótese que $\dot{r}$ decrece continuamente hacia cero desde ahí.)

p1.6 Si llamamos C al centro de curvatura, entonces $\mathbf{r}_{OC} = \mathbf{r}_{OP} + \mathbf{r}_{PC} = \mathbf{r}_{OP} + \rho\hat{\mathbf{e}}_n$, siendo evaluado todoen el instante de interés (en este caso en $t = 1$ s.).

Preguntas de repaso / Capítulo 1

¿Verdadero o falso?

1. La velocidad $\mathbf{v}_P$ de un punto P es siempre tangente a su trayectoria.
2. $\mathbf{v}_P$ depende del marco de referencia escogido para expresar la posición de P.
3. $\mathbf{v}_P$ depende del origen seleccionado en el marco de referencia.
4. La magnitud y dirección de $\mathbf{v}_P$ en el espacio dependen de la elección de las coordenadas utilizadas para localizar el punto respecto al marco de referencia.
5. $\mathbf{a}_P$ siempre tiene una componente normal a la trayectoria que es diferente de cero.
6. Para cualquier punto P, $|\mathbf{a}_P| = \sqrt{\ddot{s}^2 + \dot{s}^4/\rho^2}$.
7. Un punto puede tener $\ddot{r} = 0$ y aún tener una componente radial de aceleración, diferente de cero.
8. Si una pelota unida a una cuerda es girada en un círculo horizontal con rapidez constante, su centro tiene aceleración nula.
9. Al estudiar la cinemática de una partícula aparecen las mismas ecuaciones que al estudiar la cinemática de un punto.
10. En nuestro estudio de la cinemática de un punto, no han aparecido los siguientes términos en ninguna de las ecuaciones: masa, fuerza, momentos, gravedad, cantidad de movimiento (lineal o angular), inercia o marcos inerciales (newtorianos).
11. El vector aceleración de P, en el punto indicado sobre la trayectoria mostrada en la figura, puede encontrarse en cualquiera de los cuatro cuadrantes.



12. Una partícula en movimiento en un plano con valores constantes de $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$, tendrá en todo momento aceleración igual acero.

Respuestas: 1 V; 2 V; 3 F; 4 F; 5 F; 6 V; 7 V; 8 F; 9 V; 10 V; 11 F; 12 F.

Capítulo 2 Cinética de partículas y de centros de masa de cuerpos

2.1 Introducción. Leyes de Newton y de Euler

Comenzaremos este capítulo considerando la manera en que el movimiento de un cuerpo está relacionado con acciones mecánicas externas (fuerzas y pares). Nuestras nociones cinemáticas de espacio y tiempo deben ahora ampliarse con las de masa y fuerza, quienes como las primeras son nociones **fundamentales** de la mecánica. De antemano debemos aceptar que algunas medidas de cantidad de materia (masa) y de acción mecánica (fuerza) son ingredientes básicos en cualquier intento de análisis del movimiento de un cuerpo. Suponemos que el lector tiene un conocimiento práctico, probablemente obtenido del estudio de la estática, de las características de las fuerzas y momentos y de sus descripciones vectoriales. Usamos el término **cuerpo** para denotar un material de identidad constante; podríamos pensar en un conjunto específico de átomos, aunque el modelo que emplearemos se basa en una representación del material a escala espacial tal que la masa se percibe distribuida en forma continua. Un cuerpo no necesita ser rígido ni siquiera sólido, pero ya que nuestro tema es la dinámica clásica (sin efectos relativistas), aquél debe tener necesariamente una masa constante.

El punto de partida usual para relacionar las fuerzas externas que actúan en un cuerpo y su movimiento resultante, son las leyes de Newton. Éstas fueron propuestas por el científico inglés Isaac Newton en su famoso trabajo conocido en forma abreviada como *Principia*, publicado en 1687; actualmente se expresan de la siguiente manera:

1. Si la fuerza resultante $\mathbf{F}$ en una partícula es cero, entonces la partícula tiene velocidad constante.
2. Si $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es proporcional a la derivada respecto al tiempo de la *cantidad de movimiento* (o *ímpetu*)* $m\mathbf{v}$ (producto de la masa por la velocidad) de la partícula.
3. La interacción de dos partículas es a través de una pareja de fuerzas autoequilibrantes; éstas tienen la misma magnitud, direcciones opuestas y una línea de acción común.

Es claro que la primera ley puede considerarse como un caso especial de la segunda y que debe hacerse una suposición respecto al marco de referencia, ya que un punto puede tener velocidad constante en un marco y variable en otro. Los marcos de referencia en los que estas leyes son válidas se denominan galileanos, newtonianos o **inerciales**. Además, la constante de proporcionalidad en la segunda ley se puede hacer igual a la unidad con una elección apropiada de las unidades, de manera que la ley se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{a}$$

en donde $\mathbf{a}$ es la aceleración de la partícula.

Como se mencionó brevemente en el Capítulo 1, una partícula es una porción de materia suficientemente pequeña, tal que no se requiere hacer distinción entre las posiciones de sus puntos materiales (o las de sus velocidades o aceleraciones). También hicimos notar que esta definición permite, para *algunos* fines, que un camión, un vehículo espacial o aun un planeta, se pueda modelar adecuadamente como una partícula. En los *Principia*, Newton consideró los cuerpos celestes como partículas y los trató como puntos móviles sujetos sólo a la gravitación universal y a su propia inercia**. Newton no extendió su trabajo a problemas en los que es necesario tomar en cuenta los tamaños reales de los cuerpos y la forma en que está distribuida su masa. Transcurrieron más de 50 años antes de que el matemático suizo Leonhard Euler presentara el primero de los dos principios que han venido a conocerse como **leyes de Euler**.

* (N. del R.) Este concepto, que suele llamarse también *moméntum*, se ha denominado ya apropiadamente en español *ímpetu*, lo cual evita la denominación más larga y tradicional de "cantidad de movimiento".
** Véase C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics* (Berlín: Springer-Verlag, 1968)

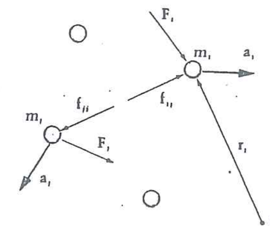


Figura 2.1

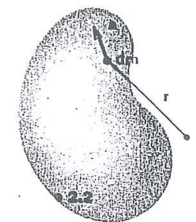


Figura 2.2

Para un cuerpo compuesto de un conjunto de N partículas, podemos deducir las leyes de Euler a partir de las leyes de Newton. Como se indica en la Fig. 2.1, las fuerzas que actúan en la partícula i-ésima se separan en dos partes: las N-1 fuerzas ejercidas por las otras partículas del sistema y la fuerza resultante $\mathbf{F}_i$ ejercida sobre la partícula i por elementos *externos* al sistema; $\mathbf{f}_{ij}$ es la fuerza ejercida por la partícula j sobre la partícula i. Si se aplica la segunda ley de Newton a la i-ésima partícula, cuya masa es m_i y cuya aceleración es $\mathbf{a}_i$, se obtiene

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{ij} = m_i\mathbf{a}_i \qquad (2.1)$$

en donde

$$\mathbf{f}_{ii} = \mathbf{0}$$

Ahora sumamos las N ecuaciones de este tipo y obtenemos

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{f}_{ij} = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{a}_i \qquad (2.2)$$

La tercera ley de Newton implica que

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} \qquad \text{por lo que} \qquad \Sigma\Sigma\mathbf{f}_{ij} = \mathbf{0}$$

Podemos concluir entonces que

$$\Sigma\mathbf{F}_i = \Sigma m_i\mathbf{a}_i \qquad (2.3)$$

que es la forma de la primera ley de Euler para el sistema de partículas y expresa que la suma de las *fuerzas externas* que actúan sobre el sistema es igual a la suma de los productos $m\mathbf{a}$ de las partículas que forman el mismo.

Para un cuerpo cuya masa está distribuida en forma continua, Fig. 2.2, la ecuación (2.3) se convierte en

$$\Sigma\mathbf{F} = \int \mathbf{a}\, dm \qquad (2.4)$$

en donde dm* *es un elemento diferencial de masa*, $\mathbf{a}$ es su aceleración y $\Sigma\mathbf{F}$ es la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo.

* $dm = \rho dv$, en donde ρ es la densidad y dv es un elemento infinitesimal de volumen. Si se emplean coordenadas rectangulares x, y, z, entonces $dv = d\,x \; d\,y \; d\,z$.

Se obtiene (Fig. 2.1) una segunda relación entre las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas o sobre un cuerpo si formamos el producto vectorial de $\mathbf{r}_i$ con ambos miembros de la ecuación (2.1):

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i \tag{2.5}$$

El primer término en el miembro izquierdo de la ecuación es el momento respecto al punto P de la fuerza externa $\mathbf{F}_i$. El producto vectorial $\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}$ es el momento respecto a P de la fuerza ejercida en la partícula i por la partícula j. Igual que antes, sumamos ahora las N ecuaciones tipificadas por la ecuación (2.5) y obtenemos

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i \tag{2.6}$$

Los términos en la doble suma aparecen en parejas de la forma

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{21}$$

Pero $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{21} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{21}$, ya que $\mathbf{f}_{12}$ y $\mathbf{f}_{21}$ tienen una línea de acción común que pasa por las partículas 1 y 2. Además, $\mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12}$, por lo que

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{f}_{21} &= \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_{21}) \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

lo que se cumple también para cualquier otra pareja de partículas. Esto significa que los momentos de las fuerzas internas de interacción suman cero. Por tanto,

$$\Sigma\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \Sigma\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i$$

o bien

$$\Sigma\mathbf{M}_P = \Sigma\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i \tag{2.7}$$

que es la segunda ley de Euler para el sistema de partículas y expresa que la suma de los momentos de las fuerzas externas respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las $m\mathbf{a}$ respecto al mismo punto.

Para un cuerpo con masa distribuida en forma continua (Fig. 2.2), la ecuación (2.7) se convierte en

$$\Sigma\mathbf{M}_P = \int \mathbf{r} \times \mathbf{a}\, dm \tag{2.8}$$

Pregunta 2.1 ¿Debe el punto P de la ecuación (2.8) o (2.7) estar fijo en el marco inercial de referencia?

Las ecuaciones (2.4) y (2.8) juegan el mismo papel en la dinámica que las ecuaciones de equilibrio en la estática; estas últimas ecuaciones, $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma\mathbf{M} = \mathbf{0}$, las podemos obtener a partir de las ecuaciones (2.4) y (2.8) igualando a cero las aceleraciones de todos los puntos de un cuerpo.

Terminamos esta sección estableciendo la relación entre las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo y el movimiento de su centro de masa. Para lograr esto, trazamos primero

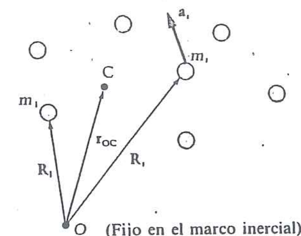


Figura 2.3a

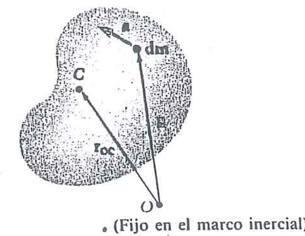


Figura 2.3b

los vectores de posición para las partículas del sistema como se muestra en la Fig. 2.3a. La aceleración de la partícula i puede escribirse como

$$\mathbf{a}_i = \frac{d^2\mathbf{R}_i}{dt^2} \tag{2.9}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.3) se obtiene:

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{F}_i &= \Sigma m_i \frac{d^2\mathbf{R}_i}{dt^2} \\ &= \frac{d^2}{dt^2}(\Sigma m_i\mathbf{R}_i)\end{aligned} \tag{2.10}$$

La posición del centro de masa, C, de un sistema de partículas se define por

$$\mathbf{r}_{OC} = \frac{\Sigma m_i\mathbf{R}_i}{m} \tag{2.11}$$

en donde m es la masa (Σm_i) del sistema. La primera ley de Euler se expresa entonces como

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{F} &= \frac{d^2}{dt^2}(m\mathbf{r}_{OC}) \\ &= m\frac{d^2\mathbf{r}_{OC}}{dt^2}\end{aligned}$$

o bien

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C \tag{2.12}$$

Pregunta 2.2 ¿Qué sucede a los términos $\dot{m}$y $\ddot{m}$ al pasar de $\frac{d^2}{dt^2}(m\ \mathbf{r}_{OC})$ a $m\frac{d^2\mathbf{r}_{OC}}{dt^2}$?

Para un cuerpo continuo, Fig. 2.3b, las ecuaciones (2.9 a 2.11) se convierten en

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$

$$\Sigma\mathbf{F} = \int \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\, dm = \frac{d^2}{dt^2}\int \mathbf{R}\, dm$$

y

$$m\mathbf{r}_{OC} = \int \mathbf{R}\, dm$$

Se ve entonces que la fuerza externa resultante que actúa en el cuerpo es el producto de la masa constante m del mismo por la aceleración $\mathbf{a}_C$ de su centro de masa. Por consiguiente el movimiento del centro de masa de un cuerpo está regido por una ecuación idéntica en forma a la segunda ley de Newton para una partícula.

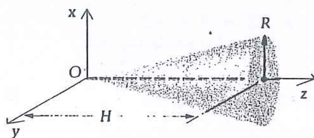
Es muy importante darse cuenta de que para un cuerpo rígido el centro de masa C coincide en todo instante con un punto material específico del cuerpo o con una extensión rígida del mismo (por ejemplo, el centro de una esfera hueca). Esto no es el caso para un cuerpo deformable, como se verá en el último de los ejemplos que siguen.

Ejemplo 2.1

Empleando la definición del centro de masa, encontrar el centro de masa de un cono circular recto uniforme de densidad ρ.

Solución

Es conveniente establecer coordenadas rectangulares con origen en el vértice del cono y hacer coincidir un eje coordenado con el eje del mismo, como se muestra en el diagrama anexo.



Se tiene que

$$m\mathbf{r}_{OC} = \int (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})\, dm$$

$$m(\bar{x}\hat{\imath} + \bar{y}\hat{\jmath} + \bar{z}\hat{k}) = \hat{\imath}\int x\, dm + \hat{\jmath}\int y\, dm + \hat{k}\int z\, dm$$

Las integraciones se pueden efectuar muy fácilmente usando coordenadas cilíndricas (r, θ, z); o sea

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

Entonces

$$dm = \rho r\, dr\, d\theta\, dz \qquad (= \text{densidad} \times \text{volumen diferencial})$$

y

$$m\bar{x} = \int_0^H \int_0^{zR/H} \int_0^{2\pi} \rho r^2 \cos\theta\, d\theta\, dr\, dz = 0$$

Igualmente, $\bar{y} = 0$; o sea que el centro de masa se encuentra sobre el eje del cono. El lector debe notar que el mismo resultado se obtiene para un cono no uniforme siempre que la densidad no dependa de θ; o sea que un cuerpo con una distribución axialmente simétrica de su masa tiene su centro de masa sobre el eje de simetría. El valor de $\bar{z}$ se determina a partir de la expresión

$$m\bar{z} = \int_0^H \int_0^{zR/H} \int_0^{2\pi} \rho z r\, d\theta\, dr\, dz = 2\pi\rho \int_0^H \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{zR/H} z\, dz$$

$$= \pi\rho \frac{R^2}{H^2} \int_0^H z^3\, dz = \pi\rho \frac{R^2 H^2}{4}$$

Pero

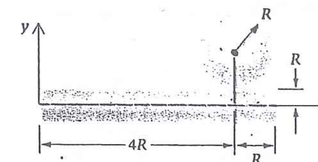
$$m = \int_0^H \int_0^{zR/H} \int_0^{2\pi} \rho r\, d\theta\, dr\, dz = \pi\rho \frac{R^2 H}{3}$$

Por lo tanto

$$\bar{z} = \frac{3}{4}H \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_{OC} = \frac{3H}{4}\hat{k}$$

Ejemplo 2.2

Considérese un cuerpo compuesto por una esfera uniforme y un cilindro también uniforme, cada uno de densidad ρ. Encontrar el centro de masa del cuerpo. (Véase la figura)



Solución

Repasaremos primero una útil propiedad de los centros de masa. Supongamos que tenemos un cuerpo $\mathcal{B}$ dividido en dos partes, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, de masas m_1 y m_2 con centros de masa C_1 y C_2, respectivamente. Si $m = m_1 + m_2$ es la masa de $\mathcal{B}$, cuyo centro de masa está en C, entonces

$$m\mathbf{r}_{OC} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{R}\, dm = \int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{R}\, dm + \int_{\mathcal{B}_2} \mathbf{R}\, dm$$

o bien

$$m\mathbf{r}_{OC} = m_1\mathbf{r}_{OC_1} + m_2\mathbf{r}_{OC_2}$$

De modo que si conocen las masas y los centros de masa de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, podemos calcular fácilmente la localización del centro de masa del cuerpo compuesto $\mathcal{B}$.

Empleando el sistema de ejes mostrado (el eje x coincide con el eje del cilindro y el centro de la esfera está en el plano xy), notamos que las coordenadas del centro de masa del cilindro son $(2.5R, 0, 0)$ y las de la esfera $(4R, 2R, 0)$.

Puesto que la masa de la esfera es $(4/3)\,\pi R^3\rho$ y la del cilindro es $5R(\pi R^2)\rho = 5\pi R^3\rho$, se puede escribir

$$\left(5\pi R^3\rho + \frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)\mathbf{r}_{OC} = 5\pi R^3\rho(2.5R\hat{\imath}) + \frac{4}{3}\pi R^3\rho(4R\hat{\imath} + 2R\hat{\jmath})$$

Entonces la solución es

$$\mathbf{r}_{OC} = 2.82R\hat{\imath} + 0.421R\hat{\jmath}$$

Ejemplo 2.3

Encontrar el centro de masa de un cilindro uniforme del que se ha removido un medio cilindro. (Véase la Fig. 1.)

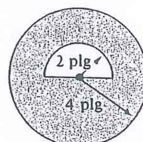


Figura 1

Solución

Primero encontramos el centro de masa de un medio cilindro. De la Figura 2:

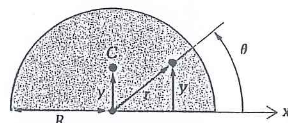


Figura 2

$$\bar{y} = \frac{\int_{-L/2}^{L/2}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(r\,\text{sen}\,\theta)\rho r\,dr\,d\theta\,dz}{\rho\pi R^2L/2}$$

$$= \frac{\rho L\int_0^{\pi}\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R \text{sen}\,\theta\,d\theta}{\rho\pi R^2L/2}$$

$$= \frac{2\rho LR^3(-\cos\theta)|_0^{\pi}}{3\rho\pi R^2L} = \frac{4R}{3\pi}$$

Ahora consideramos primero cuerpo entero (W) que incluya un hueco (H) y luego se resta la contribución de éste, tal como se sugiere en la Fig. 3. Lo que importa es que el final del cálculo hayamos considerado sólo una vez exactamente a los elementos de masa presentes. Por tanto, si W representa al cilindro total y H al medio cilindro que va a restarse, se tiene

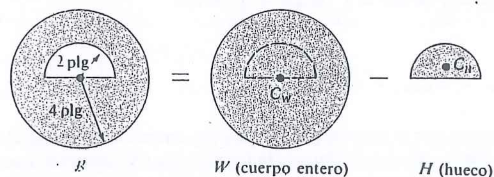


Figura 3

Para los cuerpos individuales W y H se cumple que

$$\bar{y} = \frac{\int_B y\,dm}{\int_B dm} = \frac{\int_{W-H} y\,dm}{\int_{W-H} dm} = \frac{\int_W y\,dm - \int_H y\,dm}{\int_W dm - \int_H dm}$$

Por tanto

$$\int_W y\,dm = \bar{y}_W m_W \qquad \text{y} \qquad \int_H y\,dm = \bar{y}_H m_H$$

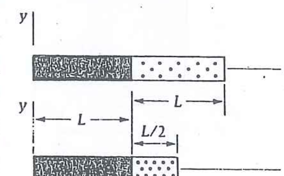
Entonces

$$\bar{y} = \frac{\overset{0}{\bar{y}_W} m_W - \bar{y}_H m_H}{m_W - m_H} = \frac{\rho L\left[0 - \frac{4(2)}{3\pi}\pi\frac{2^2}{2}\right]}{\rho L\left(\pi 4^2 - \pi\frac{2^2}{2}\right)}$$

$$= \frac{-8}{21\pi} = -0.121 \text{ plg}$$

Por simetría es claro que $\bar{x} = \bar{z} = 0$

Ejemplo 2.4



Una barra prismática uniforme de densidad ρ y longitud $2L$ se deforma tal que la mitad derecha queda comprimida uniformemente a una longitud $L/2$ sin cambio en el área de su sección transversal (véase la figura). La mitad izquierda no se altera. Si el eje x es el lugar geométrico de los centroides de las secciones transversales, encontrar las coordenadas del centro de masa en cada configuración.

Solución

En la primera configuración las coordenadas del centro de masa son $(L, 0,0)$, o sea que éste se encuentra en la interfaz de los dos segmentos. Para la segunda configuración:

$$2\rho AL\bar{x} = \rho AL\left(\frac{L}{2}\right) + \rho AL\left(\frac{5}{4}L\right)$$

$$\bar{x} = \frac{L}{4} + \frac{5}{8}L$$

$$= \frac{7}{8}L$$

Se ve que el centro de masa ya no se encuentra en la interfaz. Este ejemplo ilustra el hecho de que el centro de masa de un cuerpo deformable no es en general siempre el mismo punto material del cuerpo en distintas condiciones.

Problemas / Sección 2.1

2.1 Demuestre que el centro de masa C de un cuerpo $\mathcal{B}$ es único. Sugerencia: Considere los dos centros de masa C_1 y C_2 para los que, respectivamente,

$$\mathbf{r}_{O_1C_1} = \frac{1}{m}\int \mathbf{R}_1\, dm$$

$$\mathbf{r}_{O_2C_2} = \frac{1}{m}\int \mathbf{R}_2\, dm$$

y relacione $\mathbf{R}_1$ con $\mathbf{R}_2$ (Fig. P2.1). Empleando esta relación, muestre que $\mathbf{r}_{O_1C_1} = \mathbf{r}_{O_2C_2}$, lo que implica que C_1 y C_2 son el mismo punto.

2.2 Demuestre que el centro de masa de una placa triangular de lados iguales, sólida y homogénea se encuentra a un tercio de la distancia de cualquier base al vértice opuesto. (Esto se cumple para cualquier triángulo.)

2.3 Determine $\bar{x}$ para la placa sombreada en la Fig. P2.3; su densidad es ρ y su espesor t.

2.4 Encuentre $\bar{y}$ para la placa del problema anterior. Nótese que esos resultados en términos de n son muy generales y se aplican a rectángulos, triángulos, curvas parabólicas, etc., para $n = 0, 1, 2$, etc.

2.5 Encuentre $\bar{y}$ para el prisma semielíptico de la Fig. P2.5. (Densidad = ρ ; longitud normal al plano de la página = L)

2.6 Obtenga el centro de masa de un hemisferio sólido y homogéneo.

2.7 Obtenga el centro de masa de un alambre delgado semicircular.

2.8 Localice el centro de masa de un sólido uniforme de revolución formado al girar la curva alrededor del eye x (Fig. P2.8). El área está limitada por las curvas $4y = x^2$, $y = 0$ y $x = 2$.

* **2.9** Encuentre el centro de masa de un casco cónico delgado (Fig. P2.9).

* **2.10** El líquido de un tanque cónico (Fig. P2.10) contiene sedimento y, en consecuencia, la densidad del líquido varía linealmente con la profundidad: $\rho_F = \rho_0 + Ky$. Encuentre el centro de masa del líquido.

2.11 Demuestre que un cuerpo no puede encontrarse totalmente a un lado de cualquier plano que pase por su centro de masa.

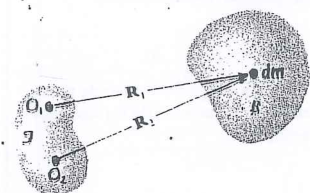


Figura P2.1

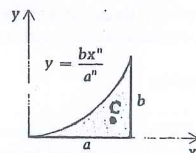


Figura P2.3

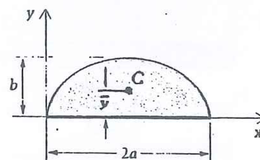


Figura P2.5

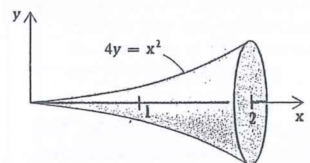


Figura P2.8

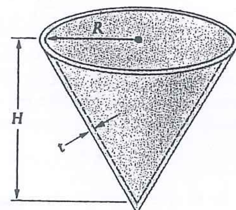


Figura P2.9

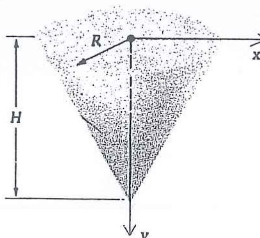


Figura P2.10

2.12 Encuentre el centro de masa de una barra doblada, cada uno de cuyos lados es paralelo a un eje coordenado y tiene densidad uniforme y masa m (Fig. P2.12)

2.13 Repita el Problema 2.12 si los cuatro lados tienen densidades uniformes pero diferentes entre sí, de modo que las masas de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son respectivamente m, $2m$, $3m$ y $4m$.

2.14 Encuentre (en términos de R) la altura H del cono de densidad uniforme tal que el centro de masa del cono más el hemisferio se encuentre en la interfaz de los dos cuerpos, o sea en $z = 0$ (Fig. 2.14).

2.15 Encuentre el centro de masa del cuerpo compuesto mostrado en la Fig. P2.15. Nótese que las tres partes están formadas de materiales distintos.

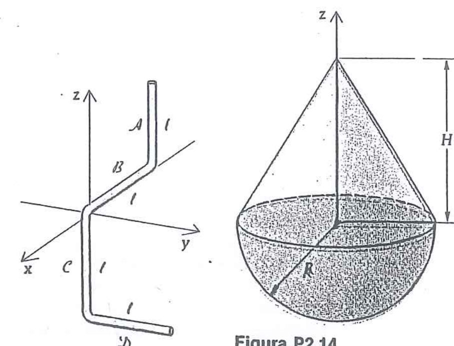


Figura P2.12

Figura P2.14

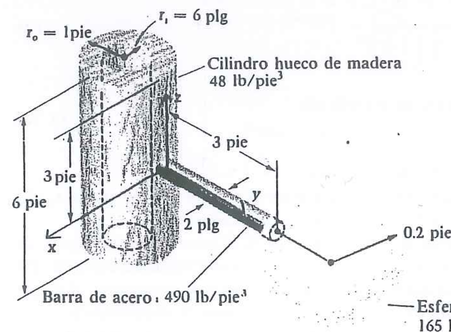


Figura P2.15

2.16 Un alambre delgado se dobla en forma de un triángulo isóceles (Fig. P2.16). Sitúe su centro de masa y demuestre que es el mismo punto que el centro de masa de una placa triangular de iguales dimensiones, sólo si el triángulo es equilátero. (El área de la sección transversal = A y la densidad ρ son ambas constantes).

* **2.17** Determine el centro de masa de la muñeca (Fig. P2.17) en términos de las densidades ρ_1, ρ_2, y ρ_3. Obtenga luego valores numéricos para (x, y, z) si las tres densidades son iguales.

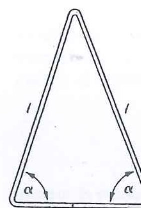


Figura P2.16

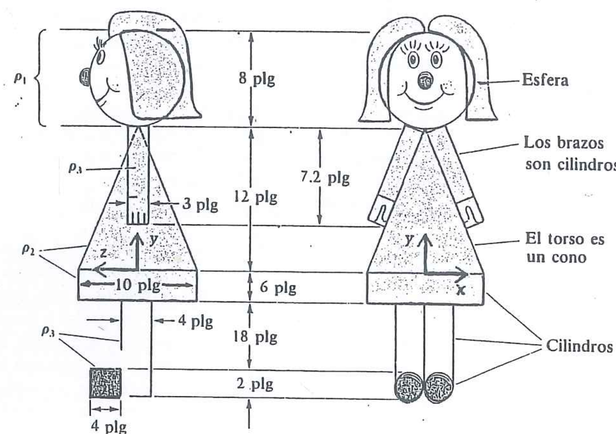


Figura P2.17

2.2 Movimientos de partículas y de centros de masas de cuerpos

Aunque el centro de masa de un cuerpo no siempre coincide con un punto material específico del cuerpo, dicho centro es, sin embargo, un punto importante que refleja la distribución de la masa del cuerpo. Además, se presentan a veces situaciones en las que nuestros objetivos se alcanzan si podemos determinar el movimiento de cualquier punto material o característico del cuerpo. Este es el caso cuando se trata de describir las órbitas de los planetas alrededor del Sol, ya que el punto material en que centramos nuestra atención no es de importancia. Sin embargo, existe una gran ventaja en el cálculo si nos fijamos en el centro de masa, lo cual se debe a que el movimiento de este punto se relaciona directamente con las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo.

Es más probable que pensemos en una pelota ovoide de futbol como si fuera una partícula cuando aquella simplemente se desplaza que cuando se mueve girando rápidamente. Sin embargo, el movimiento del *centro de masa* en cada caso está regido por la Primera ley de Euler, aunque ambos movimientos pueden ser muy diferentes debido a los distintos conjuntos de fuerzas externas inducidas por la interacción del aire con la pelota.

Si las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo son funciones conocidas del tiempo, el movimiento del centro de masa puede calcularse con la primera ley de Euler:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_C \tag{2.12}$$

o bien

$$\Sigma \mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}_{OC}}{dt^2} \tag{2.13}$$

en donde $\mathbf{r}_{OC}$ es el vector de posición del centro de masa.

Se ve fácilmente que dos integraciones de (2.13) respecto al tiempo proporcionan $\mathbf{r}_{OC}(t)$ siempre que los valores iniciales de $\mathbf{r}_{OC}$ y $\dot{\mathbf{r}}_{OC}$ ($= \mathbf{V}_C$) sean conocidos.

Resta repasar el concepto de **diagrama de cuerpo libre** antes de estudiar varios ejemplos de la aplicación de la primera ley de Euler al movimiento del centro de masa de cuerpos. Sin la aptitud de poder identificar las fuerzas externas (y luego también los momentos), el lector no será capaz de formular correctamente un conjunto de ecuaciones de movimiento.

Un diagrama de cuerpo libre es un esbozo de un cuerpo en el cual todas las fuerzas y pares externos que actúan sobre él se indican cuidadosamente tomando en cuenta las posiciones, direcciones y magnitudes. Estas fuerzas pueden resultar de tirar de o empujar, como se ve en la figura 2.4a, en la que el niño empuja el cajón y la niña tira de la cuerda; también pueden ser resultado de la gravedad, como es el caso del peso del cajón en la Fig. 2.4b. (Nótese que las fuerzas no necesitan *tocar* el cuerpo para ser incluidas en el diagrama de cuerpo libre; otro caso son las fuerzas electromagnéticas). Las fuerzas pueden generarse también en los apoyos, como la reacción del piso sobre el cajón en la Fig. 2.4c. En la Fig. 2.5 se muestra el diagrama completo de cuerpo libre del sistema cajón y cuerda cuando sobre él actúan simultáneamente todas las fuerzas anteriores.

Es importante reconocer que un diagrama de cuerpo libre:

1. Identifica claramente al cuerpo cuyo movimiento va a analizarse.
2. Proporciona un listado de todas las fuerzas *externas* (y pares) que actúan *sobre* el cuerpo.
3. Permite expresar en forma compacta lo que sabemos o podemos concluir respecto a las líneas de acción de fuerzas conocidas o desconocidas. Por ejemplo, se sabe que la presión (fuerza normal distribuida) ejercida por el piso sobre la base del cajón tiene una resultante que es una fuerza con una línea de acción vertical. El símbolo N junto con la flecha es una clave para comunicar el hecho de que hemos decidido expresar esa fuerza (vector) desconocida como $N\hat{\mathbf{j}}$. El desconocimiento de la localiza-



Figura 2.4a

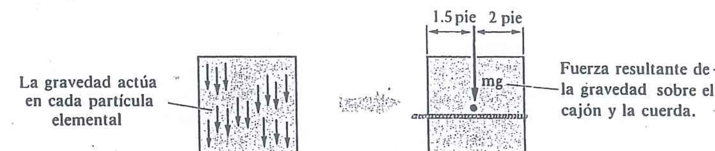


Figura 2.4b

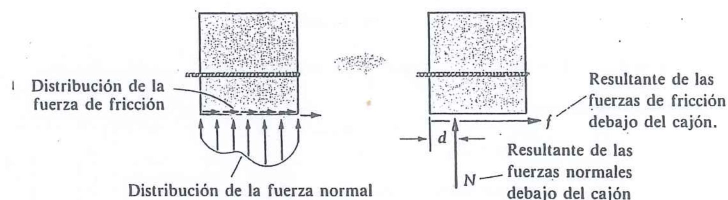


Figura 2.4c

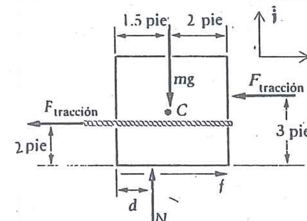


Figura 2.5

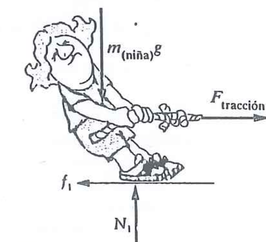


Figura 2.6

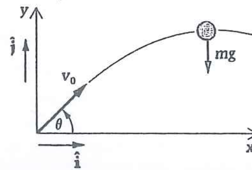
ción de la línea de acción de esa fuerza se manifiesta por la presencia de la distancia desconocida d.

En dinámica como en estática las únicas características de una fuerza que se manifiestan en las ecuaciones de movimiento son el vector que describe la fuerza y la localización de su línea de acción; o sea, debemos sumar todas las fuerzas externas así como sus momentos respecto a algún punto. En consecuencia, todo lo que se necesita conocer sobre las fuerzas externas queda representado en el diagrama de cuerpo libre y podemos entonces verificar los planteamientos cotejando este diagrama con las ecuaciones que se van escribiendo.

Cuando nos "centramos" en dos o más cuerpos interactuantes, los diagramas de cuerpo libre proporcionan una manera económica de satisfacer (y mostrar que lo hemos satisfecho) el Principio de la Acción y la Reacción. El diagrama de cuerpo libre de la niña del ejemplo se muestra en la Fig. 2.6. Puesto que ya hemos establecido con ayuda de la Fig. 2.5 que la fuerza ejercida por la pequeña sobre la cuerda será de $\mathbf{F}_{(\text{tracción})}$ $(-\hat{\mathbf{i}})$, entonces por el Principio de la Acción y la Reacción, la fuerza ejercida por la cuerda sobre la niña deberá ser $\mathbf{F}_{(\text{tracción})}$ $(+\hat{\mathbf{i}})$, como se muestra en la Fig. 2.6. En otras palabras, fuerzas consistentes de interacción se expresan por medio del simple escalar $\mathbf{F}_{(\text{tracción})}$ junto con una flecha direccional.

Ejemplo 2.5

Encontrar la trayectoria de una pelota de golf que sale despedida con una rapidez v_0 y un ángulo θ respecto a la horizontal: despréciese la resistencia del aire.



Solución

Conviene establecer un sistema coordenado ortogonal, como se muestra en el diagrama, y suponer $t = 0$ para el instante en que la pelota es golpeada por el bastón. Si x, y, z son las coordenadas del centro de masa de la pelota y puesto que la única fuerza externa en ella es su peso, $-mg\hat{\jmath}$, podemos escribir de acuerdo con la ecuación (2.13):

$$-mg\hat{\jmath} = m(\ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k})$$

Agrupando los coeficientes de $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ obtenemos

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -g \qquad \ddot{z} = 0$$

Integrando se obtiene:

$$\dot{x} = C_1 \qquad \dot{y} = -gt + C_2 \qquad \dot{z} = C_3$$

Debido a la manera en que hemos orientado los ejes x y z:

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos\theta \qquad \dot{y}(0) = v_0 \operatorname{sen}\theta \qquad \dot{z}(0) = 0$$

Por lo tanto

$$C_1 = v_0 \cos\theta \qquad C_2 = v_0 \operatorname{sen}\theta \qquad C_3 = 0$$

Integrando otra vez obtenemos

$$x = v_0(\cos\theta)t + C_4$$

$$y = \frac{-gt^2}{2} + v_0(\operatorname{sen}\theta)t + C_5$$

$$z = C_6$$

Las condiciones en el origen, $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, implican que $C_4 = C_5 = C_6 = 0$, por lo que la trayectoria del centro de masa de la pelota está dada por

$$x = v_0(\cos\theta)t$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0(\operatorname{sen}\theta)t$$

$$z = 0$$

que describen una parábola en el plano xy, o sea en el plano vertical definido por el punto de despegue y la dirección de la velocidad inicial.

Si t_1 es el tiempo en que se alcanza la elevación máxima, se halla que $\dot{y}(t_1) = 0$ da

$$0 = -gt_1 + v_0 \operatorname{sen}\theta$$

por lo que $t_1 = (v_0/g) \operatorname{sen}\theta$, de modo que la elevación máxima está dada por

$$y(t_1) = -\frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}^2\theta + \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}^2\theta = \frac{v_0^2}{2g}\operatorname{sen}^2\theta$$

Si t_2 es el tiempo en que la pelota toca el suelo (supuesto horizontal o a nivel), entonces

$$y(t_2) = 0 = -\frac{gt_2^2}{2} + v_0 t_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$t_2 = \frac{2v_0}{g}\operatorname{sen}\theta$$

que es el doble del tiempo t_1 empleado en alcanzar la elevación máxima. La distancia alcanzada por la pelota es

$$x(t_2) = v_0(\cos\theta)\left(\frac{2v_0}{g}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$= \frac{2v_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$= \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}2\theta$$

la cual, para una v_0 dada, queda maximizada por $\theta = 45°$. O sea que, para una rapidez inicial obtenemos un alcance máximo cuando el ángulo de despegue es de 45°.

Los resultados de este análisis se aplican al vuelo de cualquier proyectil libre, siempre que su trayectoria sea lo suficientemente limitada para que la fuerza gravitacional se pueda considerar constante (en magnitud y dirección) y pueda ignorarse el medio a través del cual se mueve (aire). La interacción con el aire no sólo es responsable del retardo del movimiento en una pelota de golf, sino también del hecho de que la trayectoria no está en general contenida en un plano. En una de las misiones a la Luna, en la década de los años 70, el astronauta Alan Shepard lanzó una pelota de golf a una distancia de más de un kilómetro gracias a la ausencia de la resistencia del aire, y lo que es más importante, al hecho de que la aceleración gravitacional en la superficie de la Luna es sólo un sexto de la correspondiente en la superficie de la Tierra.

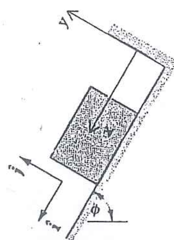
Ejemplo 2.6

Si el bloque de 20 kg mostrado en el diagrama se suelta desde el reposo, encontrar su rapidez después de que ha descendido una distancia de 5m sobre el plano. El ángulo $\varphi = 60°$ y los coeficientes de fricción (Coulomb) son

$$\mu_s(\text{estática}) = 0.30$$

$$\mu_k\ (\text{cinética}) = 0.25$$

Solución



En la formulación del problema estamos usando una terminología algo imprecisa, pero común, en lo que se refiere a la velocidad (rapidez) del bloque. De hecho sólo podemos hablar de la rapidez de un *punto* pero se supone tácitamente que el bloque es *rígido* y que se *traslada* en forma tal que todos sus puntos tienen la misma velocidad y aceleración. A diferencia del ejemplo anterior, en éste no conocemos todas las fuerzas exteriores que actúan en el cuerpo antes de efectuar el análisis, ya que la superficie que toca el cuerpo restringe el movimiento de éste. Tal restricción se manifiesta al expresar la velocidad (del centro de masa) del bloque por medio de $\dot{x}\hat{\mathbf{i}}$ y su aceleración por $\ddot{x}\hat{\mathbf{i}}$.

Con referencia al diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C$$

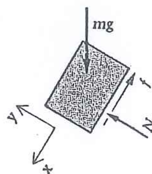
$$N\hat{\mathbf{j}} + mg(\operatorname{sen}\varphi\hat{\mathbf{i}} - \cos\varphi\hat{\mathbf{j}}) - f\hat{\mathbf{i}} = m\ddot{x}\hat{\mathbf{i}}$$

o bien

$$N = mg\cos\varphi$$

y

$$mg\operatorname{sen}\varphi - f = m\ddot{x}$$



Primero debemos determinar si el bloque se mueve. Por equilibrio, $\ddot{x} = 0$, y f está limitada por la desigualdad $0 \le f \le f_{\text{máx}} = \mu_s N$. Por consiguiente,

$$f = mg\operatorname{sen}\varphi \le \mu_s mg\cos\varphi = \mu_s N$$

o bien

$$\tan\varphi \le \mu_s$$

Pero

$$\tan 60° = 1.73 > 0.3 = \mu_s$$

Por esto el bloque se mueve (y al hacerlo actúa sobre él la fuerza $\mu_k N$ dirigida hacia arriba del plano, como se muestra en el diagrama). La expresión $\tan^{-1}(\mu_s)$ se denomina *ángulo de fricción*. Aquí $\tan^{-1}(\mu_s)$ es igual a 16.7°, que es el ángulo para el cual $\tan\varphi = \mu_s$; esto significa que para cualquier ángulo $\varphi > 16.7°$ (como en nuestro caso en que $\varphi = 60°$) se presentará un deslizamiento debido a la pérdida del equilibrio.

Ahora se resolvera la ecuación de movimiento para evaluar x:

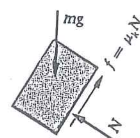
$$m\ddot{x} = mg\operatorname{sen}\varphi - \mu_k N$$

$$= mg\operatorname{sen}\varphi - \mu_k(mg\cos\varphi)$$

$$= mg(\operatorname{sen}\varphi - \mu_k\cos\varphi)$$

o bien

$$\ddot{x} = g(\operatorname{sen}\varphi - \mu_k\cos\varphi)$$



En consecuencia

$$\dot{x} = g(\operatorname{sen}\varphi - \mu_k\cos\varphi)t + C_1$$

y $C_1 = 0$ ya que $\dot{x}(0) = 0$ si $t = 0$ es el instante en que se suelta el bloque.

Por lo tanto,

$$x = \frac{g}{2}(\operatorname{sen}\varphi - \mu_k\cos\varphi)t^2 + C_2$$

y $C_2 = 0$ si medimos x de modo que $x(0) = 0$.

Si t_1 es el tiempo en que $x = d$, entonces

$$d = \frac{g}{2}(\operatorname{sen}\varphi - \mu_k\cos\varphi)t_1^2$$

Para $\varphi = 60°$, $\mu_k = 0.25$, $d = 5$ m y $g = 9.81$ m/s², obtenemos

$$5 = \left(\frac{9.81}{2}\right)[0.866 - 0.25(0.5)]t_1^2$$

en donde $t_1 = 1.17$ s.

Puesto que la velocidad está dada por $\dot{x}\hat{\mathbf{i}}$, la rapidez en t_1 es meramente la magnitud (o valor absoluto) de $\dot{x}(t_1)$ y

$$\dot{x}(t_1) = (9.81)[0.866 - 0.25(0.5)](1.17)$$

$$= 8.50 \text{ m/s}$$

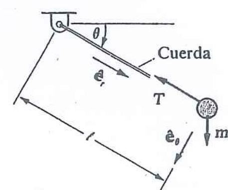
Finalmente notemos que la justificación de nuestros resultados numéricos puede verificarse del hecho que, debido a la fuerte inclinación del plano y al pequeño coeficiente de fricción, deben ser del mismo orden de magnitud que los obtenidos en el caso de una caída libre vertical (con aceleración g) para la cual

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{g}} = \sqrt{\frac{2(5)}{9.81}} = 1.01 \text{ s}$$

y

$$\text{velocidad} = \sqrt{2gd} = \sqrt{2(9.81)(5)} = 9.90 \text{ m/s}$$

Ejemplo 2.7



Una bola de masa m se libera del reposo estando la cuerda bien tensa y $\theta = 30°$. Encontrar la tensión en la cuerda durante el movimiento resultante.

Solución

En este problema haremos dos hipótesis básicas:

1. La cuerda es inextensible.
2. La cuerda está unida al centro de masa de la pelota (o lo que es lo mismo, la pelota es suficientemente pequeña para poder ser tratada como una partícula). El punto cuyo movimiento va a analizarse describe una trayectoria circular. El problema es similar al del Ejemplo 2.6, ya que aquí también se conoce de antemano la trayectoria del centro de masa; en consecuencia, entre las fuerzas externas existen incógnitas causadas por ciertas restricciones (la tensión de la cuerda en este problema y la reacción de la superficie en el ejemplo anterior).

Usando coordenadas polares (Sección 1.6) podemos expresar la aceleración como

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

Puesto que la coordenada polar r es aquí la constante ℓ, se tiene haciendo referencia al diagrama de cuerpo libre

$$-T\hat{e}_r + mg(\hat{e}_\theta \cos\theta + \hat{e}_r \operatorname{sen}\theta) = m(-\ell\dot{\theta}^2\hat{e}_r + \ell\ddot{\theta}\hat{e}_\theta)$$

de modo que

$$T = mg \operatorname{sen}\theta + m\ell\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

y

$$m\ell\ddot{\theta} - mg\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

La Ec. (1) da la tensión T si conocemos $\theta(t)$; la Ec. (2) es la ecuación diferencial que debemos integrar para obtener $\theta(t)$. En el Ejemplo 2.6 la contraparte de la Ec. (2) es $\ddot{x} =$ constante que fue fácilmente integrada.

Aquí tenemos una ecuación diferencial no trivial ya que $\ddot{\theta}$ es una función de θ y tenemos también la complicación adicional de que la ecuación es no lineal ($\cos\theta$ no es una función lineal de θ). Sin embargo, se puede efectuar una integración parcial de esta ecuación, para lo cual escribimos primero la ecuación en la forma estándar

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{\ell}\cos\theta = 0$$

y luego multiplicamos por $\dot{\theta}$ para obtener

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{g}{\ell}\dot{\theta}\cos\theta = 0$$

que reconocemos es igual a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta\right) = 0$$

o bien

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta = C_1 \quad \text{(constante)} \qquad (3)$$

La ecuación (3) se llama **integral de energía** de la Ec. (2) y está íntimamente relacionada con el Principio del Trabajo y la Energía Cinética, que se verá en la sección siguiente.

En este problema puede obtenerse la constante C_1 de la condición de que cuando $\theta = 30°$, $\dot{\theta} = 0$; así,

$$0 - \frac{g}{\ell}\operatorname{sen} 30° = C_1$$

o bien

$$C_1 = \frac{-g}{2\ell}$$

De la Ec. (3) obtenemos

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{\ell}(2\operatorname{sen}\theta - 1) \qquad (4)$$

que sustituida en la Ec. (1) da

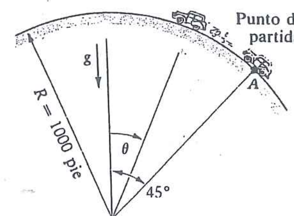
$$T = mg\operatorname{sen}\theta + mg(2\operatorname{sen}\theta - 1)$$

o bien

$$T = mg(3\operatorname{sen}\theta - 1) \qquad (5)$$

Aunque no hemos obtenido la dependencia de la tensión respecto al tiempo*, la integral de la energía ha permitido encontrar la dependencia de dicha tensión respecto a la posición de la pelota. Como podríamos haber intuido, la tensión máxima ocurre cuando $\theta = 90°$, en donde $T = (3(1) - 1)mg = 2mg$.

Ejemplo 2.8



Un auto acelera desde el reposo, aumentando su velocidad a la razón constante de $K = 6$ pie/s^2 (ver el diagrama anexo). El auto viaja sobre una ruta de perfil vertical circular, habiendo partido en el punto A. Hallar el tiempo y la posición del auto al dejar este la superficie debido a velocidad excesiva.

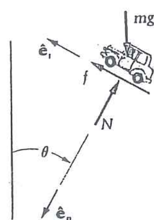
Solución

Antes de que el auto (tratado como partícula) se separe de la superficie, el diagrama de cuerpo libre es como se muestra en la figura. Resolveremos este problema en forma algebraica (sin introducir valores numéricos sino hasta el final). El propósito es ilustrar el concepto de parámetros adimensionales. La ecuación del movimiento en la dirección tangencial ($\hat{e}_t$) es

$$\Sigma F_t = m\ddot{s}$$

$$f - mg\operatorname{sen}\theta = mK \qquad (1)$$

*Esto requeriría resolver la ecuación diferencial (4) para determinar $\theta(t)$ y sustituirla en la Ec. (5).



La Ec. (1) muestra que la fricción ejercida sobre las llantas por el camino es la fuerza externa que hace ascender al auto por la trayectoria. Note que después de pasar la cima de la colina, sen $\theta < 0$, y entonces la fuerza de gravedad se *suma* a la fricción para acelerar el auto hacia abajo.

La siguiente ecuación de movimiento es la que ayudará en este problema: consiste en igualar $\Sigma \mathbf{F}$ y $m\mathbf{a}_C$ en la dirección normal.

Pregunta 2.3 ¿Son las componentes de $\Sigma \mathbf{F}$ y $m\mathbf{a}_C$ iguales en *todas* direcciones o sólo en las direcciones coordenadas?

$$\Sigma F_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

$$mg\cos\theta - N = \frac{m(Kt)^2}{R}. \qquad (2)$$

en donde $\dot{s} = \int \ddot{s}\, dt = Kt + C_1 = Kt$, ya que $\dot{s} = 0$ en $t = 0$.

Adviértase que el auto perderá contacto con el camino cuando N sea cero. (El terreno no puede tirar del auto hacia abajo auto para valores mayores de t, por que se requeriría una $N < 0$). Por lo tanto en el punto en que se pierde el contacto,

$$\not{m}g\cos\theta = \frac{\not{m}K^2t^2}{R} \qquad (3)$$

Pregunta 2.4 ¿Qué *significa* el hecho de que m se cancela en la Ec. (3)?

Ahora, θ está relacionada con s según

$$s = R\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \qquad (4)$$

De $\dot{s} = Kt$ obtenemos otra expresión para s:

$$s = \frac{Kt^2}{2} + C_2 = \frac{Kt^2}{2} \quad \text{(ya que } s = 0 \text{ cuando } t = 0) \qquad (5)$$

De las Ecs. (4) y (5) obtenemos

$$\frac{Kt^2}{2} = R\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{Kt^2}{2R} \qquad (6)$$

Sustituyendo θ de (6) en (3) resulta,

$$g\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{Kt^2}{2R}\right) = \frac{K^2t^2}{R}$$

o bien

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{Kt^2}{2R}\right) = \frac{Kt^2}{2R}\cdot\frac{2K}{g} \qquad (7)$$

La Ec. (7) permite encontrar el parámetro sin dimensiones $q = (Kt^2/2R)$, una vez que hemos selecionado un valor adimensional para la aceleración del auto, K/g. En este problema, por ejemplo,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - q\right) = 2q\left(\frac{6}{32.2}\right) = 0.373q \qquad (8)$$

La tabla siguiente muestra como (con ayuda de una calculadora)* podemos encontrar rápidamente el valor de q que resuelve la ecuación (8):

q	$\cos\left(\frac{\pi}{4} - q\right)$	$0.373q$
0.1	0.7742	0.0373
0.5	0.9595	0.1865
0.7854 (en la cima)	1	0.2930
1.0	0.9771	0.3730
1.3	0.8705	0.4849
1.6	0.6862	0.5968
1.7	0.6101	0.6341
1.69	0.6180	0.6304
1.68	0.6258	0.6266

Entonces en $q = Kt^2/2R \approx 1.68$, el auto se separa del camino debido a velocidad excesiva. Para $K = 6$ pie/s² y $R = 1000$ pie,

$$t = \sqrt{\frac{1.68 \times 2 \times 1000}{6}} = 23.7 \text{ s}$$

El ángulo en que se pierde contacto está dado por la Ec. (6):

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{Kt^2}{2R} = \frac{\pi}{4} - q$$

$$= \frac{\pi}{4} - 1.68$$

$$= -0.895 \text{ rad}$$

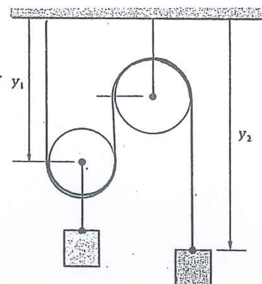
$$= -51.3°$$

La velocidad en el punto en que se pierde el contacto es $Kt = 6(23.7) = 142$ pie/s $= 97.0$ mi/h. Nótese que para $K/g = 6/32.2$, el ángulo de $-51.3°$ es el de pérdida de contacto para muchas combinaciones de t y R (en tanto $Kt^2/2R = 1.68$)

*Véase en el Apéndice *B* como obtener una solución numérica a este problema utilizando el método de Newton-Raphson.

Ejemplo 2.9

En el sistema mostrado, cada uno de los bloques pesa 10 lb y las poleas son mucho más ligeras. Encuentre las aceleraciones de los bloques suponiendo que la cuerda es inextensible y de masa despreciable.



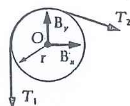
Solución

Si la fricción es despreciable en las cojinetes de las poleas y éstas son mucho más ligeras que los otros elementos del sistema, entonces la tensión en la cuerda no cambiará de un lado a otro de una polea. Mostramos esto considerando un diagrama de cuerpo libre de una polea siendo las tensiones en la cuerda T_1 y T_2. Por la Segunda Ley de Euler:

$$\Sigma \mathbf{M}_o = \int \mathbf{r} \times \mathbf{a}\, dm$$

$$= 0$$

si no se considera la masa de la polea. Por tanto



$$T_1 r - T_2 r = 0$$

o bien

$$T_1 = T_2$$

Regresando al problema, se tiene para el bloque de la derecha:

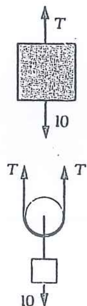
$$10 - T = \frac{10}{32.2}\ddot{y}_2 \qquad (1)$$

Y para el bloque y la polea de la izquierda:

$$10 - 2T = \frac{10}{32.2}\ddot{y}_1 \qquad (2)$$

Tenemos también una restricción cinemática que conduce a una relación entre y_1 y y_2 por ser la cuerda inextensible. Esta relación es $\dot{y}_2 = -2\dot{y}_1$ (ver el Ejemplo 1.8) y en consecuencia:

$$\ddot{y}_2 = -2\ddot{y}_1 \qquad (3)$$



Se obtienen los siguientes valores al resolver simultáneamente las Ecs. (1), (2) y (3):

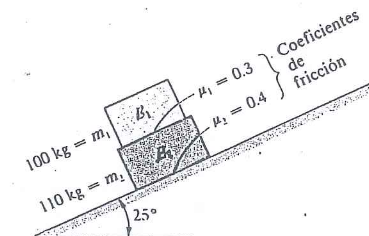
$$T = 6 \text{ lb}$$

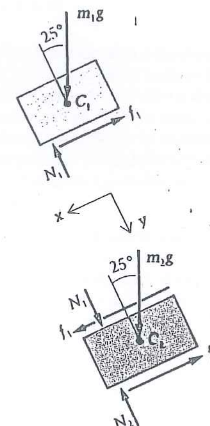
$$\ddot{y}_1 = -6.44 \text{ pie/s}^2$$

$$\ddot{y}_2 = 12.9 \text{ pie/s}^2$$

Ejemplo 2.10

Calcular las aceleraciones de los bloques mostrados en el diagrama cuando se sueltan desde el reposo. Luego repita el problema con los coeficientes de fricción invertidos.





Solución

Sabemos de la estática que *si* los dos bloques se mueven juntos, su movimiento tendrá lugar cuando

$$\tan 25° > \mu_2$$

$$0.466 > 0.4$$

o sea cuando 100 que es el caso aquí. Pero antes de que la solución sea completa, hay que determinar si uno de los bloques se mueve independientemente del otro. Consideremos el diagrama de cuerpo libre de cada bloque en traslación y escribamos las ecuaciones de movimiento:

$$\Sigma F_x = m_1\ddot{x}_{C_1} \Rightarrow 100(9.81)\,\text{sen}\,25° - f_1 = 100\ddot{x}_{C_1} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = m_1\ddot{y}_{C_1} \Rightarrow 100(9.81)\cos 25° - N_1 = 100\ddot{y}_{C_1} \overset{0}{} \qquad (2)$$

$$\Sigma F_x = m_2\ddot{x}_{C_2} \Rightarrow 110(9.81)\,\text{sen}\,25° + f_1 - f_2 = 110\ddot{x}_{C_2} \qquad (3)$$

$$\Sigma F_y = m_2\ddot{y}_{C_2} \Rightarrow 110(9.81)\cos 25° + N_1 - N_2 = 110\ddot{y}_{C_2} \overset{0}{} \qquad (4)$$

La suma de las Ecs. (1) y (3) da la "ecuación según x" del sistema total; la suma de las (2) y (4) da la "ecuación según y". (C es el centro de masa de los bloques combinados):

$$\Sigma F_x = (100 + 110)9.81\,\text{sen}\,25° - f_2$$

$$= 100\ddot{x}_{C_1} + 110\ddot{x}_{C_2} \qquad (5)$$

$$= (100 + 110)\ddot{x}_C$$

$$\Sigma F_y = (100 + 110)9.81\cos 25° - N_2$$

$$= (100 + 110)\ddot{y}_C \overset{0}{} = 0 \qquad (6)$$

Nótese que f_1 y N_1 desaparecen en (5) y (6), ya que en el sistema combinado constituyen fuerzas internas.

La Ec. (6) da $N_2 = 1870\ N$, independientemente de que el movimiento tenga lugar. La ecuación para el movimiento según x (Ecuación 5) muestra otra vez que si $f_{2\max} < mg$ (sen 25°), entonces uno o ambos bloques deben resbalar:

$$f_{2_{\max}} = \mu_2 N_2 = 0.4(1870) = 748 < 210(9.81)(0.423) = 871\ \text{N}$$

y entonces $\ddot{x}_C$ no puede ser cero. Suponiendo primero que *ambos* bloques se mueven, f_2 está entonces en su máximo:

$$f_2 = f_{2_{\max}} = 748\ \text{N}$$

Si se mueven *juntos* como un solo cuerpo, la Ec. (5) da:

$$\ddot{x}_C (= \ddot{x}_{C_1} = \ddot{x}_{C_2}) = (mg \operatorname{sen} 25° - f_{2_{\max}})/m$$

$$= (871 - 748)/210 = 0.586\ \text{m/s}^2$$

Sustituyendo esta aceleración en la Ec. (1) podemos revisar si el cuerpo $\mathcal{B}_1$ resbala adicionalmente respecto al $\mathcal{B}_2$:

$$f_1 = -100(0.586) + 415 = 356\ \text{N}$$

Pero el valor máximo que f_1 puede tener está dado por

$$f_{1_{\max}} = \mu_1 N_1 = 0.3(889) = 267\ \text{N}$$

Por consiguiente, $\mathcal{B}_1$ resbala sobre $\mathcal{B}_2$ y los bloques no se mueven juntos: la suposición fue incorrecta. Sustituimos entonces $f_1 = \mu_1 N_1$ en la Ec. (1) y obtenemos:

$$\ddot{x}_{C_1} = (415 - 267) \div 100 = 1.48\ \text{m/s}^2$$

Esta es la aceleración del bloque superior. Sustituyendo f_1 en la Ec. (3) se obtiene

$$456 + 267 - f_2 = 110\ddot{x}_{C_2}$$

$$723 - f_2 = 110\ddot{x}_{C_2}$$

Para que el bloque inferior no se mueva, $f_{2\max}$ tiene qe ser por lo menos de 723 N. Como es de 748 N, el bloque inferior *no* se mueve para esta combinación de parámetros, y así $\ddot{x}_{C2} = 0$.

Si los coeficientes de fricción se invierten ahora, nada cambia hasta que empezamos a analizar las seis ecuaciones. Tenemos así que

$$f_{2_{\max}} = \mu_2 N_2 = 0.3(1870)$$

$$= 561 < mg \operatorname{sen} 25° = 871\ \text{N} \qquad \text{(igual que antes).}$$

Nuevamente, $\ddot{x}_C$ no puede ser cero. Suponiendo otra vez que ambos bloques se mueven, f_2 es su máximo y la Ec. (5) da

$$\ddot{x}_C = (871 - 561) \div 210 = 1.48\ \text{m/s}^2$$

Sustituyendo esta aceleración en la Ec. (1), obtenemos

$$f_1 = 415 - 100(1.48) = 267 < \mu_1 N_1 = 0.4(889) = 356\ \text{N}$$

Esta vez hay más fricción que la necesaria para impedir que $\mathcal{B}_1$ resbale sobre $\mathcal{B}_2$. Entonces $\ddot{x}_{C_1}$ y $\ddot{x}_{C_2}$ son iguales a 1.48 m/s².

Problemas / Sección 2.2

2.18 En el Problema 1.114, ¿cuál es la aceleración de la piedra, justamente *después* de salir ésta despedida?

2.19 Se dispara una bala de cañón como se muestra en la Fig. P.2.19. Despreciando la resistencia del aire, encuentre el ángulo α requerido para que la bala caiga en la caja.

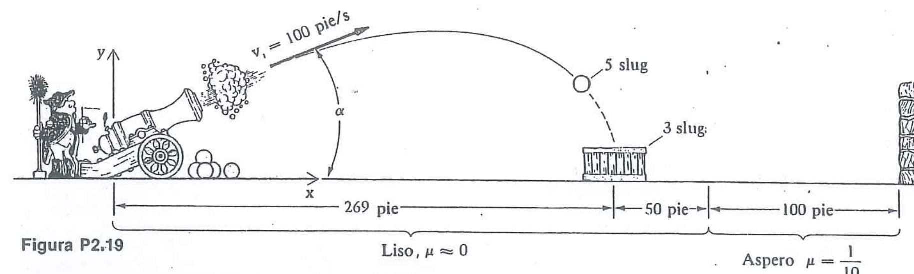


Figura P2.19

2.20 Un bateador pega a la pelota 4 pie por arriba del suelo. La bola sale dirigida hacia la barda central localizada a 455 pie de distancia. La pelota abandona el bat con una velocidad de 125 pie/s y una pendiente de 3 (vertical) a 4 (horizontal). Despreciando la resistencia del aire, determine si la bola golpea a la barda (si lo hace, ¿a qué altura sobre el suelo?) o si es un jonrón (si es, ¿a qué distancia pasa sobre la barda?)

2.21 Desde una gradería alta de un estadio de beisbol un espectador observa una pelota de fául. Viajando verticalmente hacia arriba, la bola pasa el nivel del espectador 1.5 s después de abandonar el bat y pasa nuevamente este nivel en su descenso 4 s después de ser golpeada. Sin considerar la fricción del aire, encuentre la altura máxima alcanzada por la pelota y determine su velocidad inicial al abandonar el bat (que se encuentra a 3 pie del suelo durante el impacto).

2.22 Un balón de futbol (Fig. P2.22) es tirado hacia la meta que se encuentra a 60 pie. El balón golpea al travesaño en el punto más alto de su trayectoria. Encuentre la velocidad y el ángulo con que el balón salió disparado y determine la duración de su recorrido.

2.23 Para la motocicleta de la Fig. P2.23 calcule la velocidad mínima en A para que salve el claro de 10 m y determine el correspondiente ángulo θ para que su aterrizaje sea tangente al terreno en B.

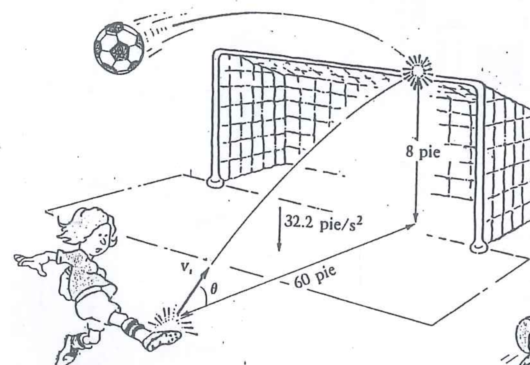


Figura P2.22

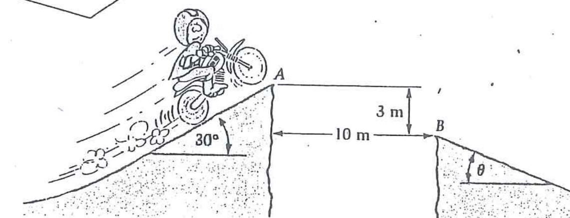


Figura P2.23

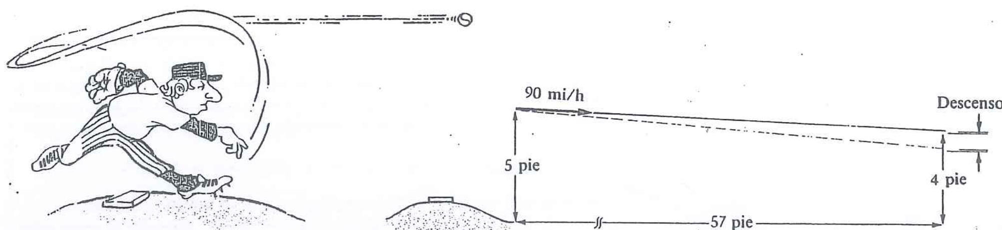


Figura P2.24

2.24 Un "pitcher" lanza una pelota a 90 mi/h, 5 pie por arriba del terreno (Fig. P2.24). Si en ausencia de gravedad la pelota llegara al "catcher" a 4 pie del suelo, calcule el descenso la trayectoria real causado por la gravedad. Desprecie la resistencia del aire.

2.25 En el problema anterior encuentre el radio de curvatura de la trayectoria del centro de la pelota en el instante que llega al "catcher".

2.26 En el problema anterior el bateador golpea la pelota que abandona el bat con un ángulo de 45° con el terreno. La pelota cae en la segunda base, a 90 $\sqrt{2}$ pies del bateador. ¿Cuál fue la velocidad de la pelota al dejar el bat?

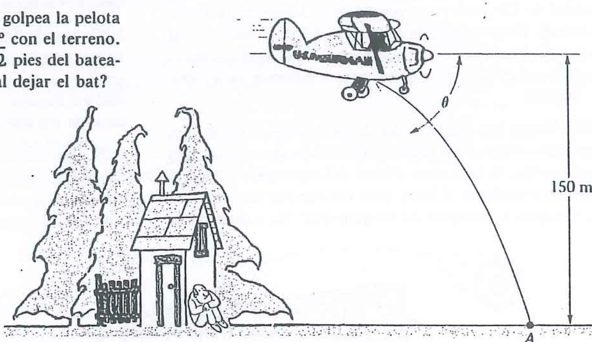


Figura P2.27

2.27 El piloto de un avión que vuela a 300 km/h desea soltar un paquete en la posición justa para que caiga en el punto A. (Véase la Fig. P2.27.) ¿Qué ángulo θ debe formar su visual al punto A en el instante que suelta el paquete?

2.28 Un jugador de dardos arroja uno de éstos en la posición indicada en la Fig. P2.28; el vector de la velocidad inicial forma un ángulo de 10° con la horizontal. ¿Cuál debe ser la rapidez inicial del dardo para que dé en el centro del blanco?

2.29 En el problema anterior suponga que la rapidez inicial del dardo es de 20 pie/s. ¿Cuál debe ser el ángulo α para dar en el centro del blanco?

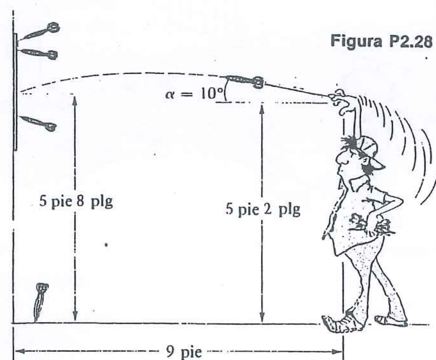


Figura P2.28

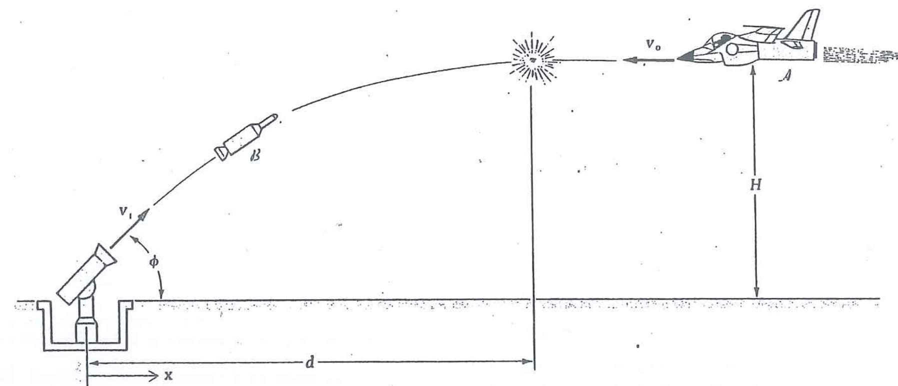


Figura P2.30

2.30 Encuentre el ángulo ϕ, la velocidad de disparo v_i y el tiempo t_f de intercepción para que el balístico mostrado en la Fig. P2.30 alcance al avión cuando $x = d$. El avión, en $x = D$ cuando se dispara el cohete, vuela horizontalmente con rapidez constante v_0 y altura H. ¿Qué se ha despreciado en su respuesta?

2.31 De la manguera mostrada en la Fig. P2.31 sale agua con una rapidez de 13 m/s desde una altura de 1 m. Calcule la altura H máxima y la distancia horizontal D alcanzada por el agua.

* **2.32** En el problema anterior encuentre el ángulo θ con el que se obtendrá un alcance máximo D para el agua.

* **2.33** Encuentre el alcance R del proyectil disparado sobre el plano inclinado de la Fig. P2.33. Calcule el máximo valor de R para una velocidad inicial dada u. (Angulo α = cte.)

2.34 Si un jugador de beisbol puede lanzar una pelota a 90 m de distancia en la Tierra, ¿a qué distancia la podrá lanzar en la Luna donde la aceleración gravitacional es sólo 1/6 de la de la Tierra? Desprecie la altura del jugador y la resistencia del aire en la Tierra.

2.35 Un niño deja caer una piedra en un pozo y la oye golpear el agua 2 s después. (Fig. P2.35.) Si la velocidad del sonido v_s es de 1100 pie/s, determine la profundidad del agua en el pozo sin considerar v_s. Compare los dos resultados.

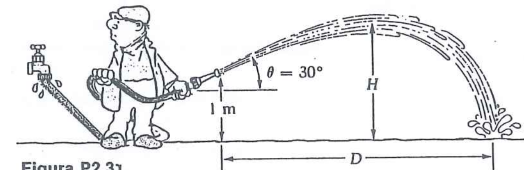


Figura P2.31

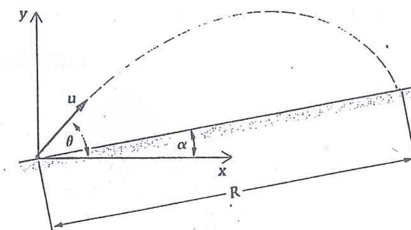


Figura P2.33

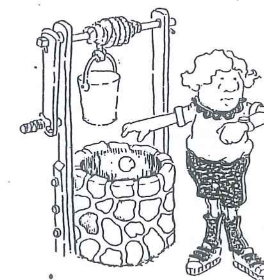


Figura P2.35

2.36 Durante el despegue, el transbordador espacial es impulsado hacia arriba por dos cohetes de propulsante sólido con 12.9×10^6 N de empuje cada uno, y por tres motores de propulsante líquido con empuje de 1.67×10^6 N cada uno; el peso total del transbordador (motores, tanques, carga útil, cohetes) es de 19.8×10^6 N. Calcule la aceleración experimentada por la tripulación durante el despegue. (Ésta es diferente de la aceleración inicial en los primeros vuelos tripulados; demuestre esto comparándola con el cohete lunar Apolo que pesaba 6.26×10^6 lb en el despegue y era impulsado por cinco motores con un empuje de 1.5×10^6lb en cada uno). Desprecie el cambio en masa entre el encendido y el despegue.

2.37 ¿Cuál es el peso aparente, percibido por la presión en los pies, de un pasajero en un elevador que acelera a razón de 8 pie/s^2, (a) hacia arriba o bien (b) hacia abajo?

2.38 Cuando una persona se pesa en uno de los polos de la Tierra, la lectura en la báscula es W. Suponiendo que la Tierra es esférica (radio = 4000 mi) y que constituye un marco inercial, ¿cuánto se leerá en la misma báscula situada ésta en el ecuador?

2.39 Repita el Problema 2.38 suponiendo que la órbita de la Tierra es circular y que es inercial un marco de referencia que contenga el centro de la Tierra, los polos y el centro del Sol. Desprecie la inclinación del eje de la Tierra.

2.40 En una emergencia el conductor de un auto frena bloqueando las cuatro ruedas. Encuentre el tiempo y la distancia requerida para detener el auto en función del coeficiente de fricción μ de la velocidad inicial v y de la aceleración de la gravedad g.

2.41 Se coloca una caja en la plataforma de un camión. Encuentre la aceleración máxima del camión para la cual la caja no resbala en la plataforma. El coeficiente de fricción entre la caja y la plataforma es μ.

2.42 El camión de la Fig. P2.42 se encuentra viajando a 45 mi/h. Encuentre la distancia mínima en que puede detenerse sin que resbale la caja de 250 lb. Suponga que la caja no puede voltearse.

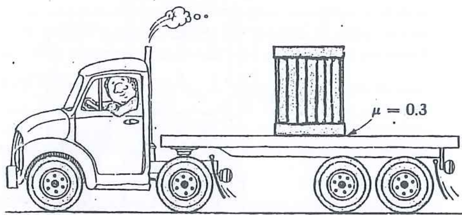


Figura P2.42

2.43 El bloque de 200 lb se encuentra en reposo en el suelo ($\mu = 0.2$) antes de la aplicación de la fuerza de 50 lb, como se muestra en la figura P2.43. ¿Cuál es la aceleración del bloque inmediatamente después de la aplicación de la fuerza? Suponga que el bloque es muy ancho y no puede voltearse.

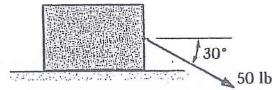


Figura P2.43

2.44 Repita el Problema 2.43 para el caso en que la fuerza de 50 lb se aplique como se muestra en la Fig. P2.44.

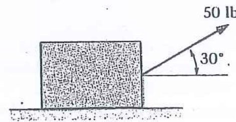


Figura P2.44

2.45 Encuentre la máxima fuerza P para que $\mathcal{A}$ no resbale sobre $\mathcal{B}$. (Fig. P2.45).

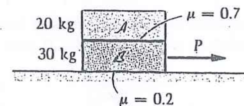


Figura P2.45

2.46 Resuelva el problema anterior si P se aplica a $\mathcal{A}$ en vez de $\mathcal{B}$.

2.47 Los bloques en la Fig. P2.47 se encuentran en contacto al resbalar sobre el plano inclinado. Las masas de los bloques son $m_{\mathcal{B}} = 25$ kg y $m_{\mathcal{A}} = 20$ kg; los coeficientes de fricción entre los bloques y el plano son 0.5 para $\mathcal{A}$ y 0.1 para $\mathcal{B}$. Determine la fuerza entre los bloques y encuentre su aceleración común.

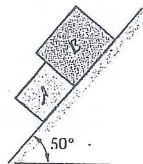


Figura P2.47

2.48 En el problema anterior, sea μ el coeficiente de fricción entre $\mathcal{A}$ y el plano. Usando las dos ecuaciones de movimiento de los bloques, encuentre el intervalo de valores de μ para el cual los bloques se separarán al soltarlos desde el reposo.

2.49 Si todas las superficies son lisas en el sistema de bloques y planos de la fig. P2.49, encuentre la fuerza P que impartirá al bloque $\mathcal{B}$ una aceleración de 4 pie/s^2 hacia arriba sobre el plano.

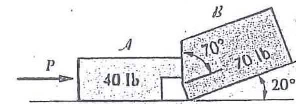


Figura P2.49

2.50 Repita el problema anterior si los planos son aún lisos pero el coeficiente de fricción entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es $\mu_s \approx \mu_k = 0.3$

2.51 Repita el problema anterior si el coeficiente de fricción es de 0.3 para *todas* las superficies en contacto.

* 2.52 En la Fig. P2.52 se generaliza el sistema del Ejemplo 2.10. Demuestre que

a. Si $\tan \varphi > \mu_2$, tendrá lugar el movimiento y que entonces:
b. Si $\mu_2 \leq \mu_1$, los bloques se moverán juntos.
c. Si $\mu_2 > \mu_1$, $\mathcal{B}_1$ resbalará sobre $\mathcal{B}_2$. En este caso el bloque inferior no se moverá si

$$\tan \varphi \leq \mu_2 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{m_1}{m_2}$$

d. Si $\tan \varphi \leq \mu_2$, el bloque inferior no se moverá. En este caso, el bloque superior resbalará sobre él si y sólo si $\tan \varphi > \mu_1$.

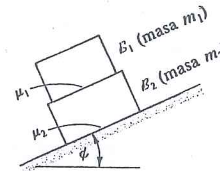


Figura P2.52

2.53 En la Fig. P2.53 las masas de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son, respectivamente, de 10, 60 y 50 kg. El coeficiente de fricción entre $\mathcal{B}$ y el plano es $\mu = 0.35$; las poleas tienen masa y fricción despreciables. Encuentre las tensiones en cada cuerda y la aceleración de B al liberarse éste del reposo.

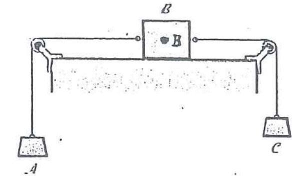


Figura P2.53

2.54 Si el sistema en la Fig. P2.54 se libera del reposo, ¿cuánto tiempo tarda el bloque de 5 lb en caer 2 pie? Desprecie la fricción en la polea y suponga que la cuerda es inextensible.

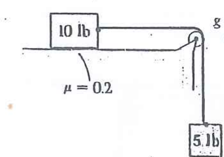


Figura P2.54

2.55 El coeficiente de fricción $\mu = 0.1$ es el mismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que entre $\mathcal{B}$ y el plano. (Vea la Fig. P2.55.) Encuentre la tensión en la cuerda en el instante en que el sistema sale del reposo. Desprecie la fricción en la polea.

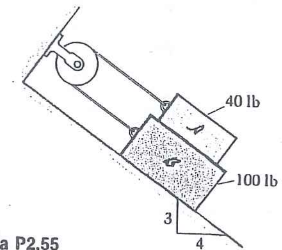


Figura P2.55

2.56 Una niña nota que algunas veces la pelota $\mathcal{M}$ no resbala en la superficie inclinada del juguete $\mathcal{T}$ cuando la empuja a lo largo del piso. (Vea la Fig. P2.56.) ¿Cuál es la aceleración mínima $a_{\min}$ de $\mathcal{T}$ para impedir este movimiento? Suponga lisas todas las superficies.

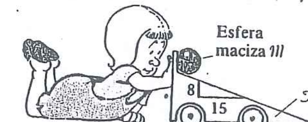


Figura P2.56

2.57 En el problema anterior suponga que la aceleración de $\mathcal{T}$ es $2a_{\text{min}}$. ¿Cuál es la fuerza normal entre la superficie vertical de $\mathcal{T}$ y la pelota? El peso de la pelota es 0.06 lb.

2.58 Sea la masa $\mathcal{B}$ en el Problema 1.57 igual a 20 kg. ¿Cuál debe ser entonces la masa de   para producir el movimiento prescrito? Desprecie las masas de las poleas.

2.59 Encuentre la tensión en la cuerda del Problema 1.61 al comenzar el movimiento si la masa de $\mathcal{A}$ es de 10 kg.

2.60 Para el sistema de leva y seguidor o contralera del Problema 1.65, encuentre la fuerza que debe aplicarse a la leva para producir el movimiento. Sean m_1 y m_2 las masas de la leva y del seguidor, respectivamente; desprecie la fricción.

2.61 En la Fig. P2.61 las masas de los bloques $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son 50, 20 y 30 kg, respectivamente. Calcule las aceleraciones de cada uno si se quita la mesa. ¿Qué bloque llegará primero al suelo? ¿Cuánto tardaría?

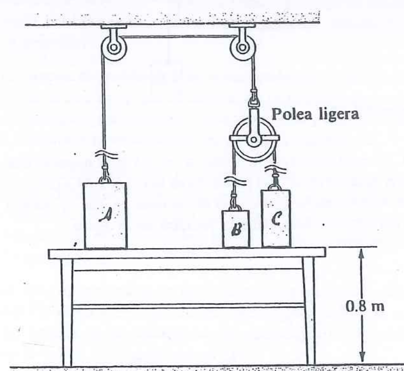


Figura P2.61

2.62 El cuerpo $\mathcal{A}$ en la Fig. P2.62 pesa 223 N y el cuerpo $\mathcal{B}$ pesa 133 N. Desprecie el peso de la barra rígida que conecta $\mathcal{A}$ con $\mathcal{B}$. El coeficiente de fricción es 0.3 entre todas las superficies. Determine las aceleraciones de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ justo después de cortar la cuerda.

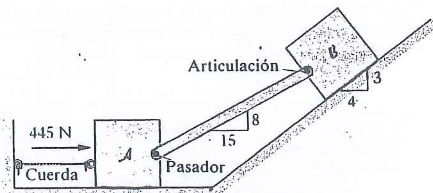


Figura P2.62

2.63 Una partícula P se mueve a lo largo de una superficie curva $\mathcal{S}$ como se muestra en la Fig. P2.63. Demuestre que P permanecerá en contacto con $\mathcal{S}$ siempre que en todo momento $v \geq \sqrt{\rho g \cos \alpha}$.

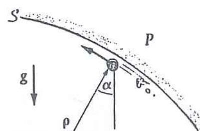


Figura P2.63

2.64 Encuentre la condición para que se mantenga el contacto si P se mueve a lo largo del *exterior* de una superficie definida por la misma curva que en el problema anterior, (Ver la Fig. P2.64).

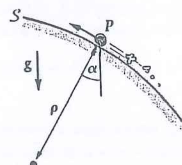


Figura P2.64

2.65 Una bola de masa m unida a una cuerda es girada por un niño a velocidad constate v_0 en un círculo horizontal de radio R. (Ver la Fig. P2.65.)

a. ¿Qué mantiene en alto a la bola?
b. ¿Cuál es la tensión en la cuerda?
c. Si el niño incrementa la velocidad de la bola, ¿qué proporciona la fuerza en la dirección de avance necesaria para producir la $\ddot{s}$? Aclare el punto.

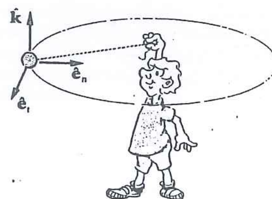


Figura P2.65

2.66 Existe una velocidad llamada *velocidad cónica* para la cual una bola unida a una cuerda, en ausencia de fricción, se mueve según una circunferencia horizontal específica (la cuerda describe una superficie cónica) sin ninguna componente radial o vertical de la velocidad (Fig. P2.66). Si ℓ es la longitud de la cuerda y $k\ell$ es el radio de la circunferencia en que se mueve la bola, encuentre la velocidad cónica en términos de k, ℓ y la aceleración de la gravedad.

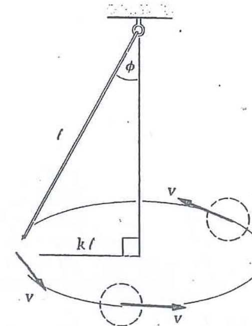


Figura P2.66

2.67 Los satélites de comunicaciones se colocan en *órbitas geosincrónicas*, en las cuales los satélites tienen siempre la misma posición en el cielo (fig. P2.67).

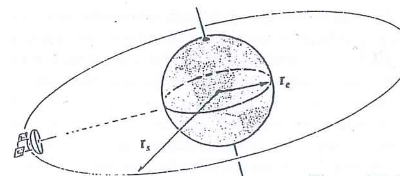


Figura P2.67

a. Explique por qué esta órbita debe encontrarse en el plano ecuatorial. ¿Por qué debe ser circular?
b. Si los satélites deben permanecer en órbita sin consumir energía, encuentre la importante relación del radio de la órbita r_s al radio de la Tierra r_T. *Sugerencia:* Use la ley de la gravitación universal de Newton:

$$F = \frac{Gm_s m_e}{r_s^2}$$

junto con la ley del movimiento en la dirección radial y note que si el satélite estuviese en la superficie de la Tierra, la fuerza sería:

$$F = m_s g = \frac{Gm_s m_e}{r_e^2}$$

de modo que el producto Gm_T podría escribirse como gr_T^2. Use $r_T = 3960$ mi.

2.68 Empleando el resultado del problema anterior, demuestre que se requiere un mínimo de tres satélites en órbitas geosincrónicas para lograr una comunicación continua con toda la Tierra con excepción de pequeñas regiones cercanas a los polos.

2.69 En función de los parámetros δ, R, μ y g definidos en la Fig. P2.69, calcule la velocidad mínima para la cual la motocicleta no se deslizaría hacia abajo dentro de la pared interior del cilindro.

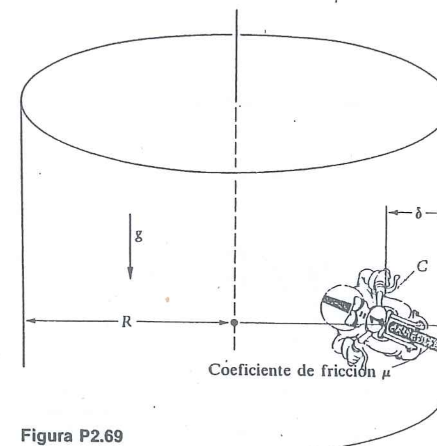


Figura P2.69

2.70 En la Fig. P2.70 se muestra un juego mecánico en el que la gente se apoya contra la pared de un cilindro que gira a cierta velocidad angular ω_0. El piso se retira y desciende pero la gente permanece contra la pared al mismo nivel. Use la ecuación $\Sigma F_n = ma_{Cn} = mv^2/R$ para explicar el fenómeno. Observando que cada persona está en "equilibrio vertical", encuentre la mínima ω_0 para impedir que la gente resbale si $R = 2$ m y el coeficiente de fricción entre la pared y la ropa es $\mu = 0.5$.

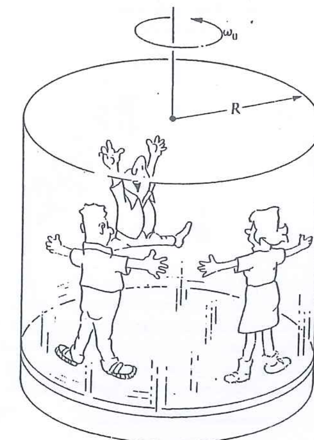


Figura P2.70

2.71 La ecuación de la elipse mostrada en la Fig. P2.71 es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Demuestre que el radio de curvatura ρ de la elipse es, en función de x:

$$\rho = \frac{[a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2]^{3/2}}{a^4 b}$$

Sugerancia: Recuerde del Cálculo que si $y = y(x)$, entonces

$$\rho = \left|\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}\right|$$

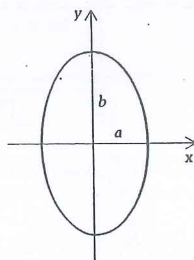


Figura P2.71

2.72 En el juego mecánico mostrado en la Fig. P2.72, el lazo más alto es de 100 pie y tiene aproximadamente la forma de un elipse con un ancho de 95 pie. El paseo promete: "cinco veces la gravedad terrestre a una velocidad de más de 50 mi/h". Use el resultado del problema anterior para calcular el radio de curvatura en la base del lazo. Suponiendo que la fuerza normal resultante es 5 mg, determine si la máxima velocidad es de más de 50 mi/h. Considere cada carro como una partícula.

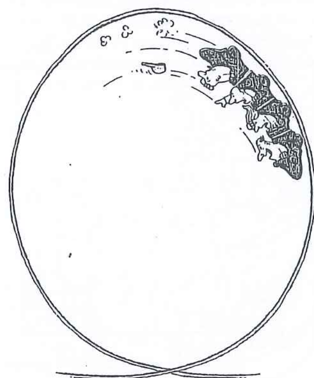


Figura P2.72

2.73 Si la barra $\mathscr{B}$ de la Fig. P2.73 se levanta *lentamente*, el bloque $\mathscr{A}$ empezará a resbalar cuando el ángulo sea $\theta = \tan^{-1}(\mu)$; en Estática se mostró que esta es una manera de determinar el coeficiente de fricción μ. Suponga ahora que la barra empieza a girar repentinamente partiendo de la posición $\theta = 0$ con velocidad angular constante ω_0 ⮌. Si $\mu = 0.5$ y $r\omega_0^2 = 0.1$ g, calcule el ángulo θ para el cual $\mathscr{A}$ resbala hacia abajo sobre $\mathscr{B}$ y compare el resultado con $\tan^{-1} \mu = \tan^{-1} (0.5)$.

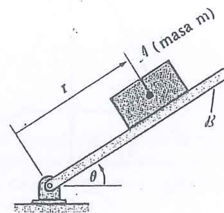


Figura P2.73

2.74 En el problema anterior increméntese el parámetro $r\omega_0^2/g$ manteniendo $\mu' = 0.5$. ¿Para qué valor del parámetro resbalará $\mathscr{A}$ *hacia afuera* sobre $\mathscr{B}$? ¿A qué ángulo ocurrirá esto?

* **2.75** Las cuatro barras ligeras están articuladas en el origen y en cada masa de modo que cuando esos siete cuerpos giran respecto a la vertical, las masas m se mueven hacia afuera y la masa M desliza suavemente hacia arriba sobre la barra vertical Oy. Existe una relación entre ϕ, ω_0, l, g, m y M tal que a la velocidad angular particular ω_0, los cuerpos se comportan como un cuerpo rígido (ϕ permanece constante. Encuentre esta relación. *Sugerencia*: Use diagramas de cuerpo libre para m y M, y escriba las ecuaciones de movimiento para cada uno. Las incógnitas son F_T (fuerza en cada barra superior), F_B (fuerza en cada barra inferior), ω_0 y ϕ. Aparecerán tres ecuaciones útiles.

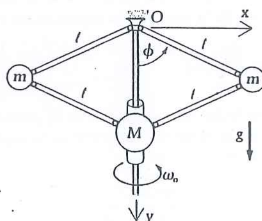


Figura P2.75

2.76 Una bola se mueve radialmente hacia afuera en la ranura de un disco horizontal que gira alrededor del eje z vertical. En el instante mostrado en la Fig. P2.76, la bola está a 3 plg del centro del disco con una velocidad de 4 plg/s relativa a éste. Si $\dot{\theta} = 2$ rad/s y es constante, encuentre $\ddot{r}$ y la fuerza ejercida sobre la bola por el disco en tal instante. Suponga fricción nula y un peso de 0.05 lb para la bola.

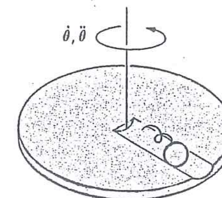


Figura P2.76

2.77 Una partícula P de masa m se mueve sobre una mesa horizontal lisa y está unida a una cuerda ligera e inextensible que está siendo tirada hacia abajo por una fuerza $F(t)$, como se muestra en la Fig. P2.77. Demuestre que las ecuaciones diferenciales del movimiento de P son

$$-F = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \qquad (1)$$

$$0 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad (2)$$

Luego muestre que la Ec. (2) implica que $r^2\dot{\theta}$ = constante.

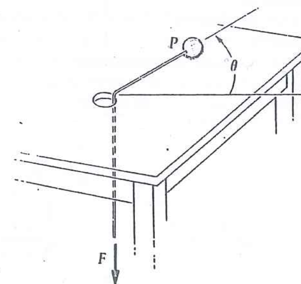


Figura P2.77

2.78 En el problema anterior suponga que la partícula está en $r = r_0$ cuando $t = 0$ y que la parte de la cuerda por debajo de la mesa está descendiendo con velocidad constante v_C. Si la componente transversal de la velocidad de P es $r\dot{\theta} = r_0 \dot{\theta}_0$ en $t = 0$, encuentre la tensión en la cuerda en función del tiempo t.

2.79 Un pescador con masa de 70 kg está en dificultades; un tiburón tira de él en la superficie de un lago congelado. En el instante mostrado en la Fig. P2.79, el pescador tiene una componente de velocidad, perpendicular al radio r, de $v_1 = 0.3$ m/s cuando $r = R_1 = 5$ m. Si el tiburón hala con una fuerza de 100 N, encuentre el valor de v_2 cuando el radio sea $R_2 = 1$ m. *Sugerencia:*

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{(d/dt)(r^2\dot{\theta})}{r} \quad \text{y} \quad \Sigma F_\theta = ?$$

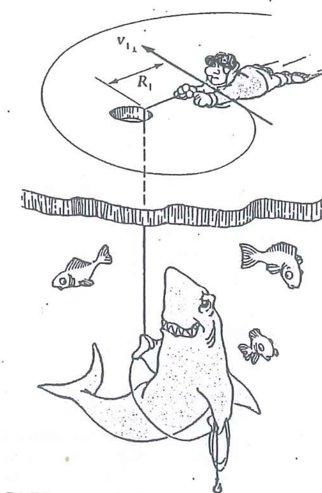


Figura P2.79

2.80 En el problema anterior muestre que la ecuación diferencial del movimiento radial del pescador es $\ddot{r} = 2.25/r^3 - (10/7)$. Use $\ddot{r}\dot{r} = s/dt\,(\dot{r}^2/2)$ para integrar esto y si $\dot{r} = 0$ cuando $r = 5$ m, demuestre que la componente radial ($\dot{r}$) de la velocidad del pescador cuando $r = 1$ m, es 3.04 m/s.

2.81 La partícula P de masa m describe un círculo de radio a sobre la mesa lisa mostrada en la Fig. P2.81. La partícula P está unida por medio de una cuerda inextensible a la partícula estacionaria de masa M. Encuentre el período de una revolución de P.

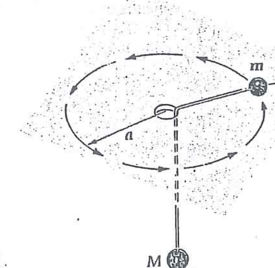


Figura P2.81

* **2.82** Un peso de 100 lb cuelga libremente de una cuerda ligera (Fig. P2.82). Ésta se estira hacia arriba por una fuerza igual a 150 lb cuando $t = 0$, pero que disminuye uniformemente en magnitud a razón de 1 lb por cada pie ascendido. Encuentre el tiempo requerido para levantar el peso hasta la plataforma partiendo del reposo y determine su velocidad al alcanzarla.

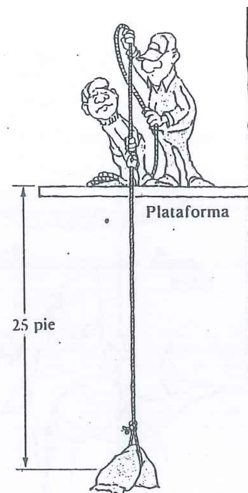


Figura P2.82

* **2.83** Repita el Problema 2.83, pero esta vez suponga que la fuerza *crece* a razón de 1 lb por pie de ascenso.

2.84 La aceleración de la gravedad varía con la distancia z sobre la superficie de la Tierra según.

$$\ddot{z} = \frac{-gR^2}{[R + z]^2}$$

en donde g es la aceleración gravitatoria en la superficie y R es el radio de la Tierra. Encuentre la velocidad mínima v_i de partida que un proyectil debe tener para escapar de la Tierra si se dispara verticalmente (Fig. P2.84). *Sugerencia*: Para no regresar a la Tierra se requiere la condición de que $v \to 0$ cuando z se vuelve muy grande para la v_i *mínima* posible.

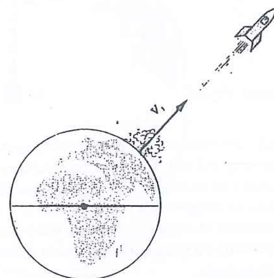


Figura P2.84

2.85 La masa m mostrada en la Fig. P2.85 recibe una velocidad inicial v_0 en la dirección x. Se mueve en un medio que resiste su movimiento con una fuerza proporcional a su velocidad; el factor de proporcionalidad es la constante K. Despeja $v(x)$ y determine qué tan lejos viaja la masa antes de detenerse. Luego despeje para $v(t)$ si $v = v_0$ cuando $t = 0$.

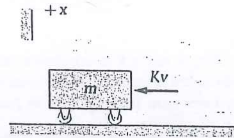


Figura P2.85

2.86 Usando el resultado del problema anterior y expresando v como dx/dt, calcule $x(t)$ si $x = 0$ cuando $t = 0$.

2.87 Los perros idénticos de plástico mostrados en la Fig. P2.87 están pegados a imanes y se atraen con una fuerza $F = K/(2x)^2$, en donde K es una constante relacionada con la fuerza de los imanes. Calcule las velocidades con que los perros chocan si están separados inicialmente por una distancia S.

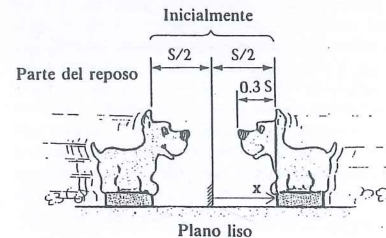


Figura P2.87

2.88 Una bola se deja caer desde lo alto de un edificio. El movimiento es resistido por el aire, que opone una fuerza resistente dada por Dv^2; D es una constante y v es la velocidad de la bola. Determine la *velocidad terminal* (velocidad constante de caída) si no hay límite en la altura de la caída. ¿Cuál es la altura para la cual la pelota choca con el suelo con 95% de la velocidad terminal?

* **2.89** En un cierto intervalo de velocidades, el efecto de la resistencia del aire sobre un proyectil es proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo; si éste se considera como una partícula la *fuerza resistente* está dada por $F_D = \frac{1}{2}\rho A C_D v^2$, en donde ρ es la densidad del aire, A es el área proyectada del cuerpo en un plano normal al vector velocidad y C_D es un coeficiente que depende de la forma del cuerpo. Si $\rho A C_D = 0.0004$ (lb · s²/pie² para la bala de cañón

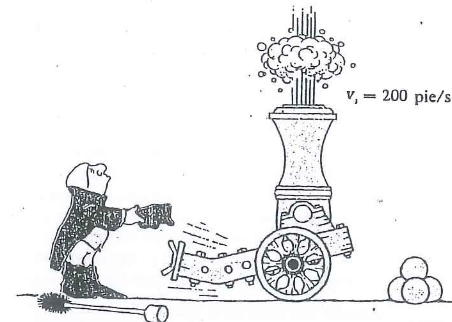


Figura P2.89

de 76 lb de la Fig. P2.89, encuentre la altura máxima que alcanza. Compare su resultado con la respuesta obtenida al despreciar la resistencia del aire.

* **2.90** En el problema anterior, encuentre la velocidad de la bala justo antes de chocar con el suelo; nuevamente compare el resultado con el caso de resistencia nula del aire.

* **2.91** Un paracaidista de 160 lb en la "posición de caída libre estable extendido" (Fig. P2.91) alcanza una velocidad de 174 pie/s en 12 s después de saltar de un dirigible estacionario. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, resuelva la ecuación diferencial del movimiento

$$\ddot{y} = g - \frac{k}{m}\dot{y}^2$$

y determine la constante k.

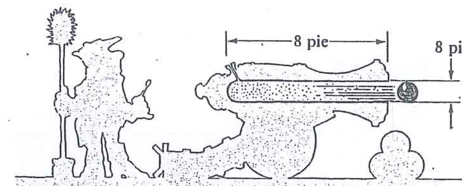


Figura P2.95

* **2.92** En el problema anterior suponga que el paracaidista abre su paracaídas a una altura de 1000 pie. Si el valor de k es entonces 0.63 lb/(pie/s,² encuentre la velocidad con la que el paracaidista llega al suelo, siendo v_i = 174 pie/s.

2.93 El carromato de masa m mostrado en la Fig. P2.93 corre a una velocidad v_0 y va a ser frenado parcialmente por medio de un paracaídas; éste ejerce una fuerza F_d proporcional al cuadrado de la velocidad del carro, $F_d = Cv^2$. Despreciando la fricción y la inercia de las ruedas, determine la distancia recorrida por el vehículo antes de que su velocidad sea 40% de v_0. Si el carro y el conductor pesan 1000 lb y C = 0.182 lb · s²/pie², encuentre la distancia en pies.

2.94 En el problema anterior, suponga que la velocidad del carro al abrirse el paracaídas es de 237 mi/h. Halle el tiempo que le toma alcanzar el 40% de esa velocidad.

* **2.95** Una bala de 50 lb es disparada por el cañón mostrado en la Fig. P2.95. La presión de los gases en expansión es inversamente proporcional al volumen detrás de la bala. Esta presión es inicialmente de 10 ton/plg²; justamente antes de salir el proyectil de la boca del cañón, la presión es 1/10 de este valor. Encuentre la velocidad de salida de la bala.

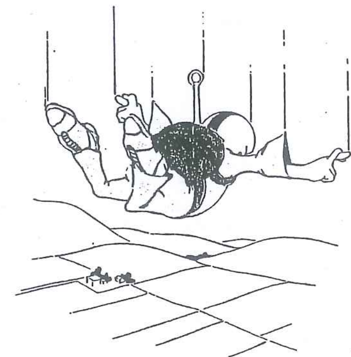


Figura P2.91

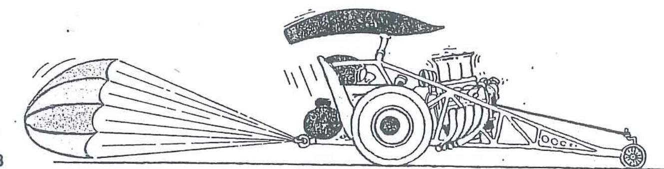


Figura P2.93

2.96 El bloque de masa m mostrado en la Fig. P2.96 se lleva lentamente hasta el punto de contacto con el extremo inferior del resorte y luego (en $t = 0$) se suelta. Escriba la ecuación diferencial que gobierna el movimiento subsecuente, describiendo claramente su elección del parámetro de desplazamiento. ¿Cuáles son las condiciones iniciales? Calcule la fuerza máxima inducida en el resorte y el tiempo en que esto ocurre por primera vez.

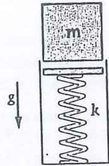


Figura P2.96

2.97 Demuestre que para una partícula P que se mueve en un medio viscoso en el que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad (Fig. P2.97), las ecuaciones diferenciales de su movimiento son

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}$$

$$m\ddot{y} = -k\dot{y} - mg$$

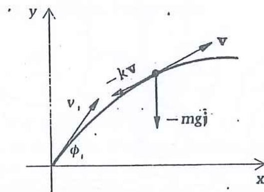


Figura P2.97

2.98 En el problema anterior, muestre por integración que las componentes de la velocidad de P están dadas por

$$\dot{x} = v_i \cos\phi_i \, e^{-kt/m}$$

$$\dot{y} = \frac{-mg}{k} + \left(v_i \operatorname{sen}\phi_i + \frac{mg}{k}\right)e^{-kt/m}$$

2.99 Continúe con el ejercicio precedente y muestre que la posición de la partícula está dada por las ecuaciones

$$x = \frac{mv_i \cos\phi_i}{k}(1 - e^{-kt/m})$$

$$y = \frac{m}{k}\left[\left(\frac{mg}{k} + v_i \operatorname{sen}\phi_i\right)(1 - e^{-kt/m}) - gt\right]$$

Demuestre además que x y $\dot{y}$ se acercan a las asíntotas cuando $t \to \infty$. (El valor límite de $\dot{y}$ se conoce como la velocidad terminal de P, después de que el peso se equilibra con la reacción viscosa y la aceleración se anula.

* **2.100** Una partícula se mueve en el interior de un aro vertical liso y fijo de radio a. Si pasa por el punto más bajo A con velocidad $\sqrt{7ga/2}$, demuestre que saldrá del aro a una altura $3a/2$ por encima de A y llegará al aro nuevamente en A.

* **2.101** Las dos partículas en la Fig. P2.101 se encuentran en reposo sobre una mesa horizontal lisa y unidas entre sí por una cuerda inextensible que pasa a través de un pequeño anillo liso fijo a la mesa. La partícula más ligera (masa m) es impulsada ahora con velocidad v_0 perpendicular a la cuerda. Demuestre que la otra partícula chocará con el anillo con velocidad $v_0\sqrt{3}/(2\sqrt{n}+1)$. *Sugerencia:* Use coordenadas polares y note que $r^2\dot{\theta}$ es constante para cada partícula.

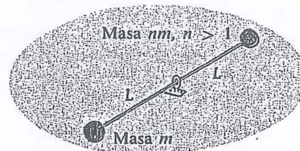


Figura P2.101

En cada uno de los tres problemas siguientes se deberá usar también la segunda ley de Euler (Ec. 2.8),

2.102 La barra rígida uniforme $\mathcal{B}$ en la Fig. P2.102 pesa 60 lb y está articulada en A (y sujeta por el cable DB) al marco de referencia $\mathcal{I}$. Si se le da al marco una aceleración a = 32.2 pie/s² como se indica, determine la tensión T en el cable y la fuerza ejercida por el pasador en A sobre la barra.

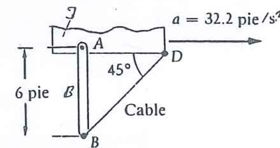


Figura P2.102

2.103 La fuerza F ocasiona que un carro se mueva con movimiento rectilíneo horizontal definido por una aceleración constante de 20 pie/s² (vea la Fig. P2.103). Una barra rígida delgada y homogénea, con peso de 32.2 lb y longitud de 6 pie está soldada al carro en B. Encuentre la magnitud y dirección del momento flexionante que el carro ejerce sobre la barra en B.

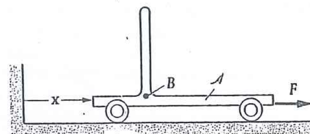


Figura P2.103

2.104 Una barra delgada uniforme de densidad ρ, área transversal A y longitud L, está sometida a vibraciones transversales libres de pequeña amplitud dadas por la ecuación $y(x, t) = Y\operatorname{sen}(\pi x/L)\operatorname{sen}\omega t$, en donde y es el desplazamiento perpendicular al eje x de la barra. (Vea la Fig. P2.104). Despreciando otras componentes del desplazamiento (y por consiguiente, la aceleración), calcule la fuerza máxima generada en uno de los apoyos durante el movimiento. *Sugerencia:* Use las Ecs. (2.4) y (2.8).

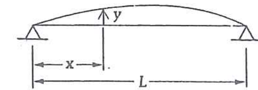


Figura P2.104

2.3 Trabajo y Energía Cinética en el movimiento de partículas y de centros de masa.

En el ejemplo 2.7 obtuvimos información muy útil de una integral de energía de la correspondiente ecuación diferencial. El mismo resultado puede obtenerse en general por integración de la ecuación

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C$$

Si consideramos el producto escalar de cada miembro de la ecuación con la velocidad $\mathbf{v}_C$ del centro de masa, obtenemos

$$(\Sigma\mathbf{F})\cdot\mathbf{v}_C = m\mathbf{a}_C\cdot\mathbf{v}_C$$

$$= m\frac{d\mathbf{v}_C}{dt}\cdot\mathbf{v}_C$$

$$= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_C\cdot\mathbf{v}_C)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\mathbf{v}_C\cdot\mathbf{v}_C\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}|\mathbf{v}_C|^2\right)$$

Integrando, *

$$\int_{t_1}^{t_2}(\Sigma\mathbf{F})\cdot\mathbf{v}_C\,dt = \frac{m}{2}[|\mathbf{v}_C(t_2)|^2 - |\mathbf{v}_C(t_1)|^2] \qquad (2.14)$$

o, para una partícula,

$$\int_{t_1}^{t_2}(\Sigma\mathbf{F})\cdot\mathbf{v}\,dt = \frac{m}{2}[|\mathbf{v}(t_2)|^2 - |\mathbf{v}(t_1)|^2] \qquad (2.15)$$

*Algunas veces (t_i, t_f) se usa como referencia a los tiempos "inicial" y "final" en vez de (t_1, t_2).

Para una partícula, $\int_{t_1}^{t_2}(\Sigma \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}\, dt$ se denomina **trabajo efectuado sobre la partícula** por la resultante de las fuerzas externas⁺. Observemos que si hay N fuerzas actuando sobre la partícula, la resultante $\Sigma \mathbf{F}$ está dada por $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_N$ y

$$(\Sigma \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N) \cdot \mathbf{v}$$

$$= \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v} + \cdots + \mathbf{F}_N \cdot \mathbf{v}$$

Cada término de esta ecuación representa la **tasa de trabajo** de una de las fuerzas. Así, el primer miembro de la Ec. (2.15) puede interpretarse como la suma de los trabajos de las fuerzas individuales actuando sobre la partícula. Estos enunciados son consistentes con los dados en el Capítulo 5 en el que definiremos la tasa de trabajo para una fuerza $\mathbf{F}$ como $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, en donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del punto sobre el cual se aplica la fuerza. El lado izquierdo de la Ec. (2.14) puede interpretarse entonces como el trabajo que *realizarían* las fuerzas externas *si* cada una tuviera una línea de acción a través del centro de masa.

Para una *partícula*, $(m/2)\ |\mathbf{v}|^2 = T$ se denomina **energía cinética**, y se simboliza con T. Así, para una partícula, la Ec. (2.15) es el Principio del Trabajo y la Energía cinética:

Trabajo efectuado sobre la partícula	=	Cambio en la energía cinética de la partícula

o bien

$$W = \Delta T \tag{2.16}$$

Para un *cuerpo*, la energía cinética se define como la suma de las energías cinéticas de las partículas que lo forman. Si todos los puntos de un cuerpo $\mathcal{B}$ tienen la misma velocidad (la cual es entonces $\mathbf{v}_C$) $(m/2)\ |\mathbf{v}_C|^2$ es la energía cinética *total* de $\mathcal{B}$. En general, sin embargo, el cuerpo gira o se deforma (o ambas cosas) y esto no será el caso aquí; el cuerpo tiene entonces energía cinética *adicional* debido a sus cambios de orientación (o sea, a su movimiento angular) o debido a la deformación. Veremos también en el Capítulo 5 que para un cuerpo $\mathcal{B}$ el primer miembro de la Ec. (2.14) no constituye en general el trabajo total hecho sobre $\mathcal{B}$ por las fuerzas y pares exteriores. Esto se debe a que en un cuerpo las fuerzas no tienen que ser concurrentes como en el caso de una partícula. Sin embargo, la Ec. (2.16) sigue siendo válida para un cuerpo rígido y los dos miembros de la Ec. (2.14) representan *partes* de W y ΔT.

Finalmente, sin restricciones relativas al tamaño del cuerpo, la integral de energía (Ec. 2.14) establece que el trabajo que se haría si las fuerzas externas actuasen en el centro de masa, sería igual al cambio en la energía cinética resultante si cada punto del cuerpo tuviese la velocidad del centro de masa. Podríamos llamar este resultado el **principio del trabajo y la energía cinética del centro de masa.**

Antes de intentar aplicar el principio del trabajo y la energía a un problema específico es conveniente determinar el trabajo realizado por dos clases de fuerzas. Primero supongamos que $\mathbf{F}$ es una fuerza constante y $\mathbf{r}$ el vector de posición de una partícula. Se tendrá que

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\, dt = \mathbf{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}\, dt = \mathbf{F} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$$

$$= \mathbf{F} \cdot [\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)] \tag{2.17}$$

que establece que el trabajo efectuado es el producto escalar de la fuerza y el desplazamiento de la partícula. Recordemos que este producto escalar puede expresarse como el producto de la magnitud de la fuerza y la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza, o *bien* como el producto de la magnitud del desplazamiento y la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

⁺La unidad de energía y trabajo en el SI es el joule (J) que es igual a 1; en el sistema US empleado en Estados Unidos es el pie-lb (pie · lb). Nótese que el trabajo, la energía y el momento de una fuerza tienen la misma dimensión.

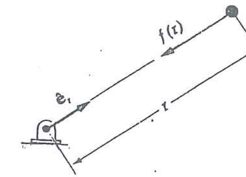


Figura 2.7

El segundo caso, al que le daremos atención especial, es el de una **fuerza central**. Tal fuerza tiene una línea de acción que pasa siempre por el mismo punto fijo en el marco de referencia y una magnitud que depende sólo de la distancia r de la partícula al punto fijo, como se muestra en la Fig. 2.7.

La velocidad de la partícula puede expresarse como

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{e}}_r) = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = [-f(r)\hat{\mathbf{e}}_r] \cdot [\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r]$$

$$= -\dot{r}f(r)$$

ya que según la Ec. (1.38) sabemos que $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r = 0$. Entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F} = -f(r)\hat{\mathbf{e}}_r$ es

$$W = \int_{t_1}^{t_2} -f(r)\frac{dr}{dt}\, dt$$

$$= -\int_{r(t_1)}^{r(t_2)} f(r)\, dr \tag{2.18}$$

Si φ es una función de r tal que $f = d\varphi/dr$, el trabajo puede expresarse como

$$W = -\int_{r(t_1)}^{r(t_2)} \frac{d\varphi}{dr}\, dr$$

$$= -\varphi[r(t_2)] + \varphi[r(t_1)] \tag{2.19}$$

Una fuerza central particular es la ejercida por un resorte sobre una partícula cuando el otro extremo del resorte está fijo. En el caso de un resorte lineal de longitud instantánea r, notamos que $f = k(r - L_0)$, en donde L_0 es la longitud natural o sin alargamiento y k es el **módulo de fuerza o constante** del resorte. En este caso, $\varphi = (k/2)\ (r - L_0)^2$, o más simplemente, $\varphi = (k/2)\ \delta^2$, en donde δ es el alargamiento del resorte. Entonces, según la Ec. (2.19),

$$W = -\frac{k}{2}[\delta^2(t_2) - \delta^2(t_1)] \tag{2.20}$$

Pregunta 2.5 ¿Qué suposición debe hacerse respecto a la masa del resorte en la relación fuerza-alargamiento?

Un segundo caso particular de fuerza central es la fuerza gravitatoria ejercida sobre un cuerpo por la Tierra. Según la ley de la gravitación universal de Newton

$$f = \frac{mgr_e^2}{r^2} \tag{2.21}$$

en donde r_T es el radio de la Tierra, m la masa del cuerpo atraído y g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra*. Según la Ec. (2.18) se tiene

$$W = -\int_{r(t_1)}^{r(t_2)} \frac{mgr_e^2}{r^2}\,dr = mgr_e^2\left[\frac{1}{r(t_2)} - \frac{1}{r(t_1)}\right]$$

Notamos que para este caso la función φ está dada por

$$\varphi = \frac{-mgr_e^2}{r} \tag{2.22}$$

Si el movimiento ocurre muy cerca de la superficie de la Tierra

$$\frac{r_e^2}{r^2} \approx 1$$

y $f \approx mg$ (constante). En este caso,

$$\begin{aligned} W &= \frac{mgr_e^2[r(t_1) - r(t_2)]}{r(t_1)r(t_2)} \\ &\approx mg[r(t_1) - r(t_2)] \\ &= \text{(peso)} \times \text{(disminución de la altura del centro de masa del cuerpo)} \end{aligned} \tag{2.23}$$

y la función φ es entonces (si z_C es positiva hacia arriba)

$$\varphi = mgz_C \tag{2.24}$$

En cada caso considerado, el trabajo ha dependido sólo de las posiciones inicial y final del punto en que está aplicada la fuerza. Tal fuerza, cuyo trabajo es independiente de la trayectoria descrita por el punto sobre el que actúa, se llama **conservativa**. Además, el trabajo puede expresarse como el cambio en una función escalar de la posición; vemos que este es el caso para la fuerza central y podemos establecer lo mismo para la fuerza constante definiendo $\varphi = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$.

Pregunta 2.6 ¿Cuál es el del signo menos frente a $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$?

---

*La fuerza de gravedad se puede resolver de hecho en una infinidad de fuerzas diferenciales, cada una actuando sobre cada partícula de un cuerpo. Para casi todas las aplicaciones en el planeta Tierra, estas fuerzas pueden considerarse como equivalentes a una fuerza única que pase por el centro de masa del cuerpo. En el caso de aplicaciones en astronomía o en la Dinámica de vehículos espaciales, el momento gravitacional que acompaña a la fuerza en el centro de masa, resulta muy importante. En el Skylab, por ejemplo, se disponía de tres grandes giróscopos para el control de la cantidad de movimiento angular generada por un momento gravitacional de sólo unas cuántas libras-pie. El momento gravitacional ejercido sobre la Tierra por la gravedad del Sol y la Luna, ocasiona la precesión de su eje con un período de 25 800 años. El momento gravitacional desaparece si el cuerpo es una esfera uniforme (la Tierra se encuentra achatada en los polos y su densidad es variable).
En el Capítulo 7 se estudia más ampliamente la *precesión lunisolar*.

De modo que si todas las fuerzas actuantes son conservativas y si φ es la suma de todas sus funciones φ, entonces la Ec. (2.16) del trabajo y de la energía cinética puede expresarse como

$$\varphi(t_1) - \varphi(t_2) = T(t_2) - T(t_1)$$

o

$$T(t_2) + \varphi(t_2) = T(t_1) + \varphi(t_1)$$

o bien

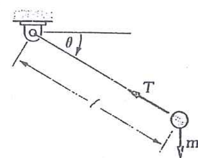
$$T + \varphi = \text{constante} \tag{2.25}$$

Se denomina a φ la **energía potencial** y a $T + \varphi$ la **energía total (mecánica)**. La Ec. (2.25) es entonces la expresión de la conservación de la energía mecánica cuando todas las fuerzas son conservativas (independientes de la trayectoria).

Pregunta 2.7 ¿Cómo se expresaría la Ec. (2.25) si en vez de φ hubiésemos escogido constituir la función escalar ψ tal que el trabajo hecho por una fuerza fuese el incremento en su ψ?

Para concluir es importante advertir que no todas las fuerzas son conservativas. Un ejemplo es la fuerza de fricción que actúa en un bloque al resbalar éste. Tal fuerza efectúa un trabajo negativo independientemente de la dirección del movimiento y no es posible encontrar una función potencial φ para ella.

Ejemplo 2.11



Repetimos el Ejemplo 2.7 (véase al diagrama): Si una bola de masa m es liberada del reposo estando la cuerda bien tirante y $\theta = 30°$, encontrar la tensión en la cuerda como función de θ.

Solución

Si igual que antes escribimos la ecuación fuerza-aceleración en la dirección radial, obtenemos

$$T = mg\,\text{sen}\,\theta + m\ell\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

Ahora aplicamos la Ec. (2.16) considerando que t_1 es el tiempo inicial en el que $\theta = 30°$ y t_2 el tiempo en que aplicamos (1). Nótese que

$$|\mathbf{v}(t_1)| = 0$$

$$|\mathbf{v}(t_2)|^2 = \ell^2\dot{\theta}^2$$

y que el trabajo realizado por la tensión T en la cuerda es cero pues tal fuerza es siempre perpendicular a la velocidad de la bola (de su centro de masa). Según la Ec. (2.23) el trabajo del peso es $mg[\ell\,\text{sen}\,\theta - \ell\,\text{sen}\,30°]$. La Ec. (2.16) es entonces

$$mg[\ell\,\text{sen}\,\theta - \ell\,\text{sen}\,30°] = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\theta}^2) - 0$$

o bien

$$m\ell\dot{\theta}^2 = 2mg\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}\right)$$

Sustituyendo en la Ec. (1) obtenemos

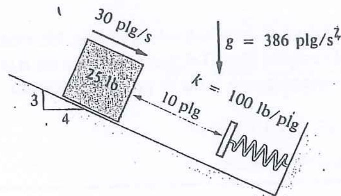
$$T = mg \operatorname{sen}\theta + 2mg \operatorname{sen}\theta - mg$$

$$= mg(3 \operatorname{sen}\theta - 1)$$

que es el mismo resultado obtenido previamente.

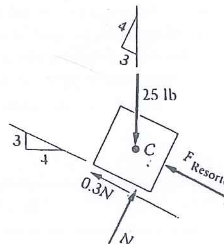
Ejemplo 2.12

El bloque mostrado en el diagrama resbala sobre una superficie inclinada cuyo coeficiente de fricción es $\mu = 0.3$. Encuentre la fuerza máxima inducida en el resorte si el movimiento comienza bajo las condiciones mostradas.



Solución

Suponemos que el bloque es rígido; de esta manera, el extremo del resorte, una vez que entra en contacto con el bloque, sufrirá los mismos desplazamientos que el centro de masa (o de cualquier otro punto) del bloque. Para aplicar el principio del trabajo y de la energía cinética del centro de masa supongamos que t_1 es el tiempo inicial asociado a las condiciones del diagrama, y t_2 el tiempo en que el resorte alcanza su compresión máxima Δ. Para catalogar las fuerzas externas que efectúan trabajo consideremos un diagrama de cuerpo libre en un instante arbitrario entre t_1 y t_2. (Ver la figura). Ya que el centro de masa recorre una trayectoria paralela al plano inclinado, no existe componente de la aceleración perpendicular a él y



$$N - \frac{4}{5}(25) = 0$$

o bien

$$N = 20 \text{ lb}$$

por lo que la fuerza de fricción es $0.3(20) = 6$ lb

De acuerdo con la Ec. (2.14):

$$\text{Trab.}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}m[\|\mathbf{v}_C(t_2)\|^2 - \|\mathbf{v}_C(t_1)\|^2]$$

en donde

$$\|\mathbf{v}_C(t_2)\| = 0$$

$$\|\mathbf{v}_C(t_1)\| = 30 \text{ plg./s}$$

y los diversos trabajos son

1. Para N, trab. $(t_1, t_2) = 0$ ya que la fuerza es perpendicular a $\mathbf{v}_C$ en todo instante.
2. Para la fricción, trab. $(t_1, t_2) = -6(10 + \Delta)$ plg lb
3. Para el peso, trab. $(t_1, t_2) = [(\frac{3}{5})(25)](10 + \Delta)$ plg · lb

4. Para el resorte

Trab. (t_1, t_2) = trab. $(t_1$, contacto) + traba. (contacto, t_2)

$$= 0 - \frac{100}{2}[(-\Delta)^2 - 0] \text{ plg — lb}$$

Así, $W = \quad T$ da (con $g = 32.2 \times 12 = 386$ plg/s²):

$$-6(10 + \Delta) + 15(10 + \Delta) - 50\Delta^2 = 0 - \frac{1}{2}\left(\frac{25}{386}\right)(30)^2$$

o bien

$$50\Delta^2 - 9\Delta - 119 = 0$$

$$\Delta^2 - 0.180\Delta - 2.38 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática,

$$\Delta = 0.09 \pm \sqrt{0.0081 + 2.38} \text{ plg}$$

y su raíz positiva es

$$\Delta = 0.09 + 1.55 = 1.64 \text{ plg}$$

La fuerza correspondiente es $100(1.64) = 164$ lb

Ejemplo 2.13

Para el cuerpo anterior, encuentre la siguiente posición en la que el bloque alcanza el reposo.

Solución

En el tiempo t_2 la fuerza en el resorte (164 lb) excede a la suma de la componente del peso a lo largo del plano (15 lb) y de la resistencia máxima de la fricción (6 lb), por lo que el cuerpo no está en equilibrio y debe empezar a moverse hacia arriba del plano. Supongamos que t_3 es el tiempo en el que el cuerpo alcanza el reposo después y que d es la compresión correspondiente en el resorte. Entonces, puesto que $\|\mathbf{v}_C(t_2)\| = \|\mathbf{v}_C(t_3)\| = 0$, se tendrá

$$\text{Trab. } (t_2, t_3) = 0$$

Para el resorte el trabajo es $(-100/2)[d^2 - (-\Delta)^2]$; para la fuerza de fricción, el trabajo es $-6(\Delta - d)$; para el peso, el trabajo es $-(\frac{3}{5})(25)(\Delta - d)$. Entonces

$$(\Delta - d)\left[\frac{100}{2}(\Delta + d) - 6 - 15\right] = 0$$

o bien

$$d = \frac{21}{50} - 1.64 = -1.22 \text{ plg}$$

El signo negativo significa que el resorte debe estirarse 1.22 plg cuando el bloque alcanza el reposo. Sí, como se pretende aquí, el resorte no queda unido permanentemente al bloque durante el primer contacto (esto es, el contacto se mantiene sólo en compresión) el análisis sólo dice que el contacto se interrumpe antes de que bloque alcance el reposo. Por consiguiente, necesitamos modificar la expresión para el trabajo hecho por el resorte que vemos ahora que debería haber sido $-(100/2)(0 - \Delta^2)$. Si e es la distancia del extremo del resorte al bloque (medida hacia arriba en el plano) se tiene

$$-\frac{100}{2}[0 - \Delta^2] - 6(\Delta + e) - \frac{3}{5}(25)(\Delta + e) = 0$$

$$21(\Delta + e) = 50\Delta^2$$

$$e = \frac{50}{21}\Delta^2 - \Delta$$

$$= \frac{50}{21}(1.64)^2 - 1.64$$

$$= 4.76 \text{ plg}$$

Es instructivo llegar a este resultado usando los principios del trabajo y de la energía cinética en el intervalo (t_1, t_3), para el cual es cero el trabajo neto hecho por el resorte. Notando que el centro de masa del bloque desciende $\frac{3}{5}(10 - e)$ verticalmente, y que la distancia recorrida por el bloque en el plano es $(10 + 1.64 + 1.64 + e)$ plg, se tendrá:

$$\text{Trab.}(t_1, t_3) = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_C(t_3)|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_C(t_1)|^2$$

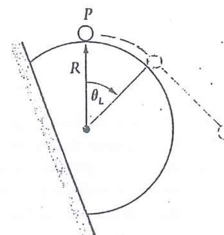
$$25\left[\frac{3}{5}(10 - e)\right] - 6(13.3 + e) = 0 - \frac{1}{2}\left(\frac{25}{386}\right)(30)^2$$

$$150 - 15e - 79.8 - 6e = -29.2$$

$$e = 4.73 \text{ plg}$$

que es el mismo resultado obtenido antes con excepción de la tercera cifra significativa, lo que se debe a un redondeo en un paso intermedio del cálculo.

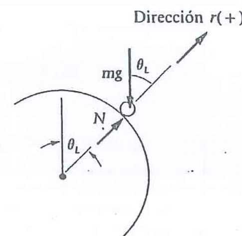
Ejemplo 2.14



Una partícula P de masa m descansa sobre una superficie esférica lisa. (Véase el diagrama.) Un pequeño empujón ocasiona que la partícula resbale en un plano vertical. Calcular el ángulo θ_L en el que la partícula abandona la superficie.

Solución

La energía mecánica se conserva aquí porque (1) no hay fricción, (2) la fuerza normal no trabaja por ser siempre perpendicular a la velocidad de P y (3) la única otra fuerza es la de gravedad. (Véase el diagrama inferior). Por tanto, usando las Ecs. (2.24) y (2.25):



$$T_1 + \varphi_1 = T_2 + \varphi_2$$

$$0 + mgR = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgR\cos\theta_L$$

$$v_2^2 = 2gR(1 - \cos\theta_L) \qquad (1)$$

La ecuación (1) contiene dos incógnitas; para eliminar la velocidad v_2, empleamos la ecuación de movimiento en la dirección radial:

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$-mg\cos\theta_L + N = m\left(-\frac{v_2^2}{R}\right) \qquad (2)$$

Pero $N = 0$ cuando P está a punto de abandonar la superficie. Por tanto

$$v_2^2 = gR\cos\theta_L \qquad (3)$$

Igualando los segundos miembros de las Ecs. (1) y (3) se obtiene

$$gR\cos\theta_L = 2gR(1 - \cos\theta_L)$$

$$3\cos\theta_L = 2$$

$$\theta_L = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 48.2°$$

Como se ha mencionado antes, la energía cinética de un sistema de partículas está dada por

$$T = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i|\mathbf{v}_i|^2$$

bien

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i$$

Si W_i es el trabajo de todas las fuerzas actuando sobre la partícula i,

$$W_i = \Delta T_i$$

y sumando sobre todas las partículas,

$$\sum_{i=1}^{N} W_i = \Delta \sum_{i=1}^{N} T_i$$

o bien

$$W = \Delta T \qquad (2.26)$$

para el sistema. El trabajo W es, sin embargo, el trabajo neto hecho por todas las fuerzas externas *e internas* que actúan sobre las partículas. Algunas veces la Ec. (2.26) puede usarse efectivamente porque puede evaluarse el trabajo neto de las fuerzas internas. Por ejemplo, si dos partículas en movimiento están unidas por un resorte lineal, no es posible escribir una fórmula simple para el trabajo de la fuerza del resorte sobre *una* de las partículas. Sin embargo, el trabajo neto de las fuerzas iguales y opuestas del resorte sobre las dos partículas está dado por la Ec. (2.20) (véase el Problema 2.125). Partículas que se encuentran unidas rígidamente interaccionan por medio de fuerzas cuyo trabajo neto es cero. Veremos en el Capítulo 5 que cuando usamos $W = \Delta T$ para un cuerpo rígido, el trabajo sólo involucra fuerzas externas.

Problemas / Sección 2.3

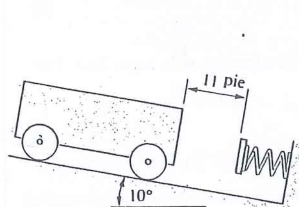


Figura P2.105

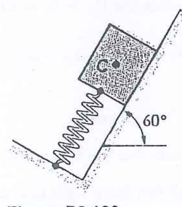


Figura P2.106

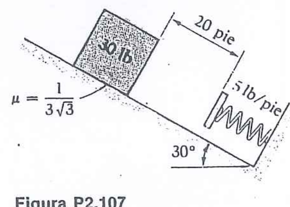


Figura P2.107

2.105 Un carro de 4000 lb de peso está soportado por cuatro ruedas ligeras que ruedan sobre la superficie inclinada mostrada en la Fig. P2.105. El camión tiene una velocidad de 5 pie/s en la posición indicada. Determine el módulo de fuerza del resorte si el camión alcanza el reposo al comprimirse el resorte 6 plg. *Nota*: Ruedas ligeras con buenos cojinetes implica fricción despreciable.

2.106 El bloque mostrado en la Fig. P2.106 pesa 100 lb y la constante del resorte es de 10 lb/pie; éste tiene su longitud natural cuando el bloque se libera del reposo. Encuentre el coeficiente mínimo de fricción μ para que el bloque no rebote después de detenerse.

2.107 El bloque de la Fig. P2.107 se libera del reposo. Calcule la distancia de rebote después de que comprime el resorte.

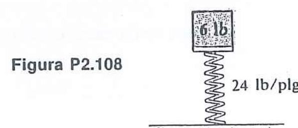


Figura P2.108

2.108 El bloque de 6 lb mostrado en la Fig. P2.108 se libera del reposo justamente cuando entra en contacto con el extremo del resorte indeformado. Para el movimiento subsecuente encuentre: (a) la fuerza máxima en el resorte y (b) la velocidad máxima del bloque.

2.109 El bloque $\mathscr{A}$ pesa 16.1 lb y se traslada a lo largo de un plano horizontal liso con velocidad de 36 pie/s. (Ver la Fig. P2. 109.) El coeficiente de fricción entre $\mathscr{A}$ y la superficie inclinada es $\mu = 0.5$ y la constante del resorte es de 100 lb/pie. Calcule la distancia que $\mathscr{A}$ alcanza en el plano inclinado antes de detenerse.

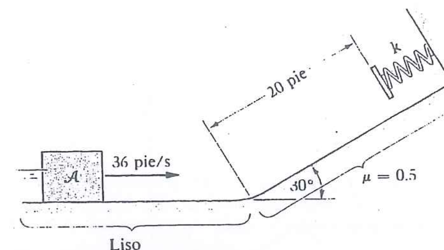


Figura P2.109

2.110 Por medio de un cable se impide que el peso mostrado en la Fig. P2.110 resbale sobre el plano inclinado. Un ingeniero desea bajar el peso a la posición indicada insertando un resorte y cortando luego el cable. Encuentre el módulo de un resorte que satisfaga esta función sin permitir que el bloque rebote después de detenerse. *Sugerencia*: ¡Usted tiene libertad de especificar el alargamiento inicial; ensaye un valor nulo!

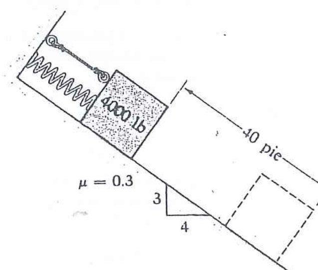


Figura P2.110

* **2.111** En el instante mostrado en la Fig. P2.111, el bloque se encuentra viajando hacia la izquierda a 7 m/s y el resorte tiene un alargamiento nulo. Empleando $W = \Delta T$, encuentre la velocidad del bloque (velocidad de C) cuando se ha movido 4 m hacia la izquierda. *Sugerencia*: Se necesitará la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + c$$

en donde a y c son constantes; $k = 80$ N/m.

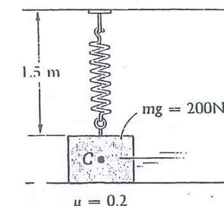


Figura P2.111

2.112 Demuestre que la ecuación $\ell\dot{\theta}^2 = 2mg(\text{sen}\,\theta - \frac{1}{2})$ puede obtenerse a partir de la conservación de la energía mecánica ($T + \varphi =$ constante; Ec. 2.25) en el Ejemplo 2.11. ¿Por qué no puede usarse este principio en los Ejemplos 2.12 y 2.13?

2.113 Los hermanos Bernoulli plantearon y luego resolvieron el problema de la braquistócrona (Fig. P2.113). El problema consiste en determinar sobre qué trayectoria lisa, univaluada y continua una partícula llegará a B en un tiempo mínimo bajo gravedad uniforme partiendo del reposo desde un punto más alto A. Su solución, más allá del alcance de este libro, fue que la trayectoria de más rápido descenso es una cicloide. Demuestre que independientemente de la trayectoria, la *velocidad de llegada* es como si la partícula hubiese sido lanzada libremente desde la misma altura H.

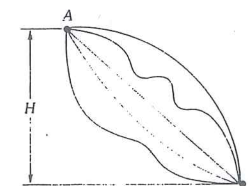


Figura P2.113

2.114 Una caja pequeña $\mathscr{B}$ (Fig. P2.114) resbala desde el reposo sobre un plano inclinado rugoso de A a B, y luego cae en una plataforma de carga. El coeficiente de fricción entre la caja y el plano es $\mu = 0.4$. Encuentre la distancia D al punto C en que la caja toca a la plataforma.

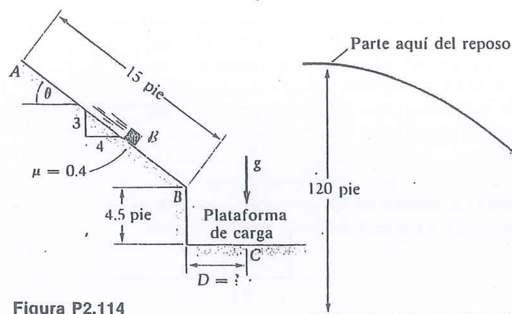


Figura P2.114

2.115 Una partícula se libera del reposo en A y resbala sobre la superficie parabólica lisa hasta B, de donde sale volando. (Ver la Fig. P2. 115). Encuentre la distancia horizontal total D que viaja antes de tocar el suelo en C.

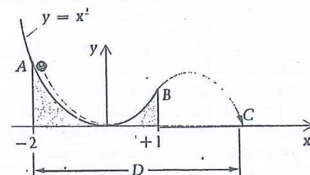


Figura P2.115

2.116 Una partícula de masa m resbala sobre un tobogán sin fricción y entra en un lazo circular de diámetro d (Fig. P2.116). Encuentre la altura mínima de partida h para que la partícula efectúe un circuito completo del lazo y salga normalmente (sin haber perdido contacto con el lazo).

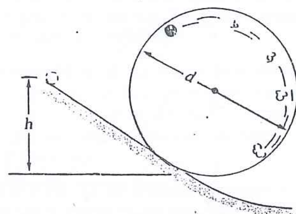


Figura P2.116

2.117 Una niña de 80 lb de peso viaja en un carrito de 10 lb que se desliza sobre un tobogán (Fig. P2.117). Despreciando todas las pérdidas por fricción, calcule el peso de la pequeña en A registrado por la báscula en que va sentada.

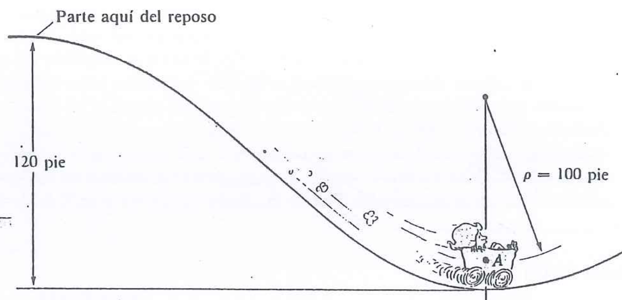


Figura P2.117

2.118 Compruebe las soluciones a los problemas 2.79 y 2.80 usando el principio del trabajo y la energía cinética.

2.119 Demuestre que para una fuerza gravitacional central $[\mathbf{F} = (-GMm/r^2)\hat{\mathbf{e}}_r]$ a diferencia del caso de la gravedad uniforme $(-mg\mathbf{k})$, el potencial está dado por

$$\varphi = \frac{-GMm}{r}$$

donde G es la constante de la gravitación universal; M y m son las masas de los dos cuerpos en atracción. Note que gracias a la Ec. (2.22) sólo se necesita demostrar que $gr_T^2 = GM$.

2.120 Usando el resultado del problema anterior, calcule el trabajo hecho por la gravedad de la Tierra sobre un satélite entre los tiempos de lanzamiento y de inserción en una órbita geosincrónica de radio 6.61 veces el radio de la Tierra. (Véase el problema 2.67.)

2.121 En el Problema 2.54 use $W = \Delta T$ para encontrar las velocidades de los bloques cuando el de 5 lb ha descendido 2 pie.

2.122 El bloque $\mathscr{A}$ en la Fig. 2.122 se está moviendo hacia abajo a 5 pie/s en el momento en que el resorte está comprimido 6 plg. El coeficiente de fricción entre el bloque $\mathscr{B}$ y el plano es de 0.2, la polea es ligera y los pesos de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son de 161 y 193 lb, respectivamente.

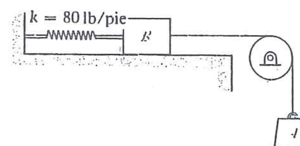


Figura P2.122

a. Encuentre la distancia que cae $\mathscr{A}$ desde su posición inicial antes de que su velocidad sea cero.
b. Determine si el cuerpo $\mathscr{A}$ comenzará a moverse de regreso hacia arriba.

2.123 El sistema en la Fig. P2.123 consiste del cuerpo $\mathscr{A}$ de 12 lb, de la polea ligera $\mathscr{B}$, del disco $\mathscr{C}$ de 8 lb y del cuerpo $\mathscr{D}$ de 10 lb. El conjunto se suelta del reposo en la posición indicada. El cuerpo $\mathscr{D}$ cae a través de un agujero en la ménsula $\mathscr{E}$ que detiene el cuerpo $\mathscr{C}$. Encuentre que tan lejos desciende $\mathscr{D}$ desde su posición original.

2.124 En el instante mostrado en la Fig. P2.124, el bloque $\mathscr{B}$ se halla 30 m abajo del nivel del bloque $\mathscr{A}$; en este instante v_A y v_B son cero. Determine las velocidades de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ cuando pasan uno frente a otro $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ tienen masas de 15 y 5, kg respectivamente. Las poleas son ligeras.

2.125 Suponga que los extremos de un resorte están unidos a "partículas" de masa m_1 y m_2. Demuestre que la suma de los trabajos de las fuerzas del resorte sobre las partículas está dada por la Ec. (2.20).

* **2.126** Los bloques de la Fig. P2.126 se sueltan del reposo. Determine donde se encontrarán cuando se detengan permanentemente. ¿Cuál es entonces la fuerza en el resorte? *Sugerencia*: Escriba la ecuación del trabajo y energía para cada bloque, sume las dos ecuaciones y use el resultado del Problema 2.125. También reflexione sobre el movimiento del centro de masa.

* **2.127** Demuestre que si la superficie en el Ejemplo 2.14 es la parábola mostrada en la Fig. P.2.127, la partícula nunca abandonará la superficie. *Sugerencia*: Muestre que

$$\rho = \left|\frac{[1 + y'^2]^{3/2}}{y''}\right| = \frac{(1 + 4x^2)^{3/2}}{2}$$

y use esto en nuestra ecuación:

$$\Sigma F_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

junto con $W = \Delta T$.

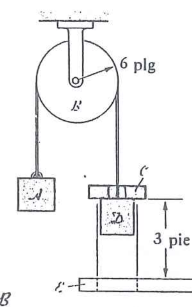


Figura P2.123

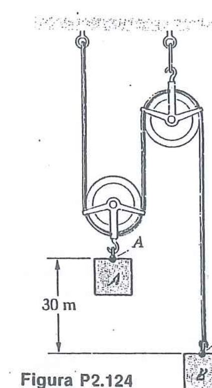


Figura P2.124

Alargamiento inicial $= \delta_i = 0.2$ m

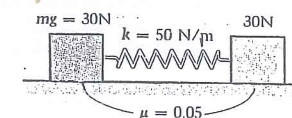


Figura P2.126

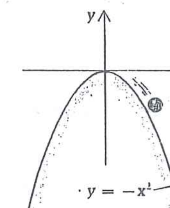


Figura P2.127

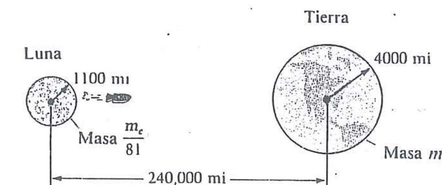


Figura P2.128

* **2.128** Encuentre la velocidad mínima con la que una partícula podría lanzarse desde la Luna y llegar a la Tierra (Fig. P2.128). En este problema suponga que los centros de la Luna y la Tierra están ambos fijos en un marco inercial.

** 2.19 Una partícula lisa es impulsada a lo largo del interior de un círculo vertical. En el punto, más bajo su velocidad es $\sqrt{g(2a + 3H)}$, en donde a es el radio del círculo. Si $0 < H < a$, demuestre que la partícula abandonará el círculo en algún punto de la mitad superior. Si después de dejar el círculo en P la partícula lo toca nuevamente en Q, demuestre que el tiempo de P a Q es

$$4\left[\frac{H}{g}\left(1 - \frac{H^2}{a^2}\right)\right]^{1/2}$$

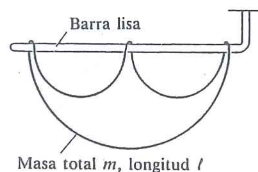


Figura P2.130

* 2.130 Una cuerda se libera del reposo en la posición mostrada en la Fig. P2.130. Encuentre un límite superior para su energía cinética en cualquier tiempo después de ser liberada.

2.4 Primera ley de Euler en términos de la cantidad de movimiento (o ímpetu Conservación de la cantidad de movimiento. Impacto.

La **cantidad de movimiento** (o **ímpetu**, o bien **moméntum** de una partícula se define como el producto de su masa por su velocidad. Para un sistema de partículas (Fig. 2.8a) la cantidad de movimiento se define como la suma de las cantidades de movimiento de las partículas en el sistema. Así, si denotamos la cantidad de movimiento de un sistema (o cuerpo) por **L**,*

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \tag{2.27}$$

o para un cuerpo con masa distribuida continuamente (Fig. 2.8b)

$$\mathbf{L} \equiv \int \mathbf{v}\, dm \tag{2.28}$$

Si $\mathbf{R}_i$ es el vector de posición para la partícula i, entonces

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{R}_i}{dt}$$

y la Ec. (2.27) es ahora

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{L} = \frac{d}{dt}(\Sigma m_i \mathbf{R}_i)$$

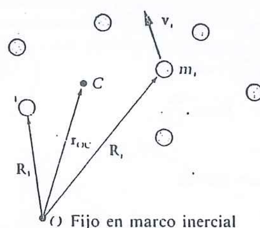


Figura 2.8a

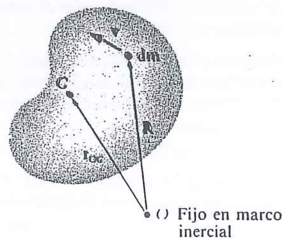


Figura 2.8b

* En este caso se trata de cantidad de movimiento lineal.

Recuérdese (Ec. (2.11) y Fig. 2.3a) que

$$\Sigma m_i \mathbf{R}_i = m\mathbf{r}_{OC}$$

por lo que

$$\mathbf{L} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{r}_{OC})$$

$$= m\frac{d\mathbf{r}_{OC}}{dt}$$

o bien

$$\mathbf{L} = m\,\mathbf{v}_C \tag{2.29}$$

en donde $\mathbf{v}_C$ es la velocidad del centro de masa del sistema o cuerpo.

La relación entre las fuerzas externas y la cantidad de movimiento puede ahroa obtenerse fácilmente derivando la Ec. (2.29):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}_C}{dt}$$

$$= m\mathbf{a}_C$$

Pero

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C$$

por lo que

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{2.30}$$

que es la Primera ley de Euler para la cantidad de movimiento.

Pregunta 2.8 ¿Es válida la Ec. (2.30) para un sistema cuya masa varía en el tiempo, como en el caso de un cohete?

La integración directa de esta Primera Ley (Ec. 2.30) no da

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F}\, dt = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1) = \text{cambio en la cantidad de movimiento} = \Delta\mathbf{L} \tag{2.31}$$

Esta integral se conoce con el nombre de *impulso* e indica la acción impartida al cuerpo por las fuerzas externas*; nótese que el impulso está intrínsecamente asociado con un intervalo específico de tiempo. Si durante cierto intervalo de tiempo, la suma de las fuerzas externas se vuelve nula, entonces $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$ y por consiguiente la cantidad de movimiento será constante o bien *se conserva* durante ese intervalo.

* En este caso se trata de un impulso *lineal*.

Puesto que la Ec. (2.31) es una ecuación vectorial (a diferencia de la ecuación escalar del trabajo y la energía cinética), podemos usar alguna o todas sus ecuaciones componentes. Por ejemplo,

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x \, dt = L_x(t_2) - L_x(t_1) = m\dot{x}_C(t_2) - m\dot{x}_C(t_1) \quad (2.32)$$

e igualmente para y y z. Notemos que se puede tener una situación coplanar en la que, por ejemplo $\Sigma F_x = 0$ pero $\Sigma F_y \neq 0$ en un intervalo. Si este es el caso, la cantidad de movimiento se conserva en la dirección x pero no en la y.*

Algunas veces es posible gracias a la conservación de la cantidad de movimiento, obtener información cuantitativa limitada acerca de los movimientos de cuerpos en colisión. En general, esto puede lograrse cuando los cuerpos interactúan durante un intervalo relativamente breve, *antes* y *después* del cual es razonable tratar sus movimientos como rígidos. Aunque el análisis es mejor comprendido con ejemplos, hacemos aquí la observación de que en general hace poco sentido tratar a los cuerpos como rígidos durante una colisión o choque. Por ejemplo, si deseamos describir el movimiento que resulta cuando una bala se dispara a un bloque de madera, el bloque obviamente no puede considerarse como rígido durante el proceso de penetración. Por otra parte, es razonable suponer que ocurre un movimiento rígido del bloque y de la bala incrustada subsecuente a la reorientación permanente del material.

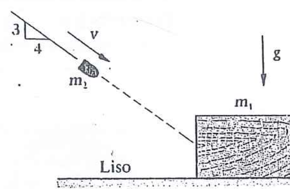
Un aspecto clave en el análisis de problemas de choque (o impacto) es que la cantidad de movimiento de un cuerpo compuesto de dos partes es la suma de las cantidades de movimiento de las porciones componentes. Esto se infiere directamente de la definición de la cantidad de movimiento de un cuerpo dada por la integral

$$\mathbf{L} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \, dm = \int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{v} \, dm + \int_{\mathcal{B}_2} \mathbf{v} \, dm$$
$$= \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \quad (2.33)$$

en donde los subíndices (1 y 2) identifican a las dos partes constitutivas del cuerpo.

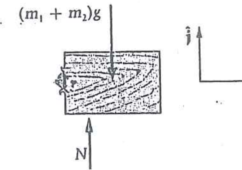
Ejemplo 2.15

Un bloque de madera de masa m_1 se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa cuando es alcanzado por una bala de masa m_2 con velocidad v, como se muestra en el diagrama. Después de que la bala se ha incrustado en el bloque, éste se desliza hacia la derecha con velocidad V. Encuentre la relación entre v y V.



Solución

Sea t_1 el tiempo en que la bala toca por primera vez al bloque y t_2 el tiempo después del cual el conjunto bola-bloque se comporta como un cuerpo rígido en traslación. Para $t_1 < t < t_2$, ocurre dentro del bloque un complejo proceso de deformación y redistribución de la masa. Si aislamos el sistema bala-bloque durante este intervalo (véase el diagrama) se obtiene



$$\int_{t_1}^{t_2} [N(t) - m_1 g - m_2 g]\hat{\mathbf{j}} \, dt = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1)$$

Pero

$$\mathbf{L}(t_2) = (m_1 + m_2)V\hat{\mathbf{i}} \quad \text{y} \quad \mathbf{L}(t_1) = m_2(0.8v\hat{\mathbf{i}} - 0.6v\hat{\mathbf{j}})$$

ya que v es la rapidez del centro de masa de la bala y el bloque tiene una cantidad de movimiento nula en t_1. Igualando los coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$ obtenemos:

$$(m_1 + m_2)V = 0.8m_2 v$$

o bien

$$V = \frac{0.8m_2 v}{m_1 + m_2}$$

Notemos que en ausencia de una fuerza externa con una componente horizontal, se conserva la componente horizontal de la cantidad de movimiento.

Aunque no podemos calcular la reacción N durante el choque, sí podemos calcular su impulso:

$$\int_{t_1}^{t_2} [N - (m_1 + m_2)g] \, dt = 0.6m_2 v$$

o bien

$$\int_{t_1}^{t_2} N \, dt = (m_1 + m_2)g(t_2 - t_1) + 0.6m_2 v$$

Igualmente, el impulso de la fuerza $\mathbf{F}$ ejercida sobre la bala por el bloque puede calcularse aplicando la Ec. (2.31) a la bala:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F} - m_2 g\hat{\mathbf{j}}) \, dt = m_2 V\hat{\mathbf{i}} - m_2(0.8v\hat{\mathbf{i}} - 0.6v\hat{\mathbf{j}})$$

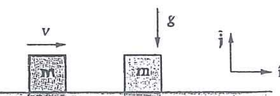
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \, dt = m_2(V - 0.8v)\hat{\mathbf{i}} + m_2[g(t_2 - t_1) + 0.6v]\hat{\mathbf{j}}$$
$$= m_2\left(\frac{0.8m_2 v}{m_1 + m_2} - 0.8v\right)\hat{\mathbf{i}} + m_2[g(t_2 - t_1) + 0.6v]\hat{\mathbf{j}}$$
$$= -\frac{0.8m_1 m_2}{m_1 + m_2} v\hat{\mathbf{i}} + m_2[g(t_2 - t_1) + 0.6v]\hat{\mathbf{j}}$$

El lector debe notar que si una colisión a alta velocidad ocurre en un período corto, los impulsos pueden estimarse con mucha aproximación despreciando los impulsos de los pesos de los cuerpos. En este ejemplo tendríamos $0.6\, v \gg g\,(t_2 - t_1)$. En el Capítulo 5 se verán otros ejemplos de problemas de impacto.

*Los problemas de balística son de este tipo si se desprecia la resistencia del aire.

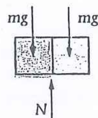
Ejemplo 2.16

Un bloque se encuentra en reposo en una superficie horizontal lisa antes de ser golpeado por otro bloque idéntico que se desliza con velocidad v. (Vea el diagrama.) Encuentre las velocidades de los dos bloques después de la colisión suponiendo (1) que se quedan pegados y (2) que el sistema no experimenta pérdida de energía cinética.



Solución

Sean v_L y v_R las velocidades de los centros de masa de los bloques izquierdo (*left*) y derecho (*right*) al término de la colisión; esto es, $v_L\hat{\imath}$ es la velocidad del bloque izquierdo. El diagrama de cuerpo libre del sistema durante la colisión (vea el diagrama) muestra que no existe fuerza externa con una componente horizontal. Entonces la componente horizontal (la única que no es aquí cero) de la cantidad de movimiento se conserva y



$$mv_L + mv_R = mv + m(0) \quad (1)$$

o bien

$$v_L + v_R = v \quad (2)$$

Si los bloques permanecen pegados después de la colisión y se comportan como cuerpos rígidos, se tendrá que

$$v_R = v_L$$

por lo que

$$v_R = v_L = \frac{v}{2} \quad (3)$$

Pregunta 2.9 ¿Cuál sería la velocidad común si el bloque de la derecha tuviese una masa 100 veces mayor que el de la izquierda? ¿Y si tuviese una masa 10 000 veces mayor?

Sin embargo, si los bloques no permanecen pegados, el principio de la conservación de la cantidad de movimiento no basta para determinar sus velocidades subsecuentes. Necesitamos alguna medida de la tendencia a rebotar entre ellos, o dicho de otra manera, una medida de cuánta energía se consume en las deformaciones permanentes o en las vibraciones (o en ambas) de los bloques. El parámetro usado para describir esos efectos (coeficiente de restitución) se describe en lo que sigue a este ejemplo. En este momento notemos que cuando los bloques permanecen juntos, la energía cinética del sistema es menor después que antes de la colisión. La pérdida es

$$\frac{1}{2}mv^2 - \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}mv^2 \quad (4)$$

lo que quiere decir que la mitad de la energía mecánica se disipó en la colisión en este caso.

El otro extremo es aquel en el que no se consume energía mecánica durante el proceso de colisión. En este caso

$$\frac{1}{2}mv_L^2 + \frac{1}{2}mv_R^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5)$$

Pero como $v_R = v - v_L$ (de la Ec. 2), se tiene

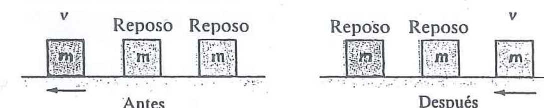
$$v_L^2 + (v - v_L)^2 = v^2$$
$$v_L^2 + v^2 - 2vv_L + v_L^2 = v^2 \quad (6)$$

o bien

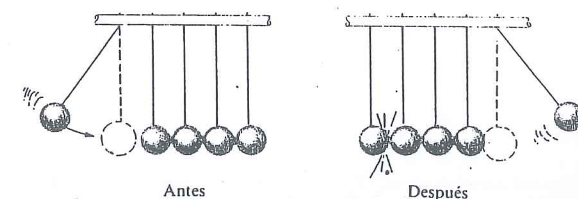
$$2v_L(v_L - v) = 0 \quad (7)$$

Por lo tanto, $v_L = 0$ y $v_R = v$, o bien $v_L = v$ y $v_R = 0$. Lo último debe rechazarse por no tener sentido físico, ya que requeriría que el bloque izquierdo pasase a través del bloque derecho estacionario.

Se muestra en el diagrama una extensión de este resultado para el caso de que se tengan tres bloques:



Si la distancia entre los bloques, inicialmente en reposo, se aproxima a cero y añadimos más bloques, tendremos el mecanismo de un juguete bien conocido:



En el ejemplo anterior notamos la necesidad de tener alguna medida de la capacidad de rebote de los cuerpos en colisión. El concepto de **coeficiente de restitución**, que proporciona esta información, se aclara muy fácilmente por medio de un ejemplo.

Suponga que, como se ve en la Fig. 2.9, dos discos se deslizan a lo largo de un piso liso. Las trayectorias están sobre la misma recta y el disco $\mathscr{A}$ está a punto de alcanzar y entrar en contacto con el disco $\mathscr{B}$ en el tiempo t_1. Los centros de masa de los discos se acercarán hasta que en el tiempo t_2 tengan la velocidad común v_C. Entonces se alejarán hasta que en el tiempo t_3 se rompa el contacto. Las fuerzas iguales y opuestas de interacción $F(t)$ se muestran sobre

los discos en la Fig. 2.9. Aplicando el principio de impulso y cantidad de movimiento durante los intervalos de acercamiento y separación de los centros de masa de los discos se obtiene

$$-\int_{t_1}^{t_2} F\,dt = m_{\mathcal{A}}(v_C - v_{Ai})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F\,dt = m_{\mathcal{B}}(v_C - v_{Bi}) \tag{2.34}$$

$$-\int_{t_2}^{t_3} F\,dt = m_{\mathcal{A}}(v_{Af} - v_C)$$

y

$$\int_{t_2}^{t_3} F\,dt = m_{\mathcal{B}}(v_{Bf} - v_C)$$

Si definimos el coeficiente de restitución e como

$$e \equiv \frac{\int_{t_2}^{t_3} F\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} F\,dt} \tag{2.35}$$

obtenemos, empleando las ecuaciones de impulso y cantidad de movimiento anteriores

$$e = \frac{v_{Af} - v_C}{v_C - v_{Ai}} = \frac{v_{Bf} - v_C}{v_C - v_{Bi}}$$

Si eliminamos v_C resulta

$$e = \frac{v_{Bf} - v_{Af}}{v_{Ai} - v_{Bi}} \tag{2.36}$$

que es el cociente de la "velocidad relativa de separación" y de la "velocidad relativa de acercamiento". El coeficiente de restitución es inherentemente no negativo, y el caso $e = 0$ da $v_{Af} = v_{Bf}$, lo que significa que los discos permanecen juntos. En el Ejemplo 2.16, para el caso de disipación nula de energía teníamos

$$e = \frac{v - 0}{v - 0} = 1$$

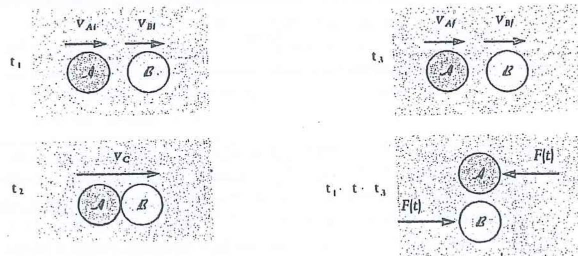


Figura 2.9 Colisión directa (en línea recta) de dos discos.

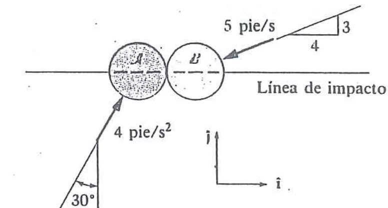
En el Problema 2.147 se esboza la demostración de que, en las condiciones presentes, $e \leq 1$.

El impacto descrito se denomina *central* porque la línea de acción de las fuerzas iguales y opuestas de interacción es la recta que une los centros de masa de los cuerpos. Se llama también *directo* porque las velocidades previas al impacto son paralelas a esa línea de acción. La generalización al caso del impacto indirecto pero central se efectúa fácilmente suponiendo que los discos son lisos y que el tiempo de contacto es tan pequeño que no se presentan cambios importantes en sus posiciones durante la colisión. Entonces las componentes de velocidad perpendiculares a la línea de acción (línea de impacto) de la fuerza impulsiva no cambian a consecuencia de la colisión. Las Ecs. (2.34) y (2.36) se refieren ahora a las componentes de la velocidad a lo largo de la línea de impacto. Así, el coeficiente de restitución es la relación entre las componentes de velocidad relativa a lo largo de la línea de impacto.

Los experimentos* indican que el coeficiente de restitución depende de prácticamente todo lo involucrado en un impacto: materiales, configuración y velocidades iniciales. Por ello los valores numéricos deben usarse con cuidado. El hecho de que el coeficiente debe tener un valor comprendido entre 0 y 1 es una información muy valiosa que permite acotar el comportamiento de cuerpos en colisión. En el Capítulo 5 se trata el uso del coeficiente de restitución para casos diferentes al del impacto central.

Ejemplo 2.17

Dos discos idénticos chocan entrando en contacto en las posiciones mostradas; se muestran también sus velocidades antes del choque. Si el coeficiente de restitución es 0.8, encuentre las velocidades de los discos después de la colisión; determine también el impulso de la fuerza de interacción.



Solución

Si se desprecia la fricción y suponiendo que la deformación es insignificante, las fuerzas de interacción actúan a lo largo de la línea de impacto mostrada en la figura. Es conveniente escoger $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ paralelo y perpendicular a esta línea. Sean m la masa de cada disco, $\mathbf{v}_{Af}$ y $\mathbf{v}_{Ai}$ las velocidades final e inicial del disco $\mathcal{A}$ y similarmente para el disco $\mathcal{B}$.

$$\mathbf{v}_{Ai} = 4(\text{sen}\,30°\hat{\imath} + \cos 30°\hat{\jmath}) = 2\hat{\imath} + 3.46\hat{\jmath} \text{ pie/s}$$

Entonces

$$\mathbf{v}_{A_f} = v_1\hat{\imath} + 3.46\hat{\jmath}$$

*Véase *W.* Goldsmith, *Impact* (Londres: Edward Arnold Publishers, *Ltd.*, 1960).

en donde v_1 es la componente desconocida a lo largo de la línea de impacto. También

$$\mathbf{v}_{Bi} = 5\left(-\frac{4}{5}\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{5}\hat{\mathbf{j}}\right) = -4\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} \text{ pie/s}$$

y

$$\mathbf{v}_{Bf} = v_2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}$$

Puesto que no existen fuerzas externas sobre el sistema de los dos discos, la cantidad de movimiento se conserva:

$$m\mathbf{v}_{Af} + m\mathbf{v}_{Bf} = m\mathbf{v}_{Ai} + m\mathbf{v}_{Bi}$$

La ecuación de componentes en la dirección perpendicular a la línea de impacto se satisface automáticamente y en la dirección $\hat{\mathbf{i}}$:

$$mv_1 + mv_2 = m(2) + m(-4)$$

o bien

$$v_1 + v_2 = -2 \qquad (1)$$

De acuerdo con la definición del coeficiente de restitución

$$e = 0.8 = \frac{v_2 - v_1}{2 - (-4)}$$

o bien

$$v_2 - v_1 = 4.80 \qquad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) simultáneamente

$$v_1 = -3.40$$

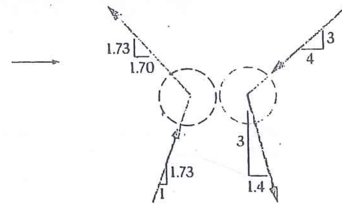
$$v_2 = 1.40$$

de modo que

$$\mathbf{v}_{Af} = -3.40\hat{\mathbf{i}} + 3.46\hat{\mathbf{j}} \text{ pie/s}$$

y

$$\mathbf{v}_{Bf} = 1.40\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} \text{ pie/s}$$

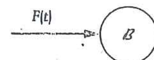


Las trayectorias de los discos se muestran en la figura anexa.

Para calcular el impulso de la fuerza de interacción, aplicamos el principio del impulso y la cantidad de movimiento al disco ; si éste pesa 6 onzas, $m = (6/16)/32.2 = 0.0116$ slug.

$$\int F\,dt = 0.0116[1.40 - (-3)]$$

$$= 0.0510 \text{ lb-s}$$



Problemas / Sección 2.4

2.131 En la Fig. P2.131 se dan datos pertinentes a un sistema de dos partículas. En el instante mostrado encuentre:

a. La posición del centro de masa
b. La energía cinética del sistema
c. La cantidad de movimiento del sistema
d. La velocidad del centro de masa
e. La aceleración del centro de masa

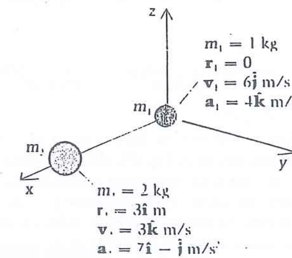


Figura P2.131

2.132 El astronauta de la Fig. P2. 132 tiene dificultades para disminuir su cantidad de movimiento al caminar rápidamente en la Luna. Usando un coeficiente de fricción $\mu = 0.3$ y una aceleración gravitacional igual a un sexto de la de la Tierra, evidencie la dificultad de detener una cantidad de movimiento hacia el frente de mv = (5 slug) (12 pie/s). Específicamente use el principio de impulso y cantidad de movimiento para encontrar el tiempo necesario para detenerse en la Tierra comparado con el necesario en la Luna.

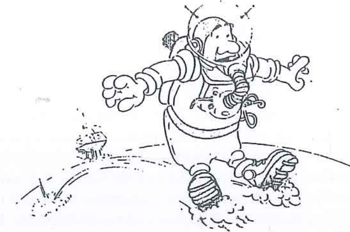


Figura P2.132

2.133 Se aplica una fuerza horizontal $F(t)$ durante 0.2 s a una bola de billar (peso = 0.55 lb) por medio de un taco; la variación de la fuerza se muestra en la Fig. P2.133. Si la velocidad del centro de la bola es de 8 pie/s después de que se rompe el contacto con el taco, encuentre la magnitud pico F_0 de la fuerza. Desprecie la fricción; la fuerza F se mide en libras.

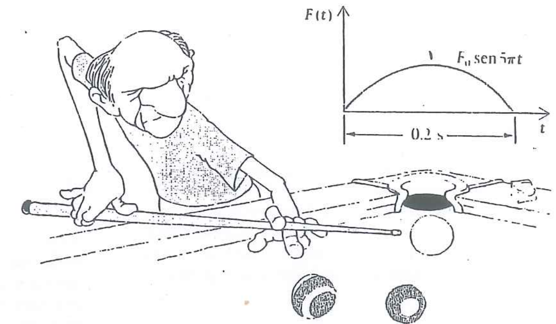


Figura P2.133

2.134 Una partícula P de 20 kg se encuentra en reposo en un marco inercial. En $t = 0$, una fuerza unidimensional empieza a actuar sobre ella; la variación en el tiempo de la fuerza se muestra en la Fig. P2.134. Encuentre la velocidad de P cuando $t = 5$ s.

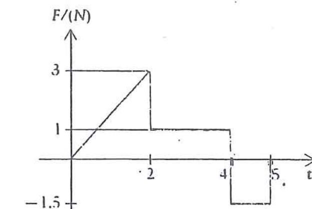


Figura P2.134

2.135 La caja de 50 lb mostrada en la Fig. P2.135 se encuentra en reposo antes de que la fuerza $F(t) = 5 + 2t$ lb se le aplique en $t = 0$. Suponga que la caja no puede volcarse y que el coeficiente de fricción entre la caja y el suelo es de 0.2. Encuentre la velocidad del centro de masa de la caja en $t = 10$ s.

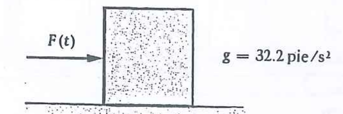


Figura P2.135

2.136 Repita el problema anterior para el caso en que la fuerza $F(t)$ tenga una componente vertical como se muestra en la Fig. P2.136.

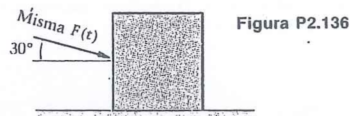


Figura P2.136

2.137 Una fuerza P aplicada a $\mathcal{C}$ en $t = 0$ varía según la función $P = 25\,\text{sen}(\pi t/60)$ lb, en la que t está en segundos. (Vea la Fig. P2.137). ¿Cuánto tiempo le tomará a $\mathcal{C}$ empezar a deslizarse? ¿Qué velocidad tendrá en $t = 30$ s?

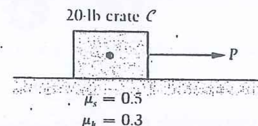


Figura P2.137

2.138 Una teja suelta de 2.2 lb resbala y choca con un canalón (Vea la Fig. P2.138). El ángulo en el que la teja está a punto de resbalar es de 20°. Determine el impulso impartido a la teja por el canalón si no hay rebote. Si el intervalo de impacto es de 0.1 s, calcule la fuerza promedio impartida al canalón por la teja.

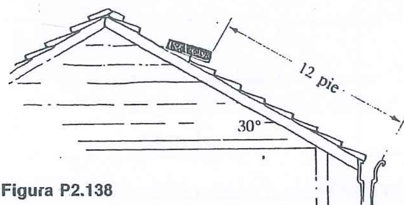


Figura P2.138

2.139 Dos carros de ferrocarril quedan acoplados por una colisión ocurrida justamente después del instante mostrado en la Fig. P2.139. Despreciando el impulso causado por la fricción de los rieles o carriles, determine la velocidad final de los dos vagones moverse juntamente.

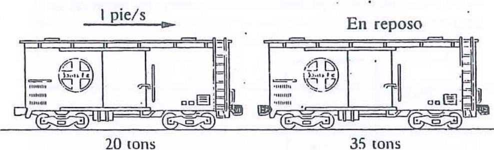
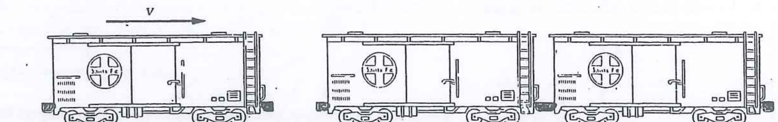


Figura P2.139

2.140 En el problema anterior determine la fuerza impulsiva promedio entre los vagones si el acoplamiento requiere 0.6 s de contacto.

2.141 En un patio de maniobras un vagón de carga que se mueve con velocidad v choca con dos vagones idénticos en reposo. (Vea la Fig. P2.141). Despreciando toda resistencia al rodamiento, encuentre la velocidad común del sistema de los tres vagones después de que se ha completado el acople y cualquier vibración asociada ha desaparecido.



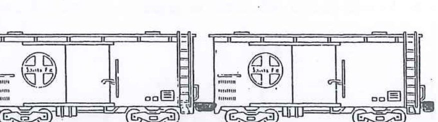


Figura P2.141

2.142 Un hombre de masa m y un bote de masa M están en reposo como se muestra en la Fig. P2.142. Si el hombre camina hacia el frente del bote, demuestre que su distancia al muelle es entonces de $Lg/(1 + g)$, en donde $g = m/M$ es la razón de las masas del hombre y el bote. Aclare la respuesta en los casos límites en que $m \ll M$ y $M \ll m$. Desprecie la resistencia del agua al movimiento del bote.

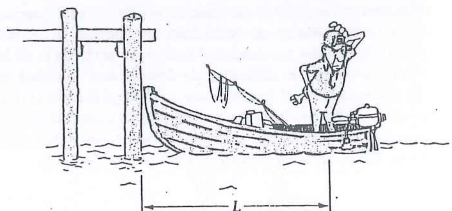


Figura P2.142

* **2.143** Dos hombres con masa m cada uno están de pie en un carro de ferrocarril de masa M. El carro tiene libertad para moverse en rieles a nivel sin fricción. El conjunto está inicialmente en reposo. Uno de los hombres corre hacia el extremo derecho del vagón y salta horizontalmente y paralelamente a los rieles con velocidad U relativa a la plataforma. En ese momento el otro hombre corre hacia el extremo izquierdo y salta de la misma manera también con velocidad U relativa a la plataforma. Encuentre la velocidad final de este e indique claramente la dirección de su movimiento.

* **2.144** En la Fig. P2. 144 el hombre de masa m está en el extremo A de un tablón de 20 pie de masa $3m$ que está manteniendo en reposo sobre el plano inclinado liso por medio de una cuerda. El hombre corta la cuerda y corre hacia el extremo B del tablón. Cuando llega ahí, el extremo B tiene la misma posición sobre el plano que la que tenía originalmente. Encuentre el tiempo que le toma al hombre correr de A a B.

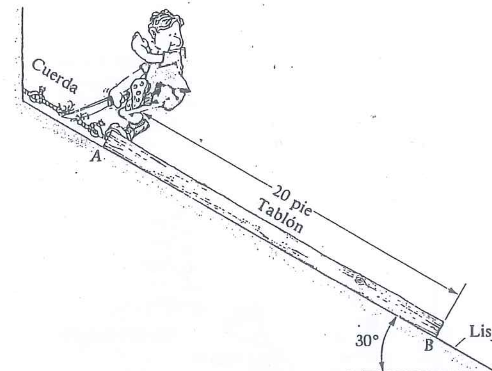


Figura P2.144

2.145 Una pelota se suelta desde una altura H y rebota. (Vea la Fig. P2.145). Si el coeficiente de restitución es e, encuentre la altura a que se eleva la pelota después del segundo rebote.

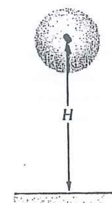


Figura P2.145

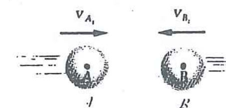


Figura P2.146

2.146 Dos bolas elásticas idénticas y se mueven una hacia la otra. Encuentre la relación de velocidades de acercamiento v_{Ai}/v_{Bi} para que $\mathcal{A}$ quede en reposo después de la colisión. El coeficiente de restitución es e (Fig. P2.146).

2.147 Use las dos ecuaciones

$$m_{\mathcal{A}}v_{A_i} + m_{\mathcal{B}}v_{B_i} = m_{\mathcal{A}}v_{A_f} + m_{\mathcal{B}}v_{B_f}$$

y

$$e = \frac{v_{B_f} - v_{A_f}}{v_{A_i} - v_{B_i}} \qquad (= \text{coeficiente de restitución})$$

para demostrar que la pérdida de energía cinética cuando los cuerpos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ chocan (Fig. P2.147) es:

$$\Delta T = \frac{m_{\mathcal{A}}m_{\mathcal{B}}(1 - e^2)(v_{A_i} - v_{B_i})^2}{2(m_{\mathcal{A}} + m_{\mathcal{B}})}$$

Deduzca de este resultado que $e \leq 1$

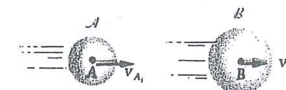


Figura P2.147

2.148 Use el resultado del problema anterior para demostrar que para una colisión frontal con velocidades v y masas m iguales,

$$\Delta T = 2\frac{mv^2}{2}(1 - e^2)$$

de modo que si $e = 0$, se pierde *toda* la T inicial y si $e = 1$, *no se pierde nada*. ¿Es cierto esto cuando las masas y las velocidades son diferentes?

2.149 En el futbol (*soccer*) se anota un gol solo si el balón *completa* pasa la *totalidad* de la línea de meta de 4 plg de ancho. (Vea la Fig. P2.149). Despreciando la fricción entre la pelota y el travesaño, determine el máximo coeficiente de restitución para el que se anotará un gol antes de que toque el suelo. La velocidad del centro C de la pelota forma un ángulo de 15° con la horizontal. Desprecie la desviación causada por la gravedad en la trayectoria entre el travesaño y el suelo.

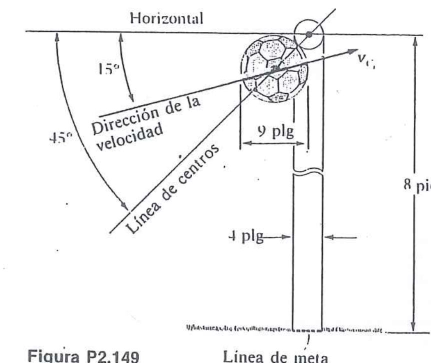


Figura P2.149

2.150 Repita el Ejemplo 2.17 para la línea de impacto mostrada en la Fig. P2.150.

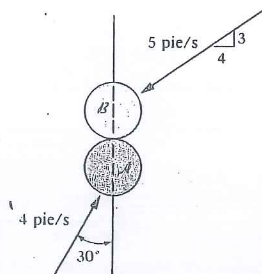


Figura P2.150

2.151 Repita el Problema 2.150 suponiendo que el disco $\mathcal{A}$ pesa 9 onzas (y $\mathcal{B}$, 6 onzas, igual que antes).

2.152 Repita el Ejemplo 2.17 para el caso en que la línea de impacto sea paralela a la velocidad de $\mathcal{B}$ antes de la colisión.

2.153 Repita el Problema 2.152 suponiendo que el disco $\mathcal{A}$ pesa 9 onzas (y $\mathcal{B}$ 6 onzas, igual que antes).

2.154 Un bloque de 10 kg oscila hacia abajo como se muestra en la Fig. P2.154 y golpea a otro bloque idéntico. Suponga que la cuerda de 6 m se rompe durante el impacto y que los bloques permanecen juntos después de la colisión. ¿Cuánto tardarán en detenerse? ¿Qué tan lejos se desplazarán?

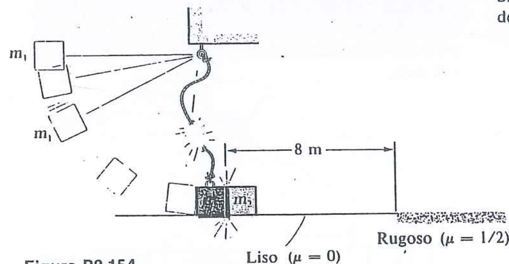


Figura P2.154

2.155 Usando el ángulo α que hará que la bala de cañón caiga en el carro (Problema 2.19), encuentre la deflexión máxima del resorte (Vea la Fig. P2.155).

2.156 En el Problema 2.19 encuentre el tiempo total para que la bala del cañón y la caja se detengan o choquen con la pared, cualquiera que sea lo que ocurra primero.

2.157 Una bala de cañón se dispara, como se ve en la Fig. P2.157, con una velocidad inicial de 1600 pie/s y un ángulo de 60°. Justamente después del disparo el cañón comienza a recular y golpea una placa unida a un resorte. Encuentre la máxima deformación de este si el plano es liso y el módulo del resorte es de 500 lb/pie.

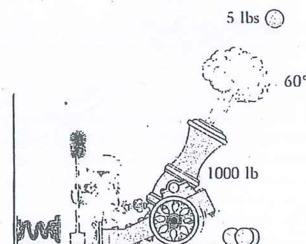


Figura P2.157

2.158 Una bala de 3/4 de onza se dispara con velocidad de 1800 pie/s contra un bloque de 10 lb. (Vea la Fig. P2.158). Si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es de 0.3, calcule:

a. La distancia que se desplazará el bloque.
b. El porcentaje de pérdida de energía cinética inicial de la bala causada por la fricción en el desplazamiento y el porcentaje de pérdida causada por la colisión.
c. El tiempo requerido para que la bala y el bloque se detengan después del impacto.

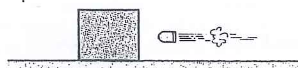
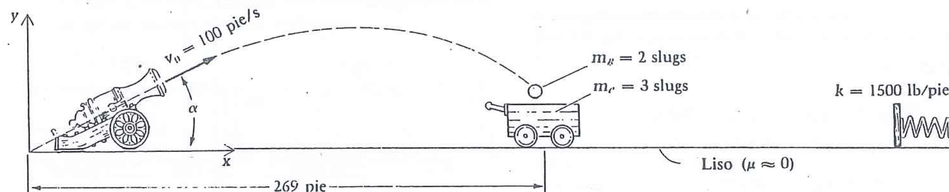


Figura P2.158

Figura P2.155



2.159 El peso W_1 cae desde el reposo una distancia H y entra en contacto con otro peso W_2 que estaba en equilibrio sobre un resorte de módulo k. (Vea la Fig. P2. 159). Si el coeficiente de restitución es cero, encuentre la compresión del resorte cuando los pesos se encuentran en el punto más bajo.

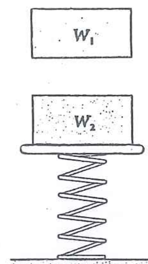


Figura P2.159

2.160 El bloque $\mathcal{A}$ en la Fig. P2.160 pesa 16.1 lb y se encuentra viajando hacia la derecha sobre el plano liso a 50 pie/s. El bloque $\mathcal{B}$ pesa 8.05 lb y está en equilibrio con el resorte que justamente le impide resbalar sobre el tramo rugoso del plano. El cuerpo $\mathcal{A}$ golpea al $\mathcal{B}$; el coeficiente de restitución $e = 1/2$. Encuentre la deformación máxima del resorte.

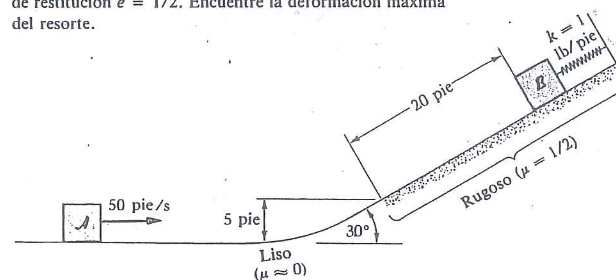


Figura P2.160

2.161 El cuerpo $\mathcal{A}$ de 16 kg y el cuerpo $\mathcal{B}$ de 32 kg mostrados en la Fig. P2.161 están unidos por un resorte ligero con módulo de 12 000 N/m. La longitud no alargada del resorte es de 0.15 m. Los bloques son separados sobre el plano horizontal liso hasta que la distancia entre ellos es de 0.3 m y luego se sueltan desde el reposo. Determine la velocidad de cada bloque cuando la distancia entre ellos sea de 0.22 m. *Sugerencia*: Igual que en el Problema 2.126, forme la suma de las ecuaciones de trabajo y energía para los dos cuerpos.

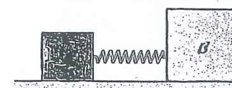


Figura P2.161

2.162 Una cadena de longitud L y masa por unidad de longitud igual a β se mantiene verticalmente sobre el platillo de la báscula mostrada en la Fig. P2.162, y se suelta del reposo con su extremo inferior tocando apenas el platillo. Suponga que los eslabones alcanzan rápidamente el reposo al amontonarse sobre el platillo y que no interfieren con los eslabones aún en caída libre por encima de ellos. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la cadena entera y exprese la cantidad de movimiento como una función de la distancia a través de la cual el extremo superior ha caído. Luego determine la fuerza que indica la báscula en función de esta distancia.

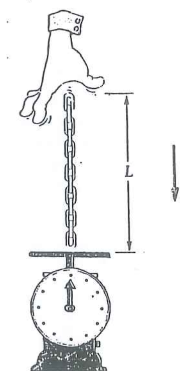


Figura P2.162

* 2.163 Un bloque de masa mL que puede moverse sobre una mesa horizontal lisa, está unido a un extremo de una cadena uniforme de masa m por unidad de longitud. Inicialmente el bloque y la cadena están en reposo y la cadena está completamente enrollada sobre la mesa. Una fuerza horizontal constante mLf se aplica luego al bloque de manera que la cadena empieza a desenrollarse. Demuestre que la longitud x desenrollada en el tiempo t está dada por

$$(L + x)^2 = Lft^2 + L^2$$

hasta que la cadena está completamente desenrollada. Si la longitud de la dicha cadena es muy grande comparada con L, demuestre que la velocidad del bloque es aproximadamente igual a $(Lf)^{1/2}$ en el momento en que la cadena está completamente desenrollada.

* **2.164** Un problema importante de la dinámica de los sólidos deformables es el de describir el movimiento que resulta cuando se aplica presión rápidamente al extremo de una barra elástica delgada uniforme. Una teoría aproximada muy útil proporciona la ecuación de onda unidimensional que rige tal movimiento. Esta teoría predice que una presión aplicada en un extremo de la barra crea una perturbación (onda) que se propaga con velocidad constante c. Para concretar, suponga que la barra mostrada en la Fig. P2.164a está en reposo para $t < 0$ y está sujeta a la presión uniforme (sobre el extremo de área A) mostrada en la Fig. P2.164b. Si la perturbación no ha llegado al extremo derecho, o sea si $t < L/c$, entonces para $t > t_0$, las velocidades $\dot{u}\hat{\mathbf{i}}$ y las aceleraciones $\ddot{u}\hat{\mathbf{i}}$ de las partículas, que varían sólo con x y t, son como se muestra en las Figs. P2.164c y d, en donde ρ es la densidad de la barra.

La primera parte de este problema es evaluar la integral

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbf{a}\, dm = \hat{\mathbf{i}} \int_0^L \int_A \rho \ddot{u}\, dA\, dx$$

El valor que debe obtenerse es $p_0 A\hat{\mathbf{i}}$, y ya que esto es igual a la fuerza externa sobre la barra, la Ec. (2.4) queda confirmada para este caso. Es importante reconocer que sólo el intervalo de $x = ct - ct_0$ a $x = ct$ contribuye al valor de la integral; esto es, sólo las partículas en esa región están aceleradas.

El segundo elemento de este problema es evaluar la cantidad de movimiento

$$\mathbf{L} = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{v}\, dm = \hat{\mathbf{i}} \int_0^L \int_A \rho \dot{u}\, dA\, dx$$

El resultado será

$$\mathbf{L} = p_0 A\left[(t - t_0) + \frac{t_0}{2}\right]\hat{\mathbf{i}}$$

El segundo término dentro de los corchetes, una constante, es la contribución de integrar sobre el intervalo ct_0, en el que las partículas están aceleradas. La dependencia del tiempo de L aparece a causa del número creciente de partículas con velocidad $(p_0/\rho c)\hat{\mathbf{i}}$. Como era de esperarse $\dot{L} = p_0 A\hat{\mathbf{i}}$.

En efecto, hemos confirmado la ley de Euler, $\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}$, de dos maneras. En la primera

$$\dot{\mathbf{L}} = \int \frac{d\mathbf{v}}{dt}\, dm = \int \mathbf{a}\, dm$$

en la segunda

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt}\int \mathbf{v}\, dm$$

En este caso no hay razón para expresar preferencia por el orden de derivación respecto al tiempo e integrar sobre el cuerpo. Si la presión fuese aplicada repentinamente en su magnitud total ($t_0 = 0$), habría una discontinuidad en la velocidad de las partículas (onda de choque) y, en consecuencia, una aceleración indefinida en el frente de la onda, $x = ct$. Debido a esta aceleración indefinida (o infinita) $\int \mathbf{a}\, dm$ resulta sin sentido y no conduce al valor de $\dot{L}$. Sin embargo, no hay dificultad para evaluar L puesto que las velocidades de las partículas son $p_0/\rho c$ para $x < ct$ y cero para $x > ct$.

Entonces

$$\mathbf{L} = \frac{p_0}{\rho c}(\rho Act)\hat{\mathbf{i}} = p_0 At\hat{\mathbf{i}}$$

y $\quad \dot{\mathbf{L}} = p_0 A\hat{\mathbf{i}}.$

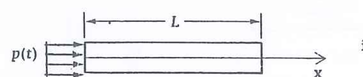


Figura P2.164a

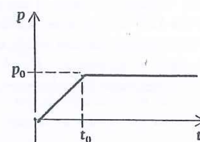


Figura P2.164b

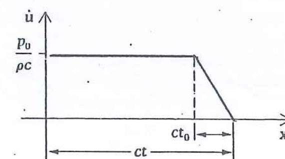


Figura P2.164c

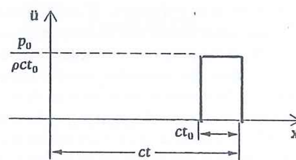


Figura P2.164d

2.5 Segunda ley de Euler en términos de la cantidad de movimiento angular

La Primera Ley de Euler se expresa en términos de la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento (lineal) de un cuerpo; la Segunda Ley de Euler puede expresarse en función de la derivada respecto al tiempo de la **cantidad de movimiento angular** (o **ímpetu**) (momento de la cantidad de movimiento)* . La cantidad de movimiento angular con respecto a un punto P se designa $\mathbf{H}_P$ y se define como la suma de las cantidades de movimiento angulares (con respecto a P) de las partículas individuales que forman el cuerpo. Con referencia a la Fig. 2.10:

$$\mathbf{H}_P = \Sigma\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i \tag{2.37}$$

Antes de proceder a desarrollar varias formas de la Segunda Ley de Euler, estableceremos una relación muy útil entre las cantidades de movimiento angulares. Notando de la definición, Ec. (2.37) y de la Fig. 2.10 que

$$\mathbf{H}_C = \Sigma\boldsymbol{\rho}_i \times m_i\mathbf{v}_i$$

y que

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{PC} + \boldsymbol{\rho}_i$$

se tiene entonces

$$\mathbf{H}_P = \Sigma(\boldsymbol{\rho}_i + \mathbf{r}_{PC}) \times m_i\mathbf{v}_i = \Sigma\boldsymbol{\rho}_i \times m_i\mathbf{v}_i + \mathbf{r}_{PC} \times \Sigma m_i\mathbf{v}_i$$

Pero $\;m_i\mathbf{v}_i$ es la cantidad de movimiento

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}_C$$

por lo que

$$\mathbf{H}_P = \mathbf{H}_C + \mathbf{r}_{PC} \times \mathbf{L} \tag{2.38}$$

Así, la cantidad de movimiento angular de un cuerpo respecto a un punto P cualquiera en el espacio es la suma de la cantidad de movimiento angular respecto a su centro de masa C y de la cantidad del movimiento (momento de su cantidad de movimiento) $\mathbf{L}$ respecto a P. (A $\mathbf{L}$ se le asigna una "línea de acción" a través de C.)

Ahora aplicamos la definición de cantidad de movimiento angular, Ec. (2.37), respecto a un punto O fijo en un marco de referencia inercial. Por lo tanto

$$\mathbf{H}_O = \Sigma\mathbf{R}_i \times m_i\mathbf{v}_i$$

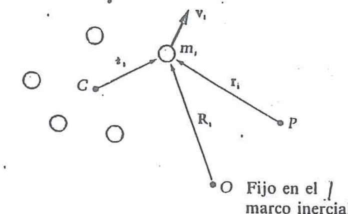


Figura 2.10

* El calificativo de "angular proviene de que en esta cantidad interviene la velocidad angular de un cuerpo rígido. (N. del R.) También se le llama *momémtum angular*, e impropiamente "momento angular."

Si derivamos respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \Sigma(\dot{\mathbf{R}}_i \times m_i\mathbf{v}_i + \mathbf{R}_i \times m_i\mathbf{a}_i)$$

Pero

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{v}_i$$

por lo que

$$\dot{\mathbf{R}}_i \times \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

y

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \Sigma\mathbf{R}_i \times m_i\mathbf{a}_i$$

Pero la forma fundamental de la Segunda Ley de Euler, Ec. (2.7), dice que

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma\mathbf{R}_i \times m_i\mathbf{a}_i$$

por lo que

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt} \tag{2.39}$$

Otra forma similar de la Segunda Ley de Euler puede obtenerse si primero usamos la Ec. (2.38) para el caso de un punto fijo O:

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{H}_C + \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{L}$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{H}_C}{dt} + \mathbf{v}_C \times \mathbf{L} + \mathbf{r}_{OC} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

expresión en la que hemos usado la relación

$$\frac{d\mathbf{r}_{OC}}{dt} = \mathbf{v}_C$$

Pero

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}_C, \text{ por lo que } \mathbf{v}_C \times \mathbf{L} = \mathbf{0}$$

y

$$\frac{d\mathbf{H}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{H}_C}{dt} + \mathbf{r}_{OC} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{2.40}$$

Sabemos del estudio de los sistemas de fuerzas equipolentes en la estática que las fuerzas externas sobre el cuerpo deben producir momentos respecto a O y C que están relacionados por

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma\mathbf{M}_C + \mathbf{r}_{OC} \times (\Sigma\mathbf{F}) \tag{2.41}$$

Puesto que

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad \text{y} \quad \Sigma\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{H}_O}{dt}$$

se obtiene de las Ecs. (2.40) y (2.41):

$$\Sigma\mathbf{M}_C = \frac{d\mathbf{H}_C}{dt} \tag{2.42}$$

En general $\Sigma\mathbf{M}_P \neq \dot{\mathbf{H}}_P$, pero las Ecs. (2.39) y (2.42) dan casos especiales importantes para los que la igualdad se cumple. Hay otros casos especiales que no trataremos aquí ya que son menos importantes que los dos que hemos tratado.

Nótese que existen situaciones para las que la cantidad de movimiento angular se conserva. En particular, si para un intervalo de tiempo $\Sigma\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$, entonces en ese intervalo $\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{0}$ y $\mathbf{H}_C$ es constante.

Para un punto arbitrario P, existe una forma de la Segunda Ley de Euler que es de especial valor al analizar los movimientos de cuerpos rígidos, aunque su validez no se restringe a tales situaciones particulares. Para deducirla usamos nuevamente el conocimiento de los sistemas de fuerzas:

$$\Sigma\mathbf{M}_P = \Sigma\mathbf{M}_C + \mathbf{r}_{PC} \times (\Sigma\mathbf{F})$$

entonces

$$\Sigma\mathbf{M}_P = \frac{d\mathbf{H}_C}{dt} + \mathbf{r}_{PC} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

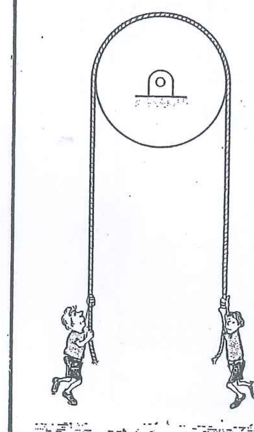
o bien

$$\Sigma\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_C + \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_C \tag{2.43}$$

Pregunta 2.10 ¿Debe P estar fijo en el marco inercial de referencia, (a) para que la Ec. (2.32) sea cierta y (b) para que la Ec. (2.43) se verifique?

Finalmente recordamos al lector que todas las relaciones de este capítulo se refieren a sistemas de masa constante. Sin embargo, las Leyes de Euler proporcionan el punto de partida natural para establecer relaciones apropiadas a sistemas de masa variable, como es el caso de los cohetes. El lector tiene ahora las bases para estudiar el tópico especial de la Sección 8.2

Ejemplo 2.18



Dos gimnastas de igual peso cuelgan en equilibrio de los extremos de una cuerda que pasa sobre una polea relativamente ligera, cuya fricción en los cojinetes de apoyo puede despreciarse. El gimnasta a la derecha comienza a trepar por la cuerda mientras que el situado a la izquierda se mantiene quieto. ¿Cuál ha sido el cambio en la posición del gimnasta a la izquierda cuando el otro se ha elevado hasta la altura h (relativa al suelo)?

Solución

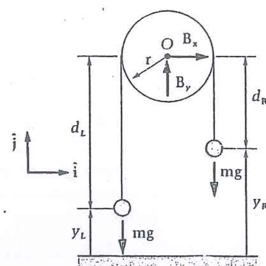
Construyendo un diagrama de cuerpo libre del sistema polea-cuerda-gimnastas, en el que despreciamos el peso de la polea y de la cuerda, se ve que

$$\Sigma\mathbf{M}_O = 0$$

Por esto, $\mathbf{H}_O$ es constante durante el movimiento y puesto que todo comienza del reposo,

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{0}$$

Si se trata a los gimnastas como partículas y se desprecia la cantidad de movimiento angular de la polea,



$$\mathbf{H}_O = (r\hat{\mathbf{i}} - d_R\hat{\mathbf{j}}) \times (m\dot{y}_R\hat{\mathbf{j}}) + (-r\hat{\mathbf{i}} - d_L\hat{\mathbf{j}}) \times (m\dot{y}_L\hat{\mathbf{j}})$$

o bien

$$\mathbf{H}_O = rm\dot{y}_R\hat{\mathbf{k}} + rm\dot{y}_L(-\hat{\mathbf{k}})$$

Pero

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{0}$$

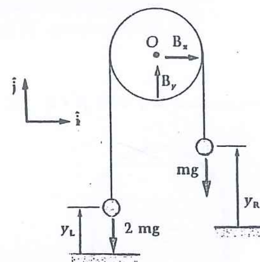
de modo que

$$\dot{y}_R = \dot{y}_L$$

o sea que el gimnasta a la izquierda asciende con la misma tasa que el de la derecha. Así, cuando éste ha trepado a la altura h, el izquierdo ha sido halado hacia arriba a la misma altura. Nótese que si la cuerda es inextensible el gimnasta de la derecha ha trepado una distancia $2h$ relativa a la cuerda

Ejemplo 2.19

Suponga que el gimnasta "quieto" del ejemplo anterior pesa el doble que el gimnasta de la derecha. ¿Cuál sería entonces la relación entre sus cambios de elevación?



Solución

Del diagrama de cuerpo libre,

$$\Sigma\mathbf{M}_O = 2mgr\hat{\mathbf{k}} - mgr\hat{\mathbf{k}}$$
$$= mgr\hat{\mathbf{k}}$$

Ya que $mgr\hat{\mathbf{k}} \neq \mathbf{0}$, la cantidad de movimiento angular no se conserva en este caso. Integrando,

$$\int_O^t \Sigma\mathbf{M}_O\, d\tau = \mathbf{H}_O(t) - \mathbf{H}_O(0) \quad (\mathbf{H}_O(0) = 0)$$

o

$$mgrt\hat{\mathbf{k}} = rm\dot{y}_R\hat{\mathbf{k}} + r(2m)\dot{y}_L(-\hat{\mathbf{k}})$$

de modo que

$$\dot{y}_L = \frac{1}{2}\dot{y}_R - \frac{gt}{2}$$

Si definimos y_R y y_L tales que $y_R = y_L = 0$ en $t = 0$, entonces,

$$y_L = \frac{1}{2}y_R - \frac{gt^2}{4}$$

Vemos entonces que es posible que el gimnasta más ligero levante al más pesado trepando rápidamente. Para una cuerda inextensible, el gimnasta de la derecha trepa, como antes, según una tasa $\dot{y}_R + \dot{y}_L$ relativa a la cuerda.

Problemas / Sección 2.5

2.165 En el Problema 2.131 encuentre: (a) la cantidad de movimiento angular del sistema con respecto al origen; (b) la cantidad de movimiento angular del sistema con respecto al centro de masa.

2.166 Una cuerda sin masa cuelga sobre una polea sin masa y sin fricción; la cuerda soporta dos monos (uno de masa M y otro de masa $2M$). El sistema se libera del reposo en $t = 0$, como se muestra en la Fig. P2.166. Durante los siguientes 2 s, el mono B desciende 15 pie a lo largo de la cuerda para tomar un cacahuate (sin masa) que se encuentra en el extremo P. El mono A se mantiene en la cuerda durante esos 2 s. Encuentre el desplazamiento de A durante ese intervalo de tiempo.

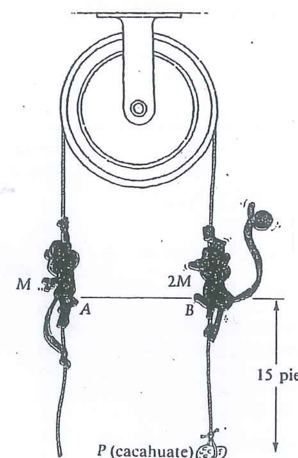


Figura P2.166

2.167 Un mono hambriento de masa m ve un racimo de plátanos de la misma masa m. (Fig. P2.167). El mono trepa con velocidad variable relativa a la cuerda (ligera). Determine si el mono alcanza el recimo antes de que éste pase por encima de la polea, suponiendo que la masa de la polea es despreciable ($\ll m$).

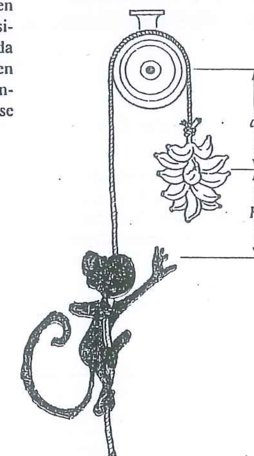


Figura P2.167

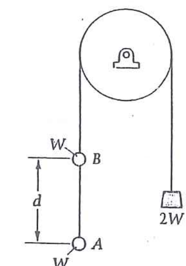


Figura P2.168

2.168 Dos gimnastas A y B, cada uno de peso W, se mantienen colgados en el mismo lado de una cuerda que pasa sobre una polea ligera y que en el otro extremo tiene un contrapeso C de peso $2W$ (Fig. P2.168). Inicialmente A se encuentra a una distancia d por debajo de B. El gimnasta A trepa sobre la cuerda para unirse a B. Determine el desplazamiento del contrapeso C cuando A alcanza a B.

2.169 Defina la cantidad de movimiento angular de una partícula respecto a un eje fijo y estipule las condiciones bajo las cuales el momento de su cantidad de movimiento permanece constante. Un hombre (considérelo como una partícula) se encuentra de pie sobre un columpio; su distancia al eje horizontal liso del columpio es L cuando se agacha y $(L - H)$ cuando se pone de pie. Al descender el columpio el hombre se agacha; al elevarse se endereza (el cambio en su posición se supone instantáneo). Si el columpio desciende un ángulo α y luego asciende un ángulo β, demuestre que

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \left(\frac{L}{L-H}\right)^{3/2} \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$$

La cantidad de movimiento angular relativa de un cuerpo $\mathcal{B}$ respecto a un punto P se define como

$$\mathbf{H}_{P_{rel}} = \int \mathbf{R} \times (\mathbf{v} - \mathbf{v}_P)\, dm$$

(Vea la Fig. P2.170, en donde la velocidad $\mathbf{v}$ de dm es la derivada de $\mathbf{r}$ en el marco inercial $\mathcal{I}$.) Nótese que "relativo" implica que la velocidad en el integrando es la diferencia entre $\mathbf{v}$ (de dm) y $\mathbf{v}_P$. Ahora resuelva los siguientes problemas.

2.170 Demuestre que $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_{Prel} + m\mathbf{r}_{pC} \times \mathbf{v}_p$. (¡Entonces $\mathbf{H}_C = \mathbf{H}_{Crel}$ siempre!)

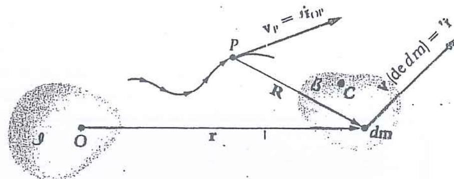


Figura P2.170

2.171 Demuestre que $\Sigma \mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_p + \mathbf{v}_p \times m\mathbf{v}_C$ (Entonces $\Sigma \mathbf{M}_p$ no es generalmente igual a $\dot{\mathbf{H}}_p$)

2.172 Demuestre que $\Sigma \mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_{Prel} + \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_P$. $v_C = \mathbf{r}_{PC} \times \mathbf{a}_P$

2.173 Demuestre que $\dot{\mathbf{H}}_p = \dot{\mathbf{H}}_{prel}$ si y sólo si $\mathbf{v}_p \times \mathbf{v}_C = \mathbf{r}_{pC} \times \mathbf{a}_p$

Problema Para Computadora / Capítulo 2

2.174 En la tabla siguiente se indican las velocidades del centro de masa y tiempos para una caja de 30 lb que fue levantada, aproximadamente en dirección vertical, por dos personas. La columna "Velocidad 1" representa los datos correspondientes a una persona más alta que los datos de la columna "Velocidad 2", correspondientes a una persona más baja. Use la computadora para integrar numéricamente la velocidad desde $t = 0$ hasta $t = 4.4$ s, obteniendo y comparando así las alturas a las que la caja fue levantada por cada persona.

Tiempo (s)	Velocidad 1 (plg/s)	Velocidad 2 (plg/s)	Tiempo (s)	Velocidad 1 (plg/s)	Velocidad 2 (plg/s)
0.0	0.0	0.0	2.3	25.0 (tope)	23.5
0.2	0.0	0.0	2.4	24.0	25.5
0.4	1.5	0.0	2.6	22.0	32.0
0.6	3.5	0.0	2.7	20.5	37.5 (tope)
0.8	5.5	0.0	2.8	19.0	35.0
1.0	8.5	2.0	3.0	16.5	25.0
1.2	12.0	4.0	3.2	14.5	21.5
1.4	16.5	6.5	3.4	13.0	17.0
1.6	19.0	10.0	3.6	12.0	15.0
1.8	21.0	14.0	3.8	10.0	13.0
2.0	22.5	17.0	4.0	8.5	9.5
2.2	24.5	21.0	4.2	7.5	8.5
			4.4	6.5	8.0

Respuestas a las Preguntas / Capítulo 2

P2.1 No. En ninguna parte de la derivación tuvimos que fijar a P.

P2.2 $\dot{m}$ es cero puesto que la definición de cuerpo requiere que su masa sea constante.

P2.3 Las componentes de los dos miembros de una ecuación vectorial son iguales en *cualquier* dirección.

P2.4 Significa que la respuesta no depende de la masa del auto.

P2.5 $(k) \cdot$ (alargamiento) da la fuerza igual en magnitud pero opuesta en dirección que actúa en los extremos de un resorte en equilibrio. Si las partículas del resorte están acelerándose como es generalmente el caso en problemas de dinámica, no hay una ley sencilla que relacione la fuerza con el alargamiento. Sin embargo, si el resorte es muy ligero, de manera que su masa pueda despreciarse (comparada con las masas de otros cuerpos del problema), $\int_{(\text{resorte})} \mathbf{a}\, dm \approx \mathbf{0}$, y las fuerzas sobre el resorte están instantáneamente relacionadas justo como si el resorte estuviera en equilibrio. La suposición oculta es que la masa del resorte puede despreciarse.

P2.6 Se necesita para que el trabajo sea igual al decremento en φ; esto es $\varphi[\mathbf{r}(t_1)] - \varphi[\mathbf{r}(t_2)]$.

P2.7 $T - \psi =$ constante; usamos la φ simplemente para poder decir que la energía mecánica es la suma de sus dos partes.

P2.8 No; en varios sitios durante el desarrollo hemos tenido que requerir que la masa sea constante.

P2.9 $v/101$; $v/10\ 001$.

P2.10 (a) No; (b) No.

Cuestionario de Repaso / Capítulo 2

¿Verdadero o falso?

1. En un cierto tiempo dado, puede demostrarse que el centro de masa de un cuerpo deformable es un punto único.
2. La cantidad de movimiento de cualquier cuerpo (o sistema de cuerpos) en un marco $\mathcal{I}$ es igual a la masa total por la velocidad del centro de masa en $\mathcal{I}$, aun si $\mathcal{I}$ no es un marco inercial.
3. La Primera Ley de Euler ($\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}$) se aplica a cuerpos deformables, sean estos sólidos, líquidos o gaseosos, así como a cuerpos rígidos y partículas.
4. Ni las leyes de movimiento ni el marco inercial tienen valor alguno uno sin el otro.
5. El centro de masa de un cuerpo $\mathcal{B}$ debe ser un punto físico o material de $\mathcal{B}$.
6. El trabajo efectuado por un resorte lineal depende de las trayectorias recorridas por sus puntos extremos entre las posiciones inicial y final.
7. El trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre un bloque que desliza sobre un plano fijo depende de la trayectoria del bloque.
8. El trabajo realizado por la gravedad sobre un cuerpo $\mathcal{B}$ depende de los desplazamientos laterales y verticales del centro de masa de $\mathcal{B}$.

9. Puesto que ningún trabajo externo fue efectuado sobre los dos cuerpos del Ejemplo 2.15 *durante el impacto*, su energía cinética total es la misma antes y después de la colisión.

10. Para todo cuerpo de densidad constante, el centroide del volumen y el centro de masa coinciden.

11. Al estudiar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, es aceptable tratar al planeta como una partícula; sin embargo, al estudiar la rotación diaria de la Tierra alrededor de su eje no tendría sentido considerarla como una partícula.

12. Las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo $\mathcal{B}$, y cuya resultante es $\mathbf{F}_r$ deben tener, cada una, una línea de acción que pase a través del centro de masa de $\mathcal{B}$ para que se cumpla la Primera Ley de Euler.

13. La Segunda Ley de Euler puede tomar la forma $\Sigma \mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_P$ independientemente del movimiento del punto P en el marco inercial.

Respuestas: 1 V; 2 V; 3 V; 4 V; 5 F; 6 F; 7 V; 8 F; 9 F; 10 V; 11 V; 12 F; 13 F;

Capítulo 3 Cinemática de un cuerpo rígido en movimiento plano.

3.1 Introducción

En este capítulo nuestros objetivos son desarrollar las relaciones entre velocidades, aceleraciones, velocidad angular y aceleración angular cuando un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ se mueve con movimiento plano en un marco de referencia $\mathcal{I}$. Sin embargo, antes de proceder a ello, expliquemos primero con precisión qué se entiende por los términos *cuerpo rígido, movimiento plano, plano de referencia* y algunos otros conceptos que necesitaremos en éste y en los siguientes capítulos.

Un **cuerpo rígido** es aquel en el que la distancia entre toda pareja de puntos pertenecientes al cuerpo permanece constante durante el movimiento.* Por supuesto, no existe un cuerpo verdaderamente rígido (ya que todos los cuerpos se deforman en alguna medida); sin embargo, las deformaciones de muchos cuerpos son suficientemente pequeñas durante sus movimientos, lo que permite que sean tratados con buenos resultados como si fueran rígidos.

El **movimiento plano** se trata en este libro como un movimiento en el plano xy (fijo en $\mathcal{I}$) o en planos paralelos a él. Sea P un punto cuyas coordenadas son $(x_P, Y_P Z_P)$. Decir que P tiene movimiento plano significa que permanece en el plano $z = Z_P$ durante todo su movimiento. Extendiendo esta definición, decimos que un cuerpo rígido tiene movimiento plano siempre que *todos* sus puntos permanezcan en los mismos planos (paralelos a xy) *en que se encontraban al inicio del movimiento.*

Pregunta 3.1 ¿Cuántos puntos, como mínimo, de un cuerpo rígido deben estar en movimiento plano para garantizar que *todos* se hallan en tal condición?

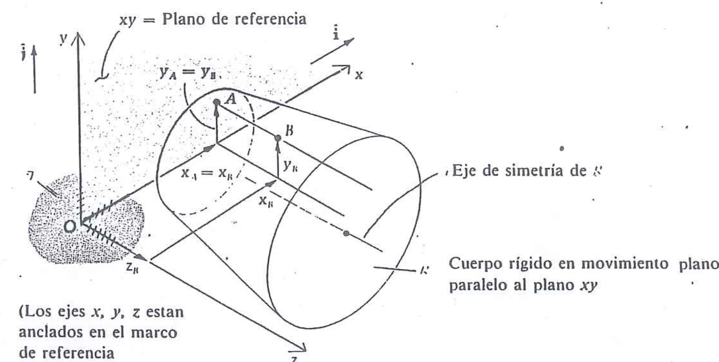
Un tercer concepto de la cinemática del cuerpo rígido que necesitamos entender es el de *cuerpo* **extendido**, llamado también **extensión rígida** del cuerpo. Esta noción, mencionada brevemente en el Capítulo 1, dice que algunas veces necesitamos imaginar puntos (que no son puntos materiales o físicos de $\mathcal{B}$ que se mueven con $\mathcal{B}$ como si de hecho estuvieran unidos a él. Un ejemplo serían los puntos sobre el eje geométrico de un tubo, que se encuentran en el espacio interior del tubo y se mueven rígidamente con él. Imaginaremos un "extensión rígida" del cuerpo que incluya a tales puntos siempre que convenga hacerlo así. Nótese que *cualquier* punto Q puede considerarse como un punto de *cualquier* cuerpo $\mathcal{B}$ extendido, siempre que Q se mueva con $\mathcal{B}$ como si estuviese unido rígidamente a él.

Con estos tres conceptos en mente estamos ahora preparados para definir el **plano de referencia.** Hay que darnos cuenta primero que estamos frente al problema de determinar dónde se encuentran todos los puntos de un cuerpo en función del tiempo t. Esa localización de los puntos $(x(t), y(t))$ tomaría un tiempo muy grande si tuviésemos que hacerla para cada uno de los muchos puntos de $\mathcal{B}$. Afortunadamente, para un cuerpo rígido en movimiento plano, si conocemos la localización de todos sus puntos en un plano de $\mathcal{I}$ (al que llamaremos plano de referencia), entonces automáticamente conocemos la localización de todos sus *demás* puntos en todos los *demás* planos. La razón para esto es como sigue. Para cada punto B de $\mathcal{B}$ que no se encuentra en el plano de referencia, existe un "punto compañero" de $\mathcal{B}$ en el plano de referencia (punto A en la Fig. 3.1) que tiene las mismas coordenadas (x, y) al principio del movimiento. Se infiere entonces que las coordenadas (x, y) de A y B concuerdan siempre durante todo el movimiento de $\mathcal{B}$.

Pregunta 3.2 ¿Por qué es $x_A \equiv x_B$ y $y_A \equiv y_B$ conforme pasa el tiempo?

---

*Ya encontramos este concepto en el Capítulo 1, donde se vio que equivale al concepto de *marco de referencia*.



El cuerpo $\mathcal{B}$ en la Fig. 3.1 es una polea cónica que gira alrededor de su eje de simetría. Nótese que un cuerpo como éste, con diámetro variable de sus secciones transversales no tiene que tener sección transversal constante para hallarse en movimiento plano.

El plano de referencia es entonces un concepto muy importante pues permite estudiar el movimiento de un cuerpo entero considerando sólo aquellos puntos del mismo que se encuentran en este plano. Decimos que "conocemos el movimiento" de $\mathcal{B}$, cuando conocemos la posición de todos sus puntos en todo momento. Ya hemos reducido esta tarea a conocer la posición de los puntos en el plano de referencia. Pero, de hecho, si conocemos la posición de justamente *dos* puntos (digamos P_1 y P_2) del plano de referencia, entonces conocemos la posición de *todos* los puntos de ese plano y, por ende, de todo el cuerpo. Esto se debe a que cada punto del plano de referencia debe mantener la misma posición relativa a los puntos P_1 y P_2. Esta idea se ilustra en la Fig. 3.2. Nótese en la figura que si P_1 y P_2 están correctamente localizados con respecto al marco de referencia $\mathcal{I}$, todos los otros puntos de $\mathcal{B}$ estarán necesariamente en sus posiciones correctas.

Pregunta 3.3 ¿Basta conocer la posición de dos puntos para conocer el movimiento general (tridimensional) de un cuerpo?

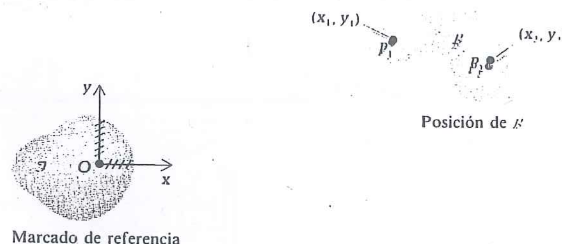


Figura 3.2

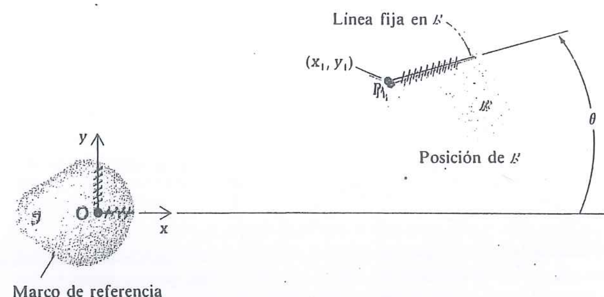


Figura 3.3

En vez de conocer la posición de dos puntos del cuerpo, (x_1, y_1) de P_1 y (x_2, y_2) de P_2, podemos alternativamente localizar al cuerpo si conocemos sólo *un* punto, P_1, más el ángulo de orientación θ (respecto a un eje que pase por P_1 y sea paralelo a $\mathcal{I}$); ver la Fig. 3.3.

Pregunta 3.4 Se requieren cuatro variables (x_1, y_1, x_2, y_2) para conocer la posición de dos puntos, mientras que para un punto y el ángulo sólo tres: (x_1, y_1, θ_1). ¿Por qué es diferente el número de variables?

Sea xy el plano de referencia. De la Fig. 3.1 se ve que

$$\mathbf{r}_{OA} = x_A\hat{\mathbf{i}} + y_A\hat{\mathbf{j}} \tag{3.1}$$

Esta ecuación puede derivarse y obtener

$$\mathbf{v}_A = \dot{x}_A\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}_A\hat{\mathbf{j}} = \dot{x}_B\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}_B\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{v}_B \tag{3.2}$$

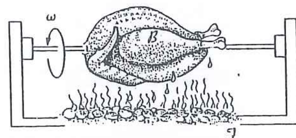
$$\mathbf{a}_A = \ddot{x}_A\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}_A\hat{\mathbf{j}} = \ddot{x}_B\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}_B\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{a}_B \tag{3.3}$$

En estas ecuaciones hemos tomado en cuenta que $x_B \equiv x_A$, $y_B \equiv y_A$ y que z_B = constante. Las Ecs. (3.2) y (3.3) muestran claramente que si describimos completamente las velocidades y aceleraciones en un plano de referencia, entonces las conocemos para *todos* los puntos del cuerpo. Esto permite centrarnos en un plano del cuerpo en este capítulo y en la mayor parte de los dos siguientes.

Problemas / Sección 3.1.

3.1 ¿Cuáles cuerpos ℬ en las figuras están en movimiento plano en el marco ℑ ?

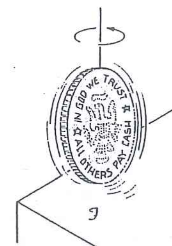
(a) Un pavo en un rostizador.



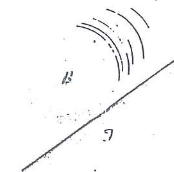
(b) Un cono que rueda sobre una mesa.



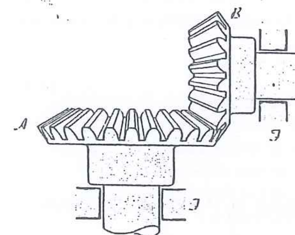
(c) Una moneda en rotación sobre una base fija.



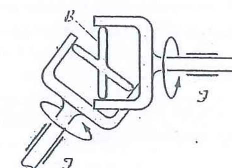
(d) Una lata que rueda hacia abajo en un plano inclinado.



(e) Dos engranes cónicos ℬ y 𝒜 conectados.



(f) La cruceta (sombreada) de una junta universal.



3.2 Dé tres ejemplos de movimiento plano distintos a los del problema anterior. Luego de tres ejemplos de movimiento no plano.

3.2 Relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular para dos puntos del mismo cuerpo rígido

En esta sección deduciremos una relación muy útil entre las velocidades en ℑ de dos puntos cualesquiera en el plano de referencia de un cuerpo rígido ℬ en movimiento plano y el vector de velocidad angular de ℬ en ℑ. Sean P y Q esos dos puntos de ℬ y anclemos los ejes (x, y, z) en el marco de referencia ℑ, como se muestra en la Fig. 3.4.

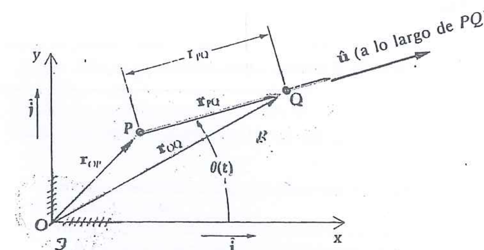


Figura 3.4

Aun cuando $\mathcal{B}$ se mueva con respecto al marco de referencia $\mathcal{F}$, el plano xy de $\mathcal{F}$ siempre contiene a los puntos de interés P y Q de $\mathcal{B}$. Un buen ejemplo se encuentra en el salón de clases; sea $\mathcal{B}$ el borrador del pizarrón. Si el pizarrón es el marco de referencia $\mathcal{F}$ (entonces x y y están fijos en el plano del pizarrón), el borrador queda sometido a movimiento plano siempre que el profesor borra el pizarrón. Los puntos P y Q son dos cualesquiera de la superficie del borrador en contacto con el pizarrón. Nótese como todo punto del borrador permanece a la misma distancia z del tablero (en donde $z = 0$) durante el borrado. El borrador no se encuentra en movimiento plano al separarse de la superficie del pizarrón y sus puntos se mueven con componente, z de la velocidad.

Nótese, en la Fig. 3.4 que $\hat{\mathbf{u}}$ es un vector unitario dirigido siempre de P a Q, tal que $\mathbf{r}_{PQ} = r_{PQ}\,\hat{\mathbf{u}}$, en donde r_{PQ} es la distancia PQ (o sea la magnitud del vector $\mathbf{r}_{PQ}$). Adviértase además que la orientación (rotación o desplazamiento angular) del cuerpo está descrita por el ángulo θ, medido entre cualquier recta fija en el marco de referencia $\mathcal{F}$ (usaremos aquí el eje x), y cualquier recta fija en el cuerpo (por el momento usaremos el segmento de P a Q).

Estamos ahora listos para establecer la relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular para cuerpos rígidos. En la Fig. 3.4 se ve que

$$\mathbf{r}_{OQ} = \mathbf{r}_{OP} + \mathbf{r}_{PQ} \tag{3.4}$$

Al derivar esta ecuación en el marco $\mathcal{F}$ se obtiene

$$\dot{\mathbf{r}}_{OQ} = \dot{\mathbf{r}}_{OP} + \dot{\mathbf{r}}_{PQ}$$

Los dos primeros vectores en esta ecuación son las velocidades de P y Q (en $\mathcal{F}$, donde O está fijo), por lo que se puede escribir

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \dot{\mathbf{r}}_{PQ} \tag{3.5}$$

En la obtención de la Ec. (3.5), todas las derivadas se efectuaron en $\mathcal{F}$ por lo que no es necesario escribir $\mathbf{v}_{Q/\mathcal{F}}$.

Para tener a $\dot{\mathbf{r}}_{PQ}$, como un vector que podamos utilizar, se expresa a $\mathbf{r}_{PQ}$ como una magnitud multiplicada por un vector unitario. Con ayuda de la Fig. 3.4 obtenemos

$$\mathbf{r}_{PQ} = r_{PQ}\hat{\mathbf{u}} = r_{PQ}(\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{j}}) \tag{3.6}$$

Derivando esta expresión como en la Sección 1.6 se tendrá:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_{PQ} &= r_{PQ}\dot{\theta}(-\text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}) = r_{PQ}\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times (\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{j}})^* \\ &= r_{PQ}\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{u}} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times r_{PQ}\hat{\mathbf{u}}\end{aligned}$$

Se tiene así la expresión útil $\dot{\mathbf{r}}_{PQ}$:

$$\dot{\mathbf{r}}_{PQ} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PQ} \tag{3.7}$$

Pregunta 3.5 En el desarrollo anterior, ¿por qué es $\dot{r}_{PQ} = 0$?

Sustituyendo la Ec. (3.7) en la Ec. (3.5) se obtiene

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PQ} \tag{3.8}$$

*En este libro, $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ constituyen un sistema derecho, o sea que $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$.

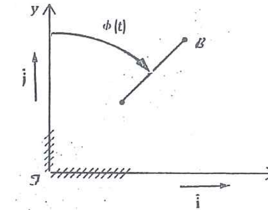


Figura 3.5

expresión que relaciona las velocidades (lineales) de los puntos P y Q e introduce la velocidad angular de $\mathcal{B}$ en el marco de referencia $\mathcal{F}$. La letra griega omega se usa generalmente para designar a este vector:

$$\omega_{B/\mathcal{F}} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \tag{3.9}$$

Cuando no haya confusión posible acerca del cuerpo y del marco de referencia que se estén tratando, pueden cancelarse los subíndices y escribir simplemente $\omega_{B/\mathcal{F}}$ También en algunos libros se acostumbra expresar ω. como $\omega\hat{\mathbf{k}}$ en vez de $\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$; esta última notación nos recuerda que en el movimiento plano, la velocidad angular es proporcional a la derivada respecto al tiempo de un ángulo *; aquí usaremos las dos formas de notación.

La magnitud $|\dot{\theta}|$ (o bien $|\omega|$ u $|\omega|$) de la velocidad angular se denomina a veces *rapidez angular* de $\mathcal{B}$ en el marco de referencia $\mathcal{F}$. Nótese que $\dot{\theta}$ (o ω) puede ser negativa. Nótese además que ni el vector velocidad angular ni la Ec. (3.8) dependen del segmento de recta fijo en el cuerpo (como el PQ escogido para medir θ. La prueba de esta aseveración no es difícil y se planteará luego como un ejercicio.

Adviértase que si el ángulo de orientación fuese elegido como se muestra en la Fig. 3.5, entonces la velocidad angular estará dada por

$$\omega = \dot{\phi}(-\hat{\mathbf{k}}) = -\dot{\phi}\hat{\mathbf{k}}$$

El vector de velocidad angular está dirigido siempre en la dirección dada por el pulgar de la mano derecha al doblar los dedos en la dirección de rotación del cuerpo. Con referencia a las Figs. (3.4) y (3.5), $\dot{\phi} = -\dot{\theta}$ y

$$\omega = \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} = -\dot{\phi}\hat{\mathbf{k}}$$

y está dirigido hacia afuera de la página si el cuerpo gira en sentido antihorario, y hacia adentro si lo hace en sentido horario.

Tenemos así el resultado de que el vector velocidad angular es una propiedad de todo el cuerpo $\mathcal{B}$ y no una propiedad de sus puntos individuales. Recuerde:

1. Un *punto* tiene posición, velocidad y aceleración.
2. Un *cuerpo* tiene orientación, velocidad angular y aceleración angular *.

Recuerde también que un *punto* no tiene orientación, ω ni α †, y un *cuerpo* de tamaño finito no tiene $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ ni $\mathbf{a}$ únicas.

* Para un movimiento general (tridimensional) *no* existe una. Simple relación como $\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$ entre velocidad angular y orientación del cuerpo.

*En la Sección 3.5 se discute la aceleración angular (α), que es la derivada de la velocidad angular.

† Si tratamos la partícula como lo suficientemente pequeña para no tener que distinguir entre las posiciones de sus puntos, debemos considerar que posee $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$, pero *no* ω ni α.

Enfatizaremos esas diferencias en las propiedades de puntos y cuerpos de la manera siguiente: los puntos se denotarán por letras mayúsculas tipo imprenta y los cuerpos por letras mayúsculas tipo manuscrito. Por ejemplo, P, A y B denotan puntos; $\mathcal{P}$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ denotan cuerpos.

En los ejemplos que siguen, las tres reglas siguientes deben observarse *sin excepción*:

3. Este vector se extiende *desde* el punto P en *este* segundo miembro de la ecuación, *hasta* el punto Q en el *otro* miembro (el primero).

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PQ} \tag{3.10}$$

1. Estos dos puntos están sobre el *mismo* cuerpo rígido $\mathcal{B}$.

2. Este es el vector velocidad angular de $\mathcal{B}$.

Es también útil al usar la Ec. (3.8) el diagrama cinemático presentado en la Fig. 3.6. La velocidad de Q, Ec. (3.8), es la suma de los dos vectores de la Fig. 3.6 (ver la Fig. 3.7). Nótese que según sean los tamaños relativos de v_P y $r_{PQ}\omega$, la velocidad $\mathbf{v}_Q$ puede encontrarse en cualquier lado de la recta PQ, o incluso a lo largo de ella. Adviértase además que la diferencia entre las velocidades de Q y P, o sea $\mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P$, es simplemente $\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PQ}$. Esto significa que el único modo en que las velocidades de dos puntos de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento en el marco $\mathcal{I}$ pueden diferir es a través del término $r\omega$ normal a la recta que los une. Volveremos a estudiar este concepto después de los tres primeros ejemplos de esta sección.

Incidentalmente, algunos libros describen $\mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P$ como "la velocidad del punto Q relativa al punto P". Mencionamos esto sólo como una explicación; nuestra definición de $\mathbf{v}_P$ en la Sección 1.3 muestra que los puntos tienen velocidades relativas a marcos, *no* relativas a otros puntos. Si uno usa la frase "la velocidad del punto Q relativa al punto P", esto quiere decir la velocidad de Q en un marco en el que P está fijo y se traslada relativamente a $\mathcal{I}$.*

En cada uno de los ejemplos que siguen, cáptese la importancia de seleccionar *y representar* los vectores unitarios usados en la solución. También, en cada uno de los tres primeros ejemplos, preste mucha atención a la manera en que se expresa la velocidad de un punto (digamos B) si la tangente a su trayectoria se conoce; de acuerdo con la Sección 1.7, $\mathbf{v}_B$ se expresa como un simple escalar desconocido (cuyo valor absoluto es la rapidez de B) multiplicado por un vector unitario a lo largo de la tangente conocida.

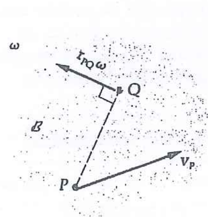


Figura 3.6

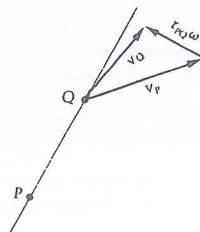
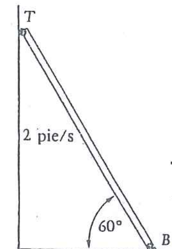


Figura 3.7

* "Se traslada" significa que el marco de referencia se mueve en $\mathcal{I}$ sin girar. La traslación se discute con mayor detalle en la Sección 3.3.

Ejemplo 3.1



Una escalera de 30 pie de longitud está resbalando en la posición mostrada en el diagrama; el punto T desciende sobre la pared con una velocidad de 2 pie/s. Determinar la velocidad del punto B que desliza sobre el suelo.

Solución

Por medio de la Ec. (3.8) relacionamos $\mathbf{v}_T$ y $\mathbf{v}_B$:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_T + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{TB}$$

Como $\mathbf{v}_B$ no tiene componente $\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{v}_T$ no tiene componente $\hat{\mathbf{i}}$, escribimos:

$$v_B\hat{\mathbf{i}} = -2\hat{\mathbf{j}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times 30\left(\frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= \left(30\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta}\right)\hat{\mathbf{i}} + (-2 + 15\dot{\theta})\hat{\mathbf{j}} \text{ pie/s}$$

Igualando los coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$ se tiene:

$$0 = -2 + 15\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} \text{ (o bien } \omega) = \frac{2}{15} = 0.133 \text{ rad/s}$$

Igualando los coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$ se tiene:

$$v_B = 15\sqrt{3}\dot{\theta} = 15\sqrt{3}\left(\frac{2}{15}\right) = 3.46 \text{ pie/s}$$

Por tanto la velocidad de B es $\mathbf{v}_B = 3.46\hat{\mathbf{i}}$ pie/s (o 3.46 → pie/s).

Nótese que un indicador de dirección debe adscribirse a $\dot{\theta}$ para especificar correctamente el vector velocidad angular de la escalera:

$$\omega = \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} = 0.133\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}$$

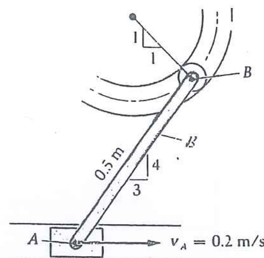
o alternativamente

$$\omega = 0.133 \circlearrowleft \text{ rad/s}$$

Véase que las direcciones de $\mathbf{v}_B$ (→) y de ω(↺) son congruentes. Estas comprobaciones visuales de las soluciones deben efectuarse siempre que sea posible.

Ejemplo 3.2

En el instante mostrado en el diagrama, la velocidad del punto A es de 0.2 m/s hacia la derecha. Encuentre la velocidad angular de la barra $\mathcal{B}$ y determine la velocidad de su otro extremo (punto B), que debe moverse en la ranura circular.



Solución

Escribimos la Ec. (3.8) para los puntos A y B de la barra:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{AB}$$

Como la velocidad de B tiene dirección conocida (tangente a su trayectoria), escribimos $\mathbf{v}_B$ como un escalar desconocido multiplicado por un vector unitario en esta dirección:

$$v_B\left(\frac{\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{2}}\right) = 0.2\hat{\mathbf{i}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times (0.3\hat{\mathbf{i}} + 0.4\hat{\mathbf{j}})$$

Las ecuaciones para las componentes son

Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)v_B = 0.2 - 0.4\dot{\theta}$ (1)

Coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)v_B = 0.3\dot{\theta}$ (2)

Resolviendo las Ecs. (1) y (2) se obtiene

$$v_B = 0.121 \text{ m/s} \qquad \dot{\theta} = 0.286 \text{ rad/s}$$

Por consiguiente las respuestas son (¡*Vectores* es lo que se pide!)

$$\mathbf{v}_B = 0.121 \measuredangle^{1}_{1} \text{ m/s} \qquad \text{y} \qquad \omega = 0.286 \circlearrowleft \text{ rad/s}$$

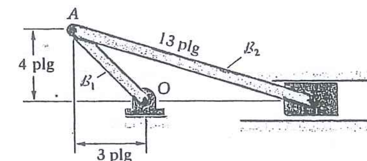
o equivalentemente,

$$\mathbf{v}_B = 0.0856\hat{\mathbf{i}} + 0.0856\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s} \qquad \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\omega} = 0.286\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}$$

En el ejemplo siguiente, *dos* cuerpos tienen velocidad angular; tendremos que usar subíndices en los símbolos de velocidad angular (ω o $\dot{\theta}$). Denotaremos la velocidad angular de ω_1 con (o $\dot{\theta}_1\hat{\mathbf{k}}$) $\mathcal{B}_1$ ω_2 con (o $\dot{\theta}_2\hat{\mathbf{k}}$) la velocidad angular de $\mathcal{B}_2$.

Ejemplo 3.3

La manivela $\mathcal{B}_1$ mostrada en el diagrama gira alrededor de un eje horizontal z, que pasa por su extremo articulado O, con una velocidad angular de 10 rad/s en sentido horario, en el instante indicado. Calcular la velocidad del pasador B del pistón.



Solución

Aplicamos la Ec. (3.8) primero para relacionar las velocidades de A y O sobre el cuerpo $\mathcal{B}_1$ y luego para relacionar $\mathbf{v}_B$ a $\mathbf{v}_A$ sobre la barra $\mathcal{B}_2$. Nótese que A es un punto común de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Sobre el cuerpo $\mathcal{B}_1$:

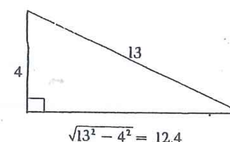
$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \omega_1\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{OA}$$
$$= 0 + (-10\hat{\mathbf{k}}) \times (-3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}})$$
$$= 40\hat{\mathbf{i}} + 30\hat{\mathbf{j}} \text{ plg/s}$$

Sobre el cuerpo $\mathcal{B}_2$:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega_2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{AB}$$

y usando el teorema de Pitágoras (Ver la figura)

$$\mathbf{v}_B = (40\hat{\mathbf{i}} + 30\hat{\mathbf{j}}) + \omega_2\hat{\mathbf{k}} \times (12.4\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}})$$



Ahora el punto B está restringido a moverse sólo horizontalmente. Por ello:

$$v_B\hat{\mathbf{i}} = (40 + 4\omega_2)\hat{\mathbf{i}} + (30 + 12.4\omega_2)\hat{\mathbf{j}}$$

Igualando los coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$:

$$v_B = 40 + 4\omega_2$$

Igualando los coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$:

$$0 = 30 + 12.4\omega_2$$
$$\omega_2 = -2.42 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto,

$$\omega_2 = 2.42 \circlearrowright \text{ rad/s}$$

Sustituyendo ω_2 en (1), obtenemos $v_B = 30.3$ plg/s y $\mathbf{v}_B = 30.3\,\hat{\mathbf{i}}$ plg/s

En los tres ejemplos precedentes enfatizamos que es absolutamente esencial incorporar correctamente las restricciones cinemáticas impuestas por ranuras, paredes, pisos, etc.

Es a menudo útil, en el estudio de la cinemática de cuerpos rígidos, hacer uso del siguiente resultado que es un corolario de la Ec. (3.8):

Corolario: Si P y Q son dos puntos de un cuerpo rígido, deben ser iguales sus componentes de velocidad a lo largo de la recta que los une.

Intuitivamente vemos que la diferencia entre esas componentes es la tasa de alargamiento del segmento PQ y éste debe anularse. También hemos visto que $\mathbf{v}_Q$ y $\mathbf{v}_P$ difieren sólo en el término $\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PQ}$ que es *normal* a la línea PQ que une a los puntos. Matemáticamente podemos ver esto enseguida multiplicando escalarmente la Ec. (3.8) por el vector unitario paralelo a $\mathbf{r}_{PQ}$, que es $\mathbf{r}_{PQ}/r_{PQ}$:

$$\underbrace{\frac{\mathbf{r}_{PQ}}{r_{PQ}} \cdot \mathbf{v}_Q}_{\substack{\text{componente}\\ \text{de } \mathbf{v}_Q \text{ a lo}\\ \text{largo de } PQ}} = \underbrace{\frac{\mathbf{r}_{PQ}}{r_{PQ}} \cdot \mathbf{v}_P}_{\substack{\text{componente}\\ \text{de } \mathbf{v}_P \text{ a lo}\\ \text{largo de } PQ}} + \underbrace{(\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PQ}) \cdot \frac{\mathbf{r}_{PQ}}{r_{PQ}}}_{\substack{\text{cero (ya que } \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PQ}\\ \text{es } \perp \mathbf{r}_{PQ})}} \qquad (3.11)$$

De modo que, si conocemos la velocidad de un punto del cuerpo, podemos determinar cualquier otra usando la Ec. (3.11), sin implicar a la velocidad angular. Por ejemplo, en el Ejemplo 3.2 el vector unitario $\mathbf{r}_{AB}/r_{AB}$ es simplemente $(3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}})/5$ y multiplicándolo escalarmente por la ecuación

$$v_B \frac{\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{2}} = 0.2\hat{\mathbf{i}} + \omega\hat{\mathbf{k}} \times (0.3\hat{\mathbf{i}} + 0.4\hat{\mathbf{j}})$$

del referido ejemplo se obtiene

$$v_B\left(\frac{3(1) + 4(1)}{5\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{5}(0.2) = 0.120$$

o bien

$$v_B = 0.121 \Rightarrow \mathbf{v}_B = 0.121 \; \angle^{1}_{1} \text{ m/s} \qquad \text{(igual que antes)}$$

Se ve que el álgebra es más simple; hemos trabajado con sólo una ecuación con una incógnita en vez de dos con dos.

Volvemos ahora a la formulación vectorial (Ec. (3.8)) en los dos ejemplos finales de esta sección.

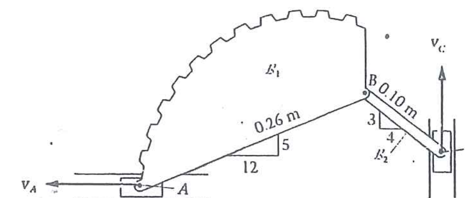
Ejemplo 3.4

En el mecanismo mostrado en el diagrama, las velocidades de A y C son

$$\mathbf{v}_A = 2 \leftarrow \text{m/s}$$

$$\mathbf{v}_C = 3 \uparrow \text{m/s}$$

en el instante dado. Obtener la velocidad del punto B en el mismo instante.



Solución

Sobre el cuerpo $\mathcal{B}_1$:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega_1\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{AB}$$
$$= -2\hat{\mathbf{i}} + \omega_1\hat{\mathbf{k}} \times (0.24\hat{\mathbf{i}} + 0.10\hat{\mathbf{j}})$$
$$= (-2 - 0.1\omega_1)\hat{\mathbf{i}} + (0.24\omega_1)\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s} \qquad (1)$$

Sobre el cuerpo $\mathcal{B}_2$:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \omega_2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{CB}$$
$$= 3\hat{\mathbf{j}} + \omega_2\hat{\mathbf{k}} \times (-0.08\hat{\mathbf{i}} + 0.06\hat{\mathbf{j}})$$
$$= (-0.06\omega_2)\hat{\mathbf{i}} + (3 - 0.08\omega_2)\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s} \qquad (2)$$

Igualando las dos expresiones vectoriales para $\mathbf{v}_B$ obtenemos:

Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$: $\quad -2 - 0.1\omega_1 = -0.06\omega_2$

Coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$: $\quad 0.24\omega_1 = 3 - 0.08\omega_2$

Resolviendo las dos ecuaciones,

$$\omega_1 = 0.893 \quad \text{y} \quad \omega_2 = 34.8 \text{ rad/s}$$

Se sigue de la Ec. (1) que

$$\mathbf{v}_B = -2.09\hat{\mathbf{i}} + 0.214\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}$$

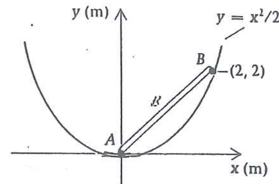
y el mismo resultado se obtiene de (2) como comprobación.

Pregunta 3.6 Si las velocidades de A y C son 2 ⟵ m/s y de 3 ↑ m/s para un cierto *intervalo* de tiempo, y no sólo para el instante mostrado, ¿sería diferente la solución para (a) el mismo instante, y (b) algún otro instante?

Ejemplo 3.5

El extremo B de la barra $\mathcal{B}$ se desplaza hacia arriba sobre la mitad derecha de la rampa parabólica con rapidez constante de 0.3 m/s.

Hallar la velocidad angular de B y la velocidad del punto A que se encuentra en el origen en el instante mostrado.



Solución

Usamos la Ec. (3.8) para relacionar $\mathbf{v}_B$ con $\mathbf{v}_A$:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{AB} \qquad (1)$$

Usamos ahora la Ec. (1.41) para expresar $\mathbf{v}_B$:

$$\mathbf{v}_B = 5\hat{\mathbf{e}}_t = 0.3\hat{\mathbf{e}}_t$$

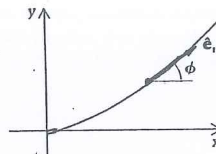
Para obtener la tangente unitaria $\hat{\mathbf{e}}_t$ para el punto B, usamos el diagrama anexo, notando que $\hat{\mathbf{e}}_t$ es siempre tangente a la parábola:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \tan^{-1} 2 = 63.4°$$

Por lo tanto, para el punto B:

$$\hat{\mathbf{e}}_t = \cos\phi\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{j}}$$

$$= 0.448\hat{\mathbf{i}} + 0.894\hat{\mathbf{j}}$$



De manera que

$$\mathbf{v}_B = 0.3\hat{\mathbf{e}}_t = 0.134\hat{\mathbf{i}} + 0.268\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}$$

Ya que el punto A tiene igualmente una velocidad tangente a su trayectoria, podemos escribir

$$\mathbf{v}_A = v_A\hat{\mathbf{i}}$$

y entonces la Ec. (1) da

$$0.134\hat{\mathbf{i}} + 0.268\hat{\mathbf{j}} = v_A\hat{\mathbf{i}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times (2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

Agrupando los coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$, tenemos

Coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$: $0.268 = 2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = 0.134$ rad/s

de modo que

$$\omega = \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} = 0.134\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s or } 0.134 \circlearrowleft \text{ rad/s}$$

Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$: $0.134 = v_A - 2\dot{\theta}$

Sustituyendo el valor de $\dot{\theta}$ y resolviendo se obtiene

$$v_A = 0.402 \text{ m/s}$$

por lo que

$$\mathbf{v}_A = 0.402\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}$$

Las aplicaciones de la Ec. (3.8) a cuerpos rodantes se presentan en la Sección 3.6 después de estudiar en detalle el tema de rodamiento.

Problemas / Sección 3.2

3.3 La velocidad angular de la barra doblada está indicada en la Fig. P3.3. Hallar la velocidad del punto extremo B en esa posición.

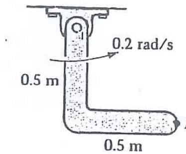


Figura P3.3

3.4 Las velocidades de los dos puntos extremos A y B de una barra rígida se muestran en la Fig. 3.4. Hallar la velocidad del punto medio de la barra en esa posición.

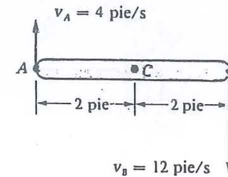


Figura P3.4

3.5 Si $\mathbf{v}_A = 80\hat{\mathbf{i}}$ plg/s, encuentre ω_2 y ω_3. Ver la Fig. P3. 5.

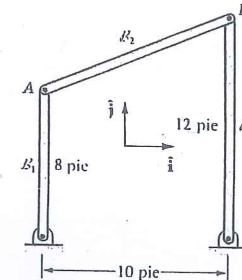


Figura P3.5

3.6 En un cierto instante las coordenadas de dos puntos A y B de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento plano son como se indica en la Fig. P3.6. El punto A tiene una $\mathbf{v}_A = 2\hat{\mathbf{i}}$ m/s y la velocidad de B es vertical. Determine $\mathbf{v}_B$ y la velocidad angular de $\mathcal{B}$.

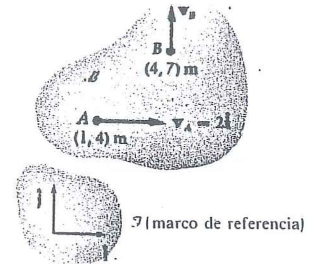


Figura P3.6

3.7 - 3.11 En los siguientes cinco problemas relativos a "mecanismos de cuatro barras" (la cuarta barra en cada caso es la longitud rígida de suelo entre las articulaciones rígidas) se indica la velocidad angular de una de ellas. Determine las velocidades angulares de las otras dos barras.

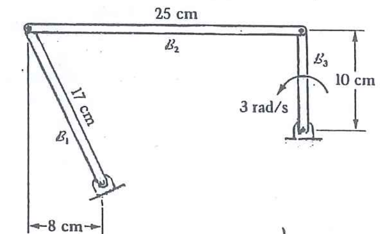


Figura P3.7

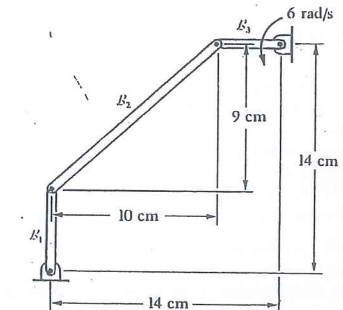


Figura P3.8

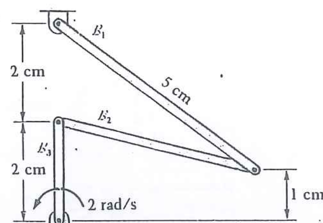


Figura P3.9

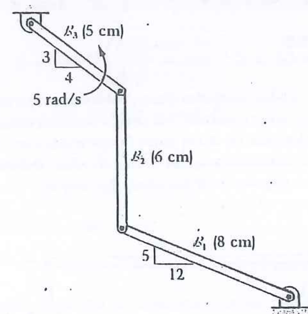


Figura P3.10

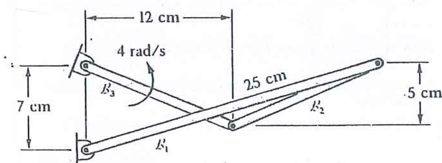


Figura P3.11

3.12 La placa triangular equilátera $\mathcal{B}_1$ mostrada en la Fig. P3.12 tiene tres lados, cada uno de 0.3 m de longitud. La barra $\mathcal{B}_2$ tiene una velocidad angular $\omega_2 = 2$ rad/s con sentido antihorario y está articulada a $\mathcal{B}_1$ en A. El cuerpo $\mathcal{B}_1$ también está articulado a un bloque en B, que se mueve en la guía indicada. En el instante mostrado encuentre la velocidad angular de $\mathcal{B}_1$.

3.13 La manivela $\mathcal{B}_1$ mostrada en la Fig. P3.13 gira en sentido antihorario con rapidez constante de 1 rad/s. La barra $\mathcal{B}_2$ está articulada a $\mathcal{B}_1$ en A y a un rodillo en B que se mueve en una ranura circular. Determine la velocidad de B y la velocidad angular de $\mathcal{B}_2$ en el instante indicado.

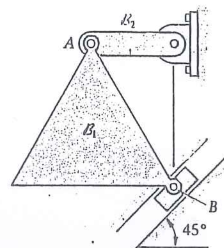


Figura P3.12

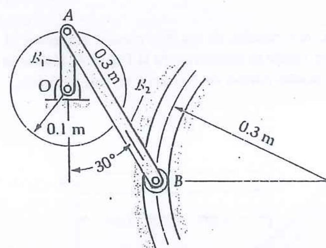


Figura P3.13

3.14 La rueda mostrada en la Fig. P3.14 gira y se desliza de forma tal que su velocidad angular es de 2 rad/s, mientras que la velocidad de su centro C es de 0.3 m/s hacia la izquierda. Determine la velocidad del punto A.

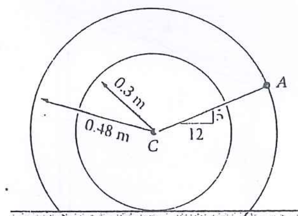


Figura P3.14

3.15 Para la configuración mostrada en la Fig. P3.15 encuentre la velocidad del punto P sobre el disco $\mathcal{B}_3$.

3.16 La velocidad del bloque $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.16 tiene el valor mostrado. Encuentre la velocidad angular de la barra $\mathcal{B}_2$ y determine la velocidad del pasador A del bloque $\mathcal{B}_3$ cuando $\theta = 60°$.

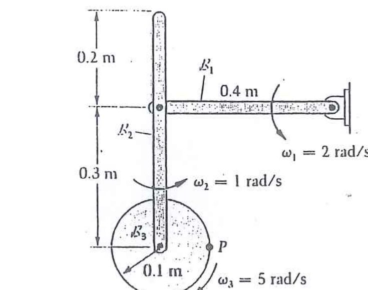


Figura P3.15

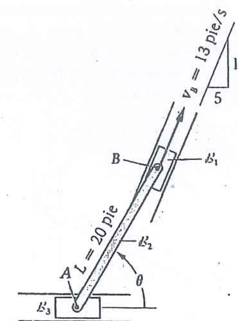


Figura P3.16

3.17 La rueda $\mathcal{B}_1$ (Fig. P3.17) gira y desliza de modo que su velocidad angular es de 2 rad/s, mientras que la velocidad de C es de 0.4 m/s hacia la izquierda. Determine la velocidad del punto B que deliza sobre el plano. La barra $\mathcal{B}_2$ está articulada a $\mathcal{B}_1$ en D.

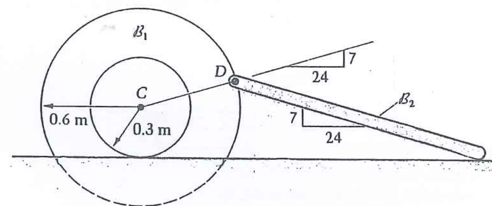


Figura P3.17

3.18 El punto A de la barra resbala a lo largo del plano inclinado (Fig. P3.18), mientras que el otro extremo, B, resbala sobre el plano horizontal. En la posición indicada, $\omega = 0.5\,\mathbf{k}$ rad/s. Encuentre la velocidad del punto medio de la barra en este instante.

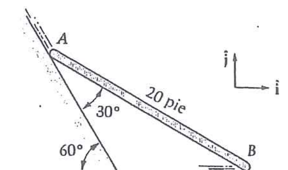


Figura P3.18

3.19 La rueda $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.19 tiene una velocidad angular antihoraria de 6 rad/s. ¿Cuál es la velocidad del punto B en el instante mostrado?

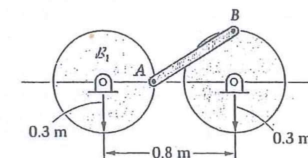


Figura P3.19

3.20 El bloque $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.20, que resbala en una ranura vertical, está articulado a las barras $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ en A. Los otros extremos de $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ están articulados a bloques que deslizan en ranuras horizontales. El bloque $\mathcal{B}_4$ se traslada hacia la izquierda con velocidad constante de 0.2 m/s. Encuentre la velocidad de B: (a) en el instante dado, (b) cuando C está en el punto D, y (c) cuando C está en el punto E.

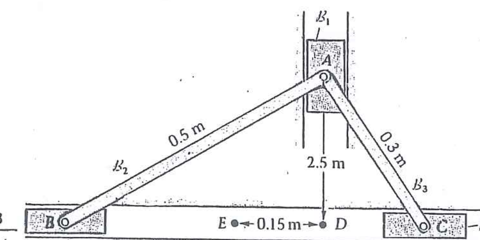


Figura P3.20

3.21 Los cuatro eslabones mostrados en la Fig. P3.21 tienen 0.4 m de longitud cada uno, y dos de sus velocidades angulares se indican. Encuentre la velocidad del punto C y

determine las velocidades angulares de $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ en el instante indicado.

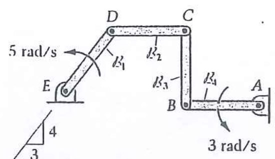


Figura P3.21

3.22 En el mecanismo indicado en la Fig. P3.22 el casquillo corredizo $\mathcal{B}_1$ está conectado a la barra pivoteada $\mathcal{B}_2$ por medio de la barra $\mathcal{B}_3$ de 15 cm. En cierto intervalo del movimiento de $\mathcal{B}_2$, el ángulo θ varía según la función $\theta = 0.02\,t^2$ rad comenzando en $t = 0$ con $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ horizontales. Encuentre la velocidad del pasador S y las velocidades angulares de $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ cuando $\theta = 30°$. El tiempo se mide en segundos.

* **3.23** Obtenga la velocidad del punto B de la barra si el extremo A tiene velocidad constante de 2 m/s hacia la derecha, según muestra la Fig. P3.23. Los rodillos son pequeños. Compare el uso de la Ec. (3.18) con el procedimiento usado para resolver el Problema 1.63.

3.24 El bloque $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.24 se mueve hacia la derecha según la fórmula

$$x = 0.2 + 0.02t^2 \text{ m} \qquad (t \text{ en segundos})$$

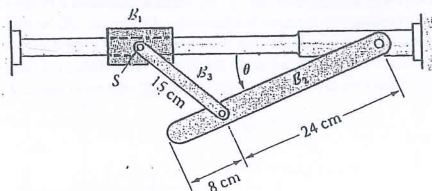


Figura P3.22

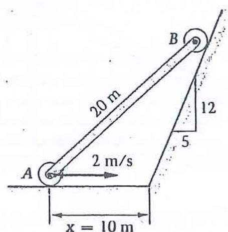


Figura P3.23

Determine la velocidad angular de la barra $\mathcal{B}_2$ cuando $x = 0.3$ m.

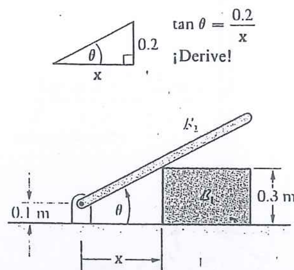


Figura P3.24

* **3.25** El bloque $\mathcal{B}$ tiene una posición controlada en la guía dada por $y = \sqrt{120}$ sen $(\pi t/10)$ plg para $0 \leq t \leq 10$ s (Fig. P3.25). El tiempo es $t = 0$ en la posición indicada. Encuentre las velocidades angulares de la barra y de la rueda en (a) $t = 0$ s y en (b) $t = 5$ s.

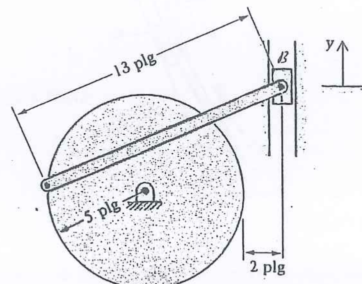


Figura P3.25

3.26 La manivela $\mathcal{B}_1$ del mecanismo mostrado en la Fig. P3.26 tiene una velocidad angular constante $\dot{\theta}$. Encuentre la ecuación para la velocidad angular $\dot{\phi}$ de la barra $\mathcal{B}_2$ en función de r, ℓ, θ y $\dot{\theta}$.

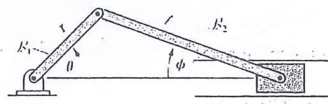
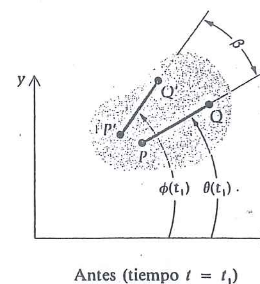


Figura P3.26

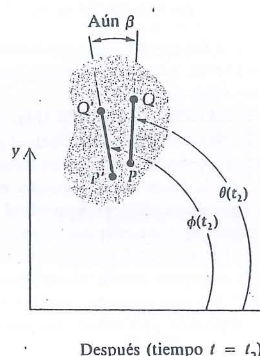
3.27 En el problema anterior grafique $\dot{\phi}/\dot{\theta}$ en función de θ desde $\theta = 0$ hasta 2π para $\ell/r = 1$, 2 y 5.

3.28 Con referencia a la Sección 3.2 muestre que ni el vector velocidad angular ni la Ec. (3.8) dependen de qué seg-

*Los asteriscos señalan los problemas más difíciles.



Antes (tiempo $t = t_1$)



Después (tiempo $t = t_2$)

Figura P3.28

mento fijo en el cuerpo (tal como el PQ) se use para medir θ. Use otros dos puntos P' y Q' y su ángulo ϕ como se sugiere en la Fig. P3.28 para su demostración.

* **3.29** La barra $\mathcal{B}_1$ comienza a moverse en $\theta = 0$ (Fig. P3.29) girando con velocidad angular constante $\dot{\theta} = 0.2$ rad/s. La cuerda está unida al extremo de $\mathcal{B}_1$ y pasa sobre una polea; el otro extremo de la cuerda está unido a la pesa $\mathcal{B}_2$ en el punto B. Observe que $\mathcal{B}_2$ se mueve hacia abajo hasta $\theta = 90°$ y luego asciende. Escriba una ecuación que dé la velocidad del punto B como función de θ para $\pi \geq \theta \geq \pi/2$. *Sugerencia:* Use trigonometría para expresar y en función de θ y la longitud L de la cuerda. Luego derive.

* **3.30** Repita el problema anterior usando la Ec. (3.8) para obtener $\mathbf{v}_A$; luego resuelva $\mathbf{v}_A$ en dos componentes: a una a lo largo de PA igual a la magnitud de $\mathbf{v}_B$ otra normal a PA que no afecta a B. (Estas podrían llamarse componentes de *alargamiento* y *oscilación*, respectivamente.)

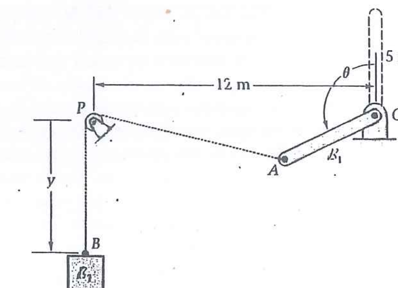


Figura P3.29

3.3 Traslación

Cuando un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ se mueve durante un cierto intervalo de tiempo en forma tal que su vector velocidad angular permanece idénticamente igual a cero, se dice que el cuerpo está en **traslación** o que en un estado de **movimiento traslacional** en ese intervalo. De la Ec. (3.8) vemos que para la traslación

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P \tag{3.12}$$

Esto es, todos los puntos del cuerpo tienen el mismo vector velocidad. Derivando la Ec. (3.12) vemos que las aceleraciones de todos los puntos de $\mathcal{B}$ son también iguales durante la traslación. Nótese que si $\dot{\theta} = 0$ sólo en un *instante* (o sea, para un valor único del tiempo en vez de para un intervalo), entonces todos los puntos del cuerpo tienen iguales velocidades en ese instante pero no tienen necesariamente *iguales aceleraciones*.

Pregunta 3.7 ¿Por qué es esto así?

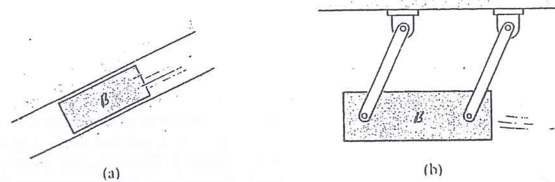


Figura 3.8 Ejemplos de traslación.

La traslación puede ser

1. *Rectilínea:* cada punto de $\mathcal{B}$ se mueve a lo largo de una trayectoria recta en $\mathcal{J}$.
2. *Curvilínea:* cada punto de $\mathcal{B}$ se mueve según una trayectoria curva en $\mathcal{J}$.

En la Fig. 3.8 se muestran ejemplos de traslación. La parte (a) muestra una traslación rectilínea: el cuerpo $\mathcal{B}$ está obligado a moverse en una ranura recta. La parte (b) muestra una traslación curvilínea: el cuerpo $\mathcal{B}$ está restringido por los eslabones idénticos.

Tal vez un mejor par de ejemplos lo constituye el borrador de pizarrón (Fig. 3.9) que usamos antes para explicar el movimiento plano en la Sección 3.2. En la parte (a), el profesor mueve el borrador de modo que cada uno de sus puntos permanece sobre una recta; se encuentra por ello en un estado de traslación rectilínea. En la parte (b) el profesor mueve al borrador sobre una curva; pero si la palabra *borrador* permanece siempre horizontal durante el borrado, entonces $\dot{\theta} \equiv 0$ y el borrador está en un estado de traslación curvilínea. Aunque cada uno de sus puntos se mueve sobre una curva, todas las velocidades (y aceleraciones) son iguales en todo momento. Existe una excepción notable a nuestra previa aseveración de que "puntos y no cuerpos tienen velocidades y aceleraciones". En este presente caso de traslación, puesto que todos los puntos tienen las *mismas* $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$, se podría uno referir sin ambigüedad a la "velocidad del borrador".

No se presentan ejemplos o problemas en esta sección porque los problemas de traslación de cuerpos rígidos no requieren ninguna consideración teórica nueva más allá de la desarrollada en el Capítulo 1.

Resumiendo, cuando un cuerpo se traslada (ya sea en forma rectilínea o curvilínea), su velocidad angular $\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$ es idénticamente cero y todos sus puntos tienen iguales velocidades (y aceleraciones). Si $\dot{\theta} = 0$ sólo en un instante, entonces todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad en ese instante pero no necesariamente iguales aceleraciones.

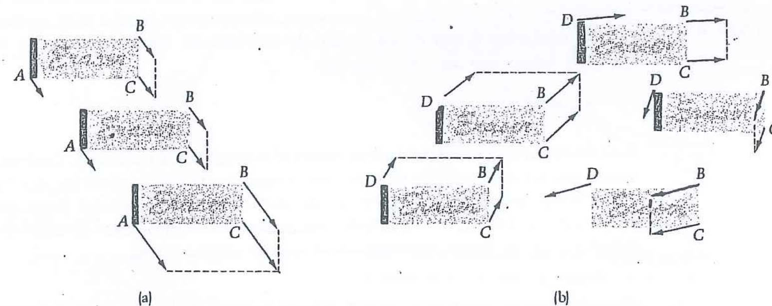


Figura 3.9 Otros ejemplos de traslación.

3.4 Centro Instantáneo de Velocidad Nula

Si P es un punto en el plano de referencia con velocidad nula en algún instante, entonces el campo de velocidades de es el mismo que si el cuerpo estuviese obligado en ese instante a girar alrededor de un eje a través de P, normal al plano de referencia. Tal eje se denomina **eje instantáneo de rotación** y el punto P se llama **el centro instantáneo** (abreviado Ⓘ) **de velocidad nula*** de . Así, si Q es cualquier *otro* punto de $\mathcal{B}$, se tendrá

$$\mathbf{v}_Q = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_{\text{Ⓘ}}}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{\text{Ⓘ}Q} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{\text{Ⓘ}Q} \quad \text{o bien} \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{Ⓘ}Q} \tag{3.13}$$

y entonces cada punto se mueve con su velocidad perpendicular en la recta que lo une a Ⓘ. Este concepto se ilustra en la Fig. 3.10 para una rueda en rodamiento**, Ⓘ en donde es el punto de contacto.

Se puede demostrar que si un cuerpo $\mathcal{B}$ tiene $\dot{\theta} \neq 0$ en un instante dado, entonces posee un centro instantáneo.

Pregunta 3.8 ¿Por qué no existe un punto Ⓘ si θ es cero?

Para demostrar la existencia de Ⓘ usaremos la Ec. (3.13) en conjunto con la Fig. 3.11. El vector $\mathbf{v}_Q$, siendo igual a $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{Ⓘ}Q}$ para cualquier punto Ⓘ que tenga $\mathbf{v}_{\text{Ⓘ}} = \mathbf{0}$, es por consiguiente normal a $\boldsymbol{\omega}$ y a $\mathbf{r}_{\text{Ⓘ}Q}$. Se tienen entonces estos resultados:

1. El vector $\mathbf{r}_{\text{Ⓘ}Q}$ está en el plano de referencia y es normal a $\mathbf{v}_Q$. Se halla entonces a lo largo de la recta ℓ en la Fig. 3.11.
2. El punto Ⓘ existe (y es único) porque $|\mathbf{r}_{\text{Ⓘ}Q}|$ debe ser igual a $|\mathbf{v}_Q/\omega|$ para que $\mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\text{Ⓘ}Q}$.

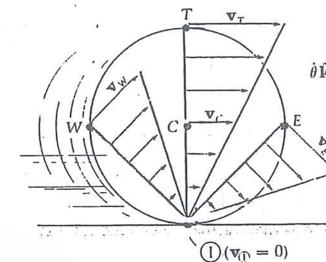


Figura 3.10 Centro instantáneo de una rueda en rodamiento.

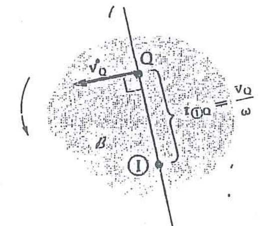


Figura 3.11

*La frase es redundante pero de uso común; "centro instantáneo de velocidad" sería tal vez más conciso, y "centro de velocidad" aún más. Sin embargo, "centro instantáneo" es inadecuado debido a la posible confusión con puntos de aceleración nula.

** Rodamiento implica deslizamiento nulo, de acuerdo con la definición adoptada en este libro (véase la Sección 3.6).

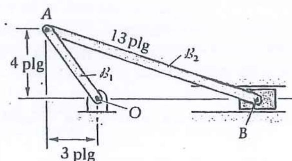
Pregunta 3.9 ¿Por qué está Ⓘ *bajo* de Q en la Fig. 3.11 en vez de estar a la misma distancia pero por *arriba* de Q?

Hemos verificado la existencia del centro instantáneo (a menos que $\dot{\theta} = 0$), porque sabemos como localizarlo a partir de cualquier punto arbitrario Q del cuerpo $\mathcal{B}$. Notemos nuevamente que la magnitud de la velocidad de cada punto de $\mathcal{B}$ (¡en el plano de referencia!) es igual al producto de ω y de la distancia al punto desde Ⓘ.

Con el paso del tiempo, Ⓘ puede llegar a ser *diferentes* puntos físicos de $\mathcal{B}$ (como en el ejemplo de la rueda en rodamiento). De hecho, la única ocasión en que esto no pasa es cuando el cuerpo gira alrededor de un pivote fijo en $\mathcal{B}$ y en el plano de referencia, en cuyo caso el movimiento se llama **rotación pura.** El punto Ⓘ no tiene que ser un punto material de $\mathcal{B}$; puede ser un punto del cuerpo extendido, como se vio en la Sección 3.1. Veremos ahora algunos ejemplos del uso del concepto de centro instantáneo Ⓘ de velocidad.

Ejemplo 3.6

Se resolverá de nuevo el Ejemplo 3.3 usando centros instantáneos. (Vea el diagrama). La manivela $\mathcal{B}_1$ gira alrededor de un eje z horizontal que pasa a través de su extremo articulado O, con una velocidad angular de 10 rad/s con sentido horario en el instante mostrado. Calcular la velocidad del pasador B del pistón.



Solución

Puesto que O es el punto Ⓘ del cuerpo $\mathcal{B}_1$, tenemos

$$v_A = r\omega \;\angle^{3}_{4} = 5(10) \;\angle^{3}_{4}$$

$$= 50 \;\angle^{3}_{4} \text{ plg/s}$$

A continuación encontramos el Ⓘ de $\mathcal{B}_2$ a partir del hecho de que se halla sobre líneas perpendiculares a las velocidades de A y B como se muestra en el diagrama. Si ahora encontramos la distancia D de Ⓘ a A, entonces ω_2 será $v_A/D = 50/D$. Por triángulos semejantes:

$$\frac{D}{12.4} = \frac{5}{3} \Rightarrow D = 20.7 \text{ plg}$$

Entonces

$$\omega_2 = \frac{v_A}{D} = \frac{50}{20.7} = 2.42$$

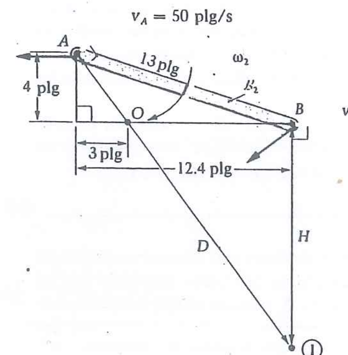
y

$$\omega_2 = 2.42 \circlearrowright \text{ rad/sec}$$

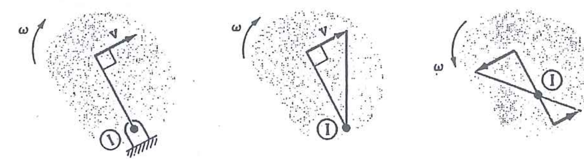
De nuevo, por triángulos semejantes

$$\frac{H+4}{12.4} = \frac{4}{3} \Rightarrow H = 12.5 \text{ plg}$$

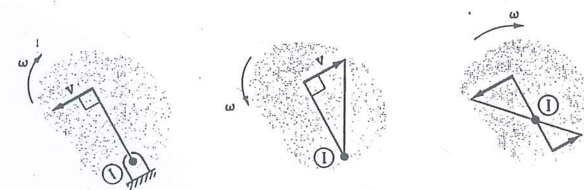
de modo que $v_B = H\,\omega_2 = 12.5\,(2.42) = 30.3$ plg/s, hacia la derecha, como encontramos antes.



Nótese que cuando se observan desde Ⓘ el sentido de la velocidad de cualquier punto y de la velocidad angular del cuerpo, deben coincidir. Por ejemplo, estas son posibles situaciones:

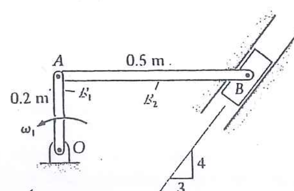


Estas no lo son:



Ejemplo 3.7

En el instante mostrado en el diagrama, la velocidad angular de la barra $\mathcal{B}_1$ es $\omega_1 = 5$ ↺ rad/s. Hallar la velocidad del pasador B que conecta la barra $\mathcal{B}_2$ al bloque restringido a resbalar en la guía como se muestra.



Solución

Como se ve en la Fig. 1, el punto ① para $\mathcal{B}_1$ es O ya que está articulado al marco de referencia. La velocidad de A es perpendicular a la línea que va de ① a A (o sea de O a A) y tiene una dirección de acuerdo con la velocidad angular de $\mathcal{B}_1$ al girar este alrededor de O. Su valor es $r_{①A}\omega_1$ ó 1m/s ←.

A continuación esbozamos el cuerpo $\mathcal{B}_2$ y anotamos la posición de ① para $_2$, como se explica en la Fig. 2. Por triángulos semejantes se obtiene la altura H de ① por encima de A:

$$\frac{H}{0.5} = \frac{3}{4}$$

$$H = 0.375 \text{ m}$$

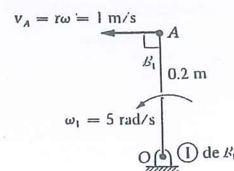


Figura 1

Pregunta 3.10 ¿Por qué $\mathbf{v}_B$ tiene que apuntar al "suroeste" a lo largo de la guía y no al "noreste"?

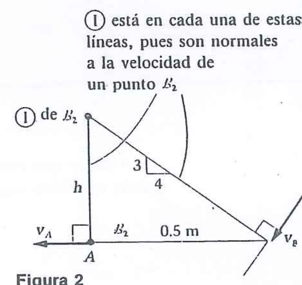


Figura 2

Podemos ahora usar el ① de $\mathcal{B}_2$ para obtener la velocidad angular de $\mathcal{B}_2$; utilizando rectores esta vez:

$$\mathbf{v}_A = \omega_2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{①A}$$

Sustituyendo obtenemos

$$-1\hat{\mathbf{i}} = \omega_2\hat{\mathbf{k}} \times (-0.375\hat{\mathbf{j}})$$

y despejando

$$\omega_2 = -2.67 \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_2 = -2.67\hat{\mathbf{k}} \text{ o bien } 2.67 \circlearrowright \text{ rad/s}$$



Nótese que cuando escribimos $\boldsymbol{\omega}_2 = \omega_2\hat{\mathbf{k}}$ estamos afirmando que ω_2 es antihorario, de acuerdo con la convención de signos adoptada para el problema de la figura, si su valor resulta positivo. Como su valor resultó negativo, $\mathcal{B}_2$ está girando en sentido horario en el instante dado. Como hemos visto, no es necesario usar vectores en un problema tan simple; podemos usar en forma escalar el concepto de centro instantáneo para obtener una solución rápida:

$$v_A = H|\omega_2| \Rightarrow |\omega_2| = \frac{v_A}{H} = \frac{1}{0.375} = 2.67 \Rightarrow \omega_2$$

$$= 2.67 \circlearrowright \text{ rad/s}$$

en donde asignamos la dirección de acuerdo con la dirección conocida de la velocidad de A y la posición de ①.

Ahora usamos el ① de $\mathcal{B}_2$ para obtener $\mathbf{v}_B$:

$$v_B = r_{①B}|\omega_2|$$

$$= \sqrt{0.375^2 + 0.5^2}|\omega_2| \text{ m/s}$$

$$= 0.625(2.67) = 1.67 \text{ m/s}$$

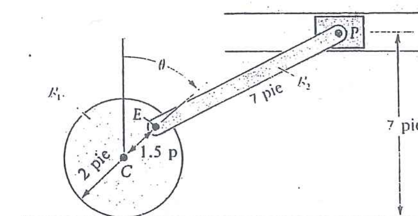
La velocidad de B es así: $\mathbf{v}_B = 1.67$ ↙ (pendiente 4/3) m/s.

Nótese que la flecha en este resultado es tan descriptiva de la dirección del vector velocidad de B como lo es el vector unitario $-0.6\hat{\mathbf{i}} - 0.8\hat{\mathbf{j}}$.

Presentamos ahora un ejemplo que examina cuatro diferentes posiciones del mismo sistema.

Ejemplo 3.8

El diagrama muestra una rueda en rodamiento $\mathcal{B}_1$ de un gran vehículo que viaja con velocidad constante de 60 mi/h →. Calcular la velocidad del pistón cuando θ es igual a: (a) 0°, (b) 90°, (c) 180°, (d) 270°.



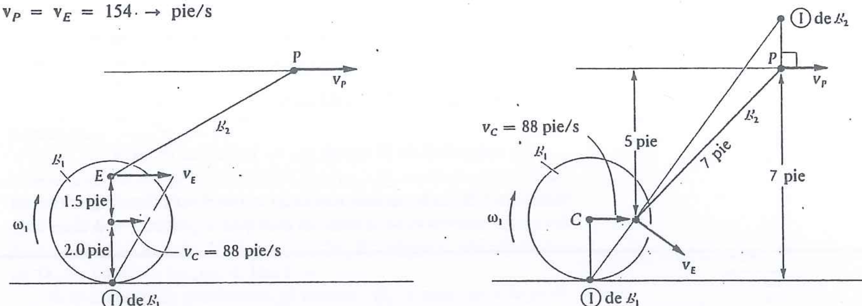
Solución

Primero encontramos las velocidades usando varios métodos. En cada caso, la velocidad del centro de la rueda es igual a la rapidez del vehículo: 60 mih o 88 pie/s, y puesto que el pistón se translada, todos sus puntos tienen iguales velocidades y aceleraciones en todo instante.

Caso (a): Como veremos en detalle en la Sección 3.6, el centro instantáneo de una rueda en rodamiento sobre un suelo fijo, está en el punto de contacto. Como las velocidades crecen linealmente con la distancia a este punto ①, se tiene para el punto E de $\mathcal{B}_1$:

$$v_E = \frac{2 + 1.5}{2}(88) = 154 \text{ pie/s}$$

Si trazamos rectas por E y P perpendiculares a $\mathbf{v}_E$ y a $\mathbf{v}_P$ (P está obligado a moverse horizontalmente), estas serán paralelas entre sí y no se intersectarán. Por ello $\omega_2 = 0$ en ese instante. Así $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_E = 154 \rightarrow$ pie/s



Caso (b): Usando ahora vectores se tiene para la rueda:

$$\mathbf{v}_C = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_{Ⓘ}}} + \omega_1\hat{\mathbf{k}} \times \overset{2\hat{\mathbf{j}}}{\cancel{\mathbf{r}_{ⒾC}}}$$

$$88\hat{\mathbf{i}} = -2.0\omega_1\hat{\mathbf{i}} \Rightarrow \omega_1 = -44 \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_1 = -44\hat{\mathbf{k}}$$

o bien

$$\omega_1 = 44.0 \circlearrowright \text{rad/s}$$

$$\mathbf{v}_E = -44.0\hat{\mathbf{k}} \times (1.5\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) = 88.0\hat{\mathbf{i}} - 66.0\hat{\mathbf{j}}$$

o bien

$$\mathbf{v}_E = 110 \;\overset{4}{\searrow}{}_3\; \text{pie/s}$$

En $\mathcal{B}_2$:

$$\mathbf{v}_P = v_P\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{v}_E + \omega_2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{EP}$$

$$= 88.0\hat{\mathbf{i}} - 66.0\hat{\mathbf{j}} + \omega_2\hat{\mathbf{k}} \times (4.90\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$$

(Triángulo: E, P, 7 pie, $7 - 2 = 5$ pie, $\sqrt{7^2 - 5^2} = 4.90$ pie)

Igualando coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$ y de $\hat{\mathbf{j}}$ obtenemos

$\hat{\mathbf{i}}$: $\quad v_P = 88.0 - 5.00\omega_2$

$\hat{\mathbf{j}}$: $\quad 0 = -66.0 + 4.90\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = +13.5$ rad/s

Por lo tanto,

$$v_P = 88.0 - 5.00(+13.5) = 20.5 \text{ pie/s}$$

de modo que

$$\mathbf{v}_P = 20.5\hat{\mathbf{i}} \text{ pie/s}$$

Caso (c): En todos los cuatro casos, $\omega_1 = 44.0 \circlearrowright$ rad/s. Esta vez se tiene:

$$v_E = (2.0 - 1.5)\omega = 22.0 \text{ pie/s}$$

$$\mathbf{v}_E = 22.0 \rightarrow \text{pie/s}$$

Nuevamente, como en el Caso (a), el cuerpo $\mathcal{B}_2$ tiene $\omega_2 = 0$ y todos los puntos de $\mathcal{B}_2$ tienen la misma velocidad. Así

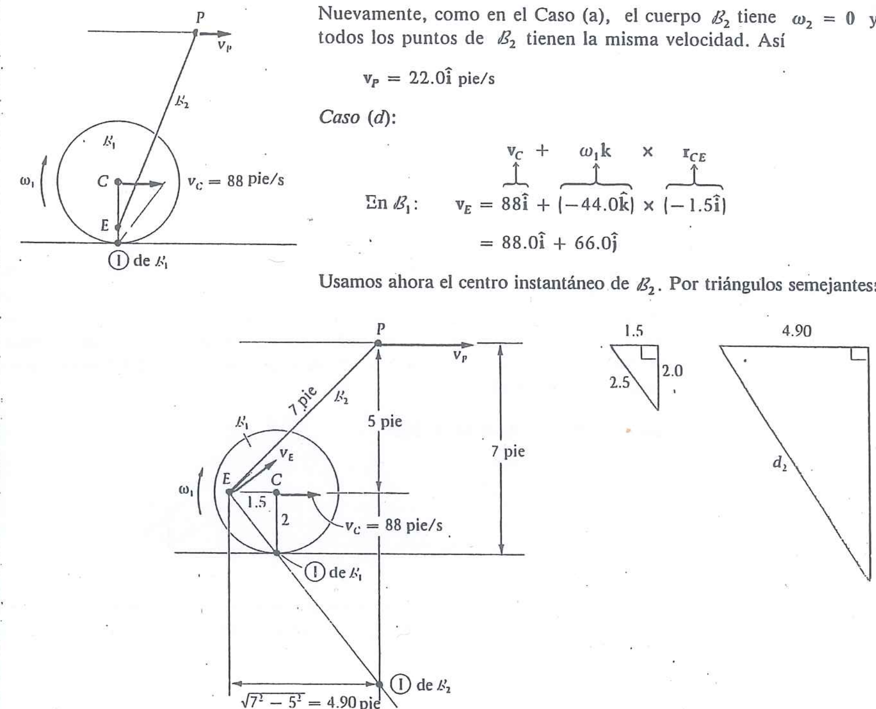
$$\mathbf{v}_P = 22.0\hat{\mathbf{i}} \text{ pie/s}$$

Caso (d):

$$\text{En } \mathcal{B}_1: \quad \mathbf{v}_E = \underbrace{88\hat{\mathbf{i}}}_{\mathbf{v}_C} + \underbrace{(-44.0\hat{\mathbf{k}})}_{\omega_1\mathbf{k}} \times \underbrace{(-1.5\hat{\mathbf{i}})}_{\mathbf{r}_{CE}}$$

$$= 88.0\hat{\mathbf{i}} + 66.0\hat{\mathbf{j}}$$

Usamos ahora el centro instantáneo de $\mathcal{B}_2$. Por triángulos semejantes:



$$d_1 = \frac{2.0}{1.5}(4.90) = 6.53 \text{ pie}$$

$$d_2 = \frac{2.5}{1.5}(4.90) = 8.17 \text{ pie}$$

Por tanto, en $\mathcal{B}_2$:

$$\omega_2 = \frac{v_E}{8.17} = \frac{\sqrt{88.0^2 + 66.0^2}}{8.17} = \frac{110}{8.17} = 13.5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 13.5 \circlearrowright \text{rad/s}$$

y

$$v_P = (6.53 + 5)\omega_2 = 156 \text{ pie/s} \Rightarrow \mathbf{v}_P = 156 \rightarrow \text{pie/s}$$

Nótese en las cuatro respuestas del ejemplo anterior que el pistón se mueve más rápidamente durante las partes de la rotación de la rueda en que $\mathbf{v}_E$ forma ángulos pequeños con la biela $\mathcal{B}_2$; recíprocamente, se mueve con más lentitud cuando $\mathbf{v}_E$ forma ángulos grandes con $\mathcal{B}_2$. Esto debido a que las componentes de $\mathbf{v}_E$ y $\mathbf{v}_P$ a lo largo de $\mathcal{B}_2$ deben ser siempre las mismas, como vimos antes.

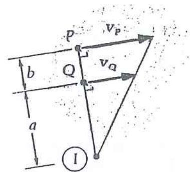


Figura P3.12a

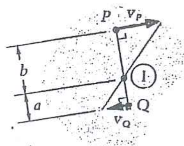


Figura P3.12b

Hemos visto en los Casos (a) y (c) del ejemplo anterior que cuando las normales a las velocidades de dos puntos de un cuerpo rígido no se intersecan, el cuerpo tiene en ese instante velocidad angular nula. Hay otra situación que debe conocer el lector; es aquella en que las dos normales forman una misma línea (Fig. 3.12). En este caso podemos encontrar el centro instantáneo usando triángulos similares, como se muestra. Este método simple funciona porque, para el caso de la Fig. 3.12a,

$$v_Q = a\omega \qquad \text{y} \qquad v_P = (a + b)\omega$$

de manera que

$$\frac{v_P}{a + b} = \frac{v_Q}{a}$$

Si se tienen normales coincidentes, con las direcciones de $\mathbf{v}_P$ y $\mathbf{v}_Q$ *opuestas*, como en la Fig. 3.12b, entonces Ⓘ se encuentra *entre* P y Q, y puede también encontrarse por triángulos semejantes. Esta vez,

$$v_P = b\omega \qquad \text{y} \qquad v_Q = a\omega$$

de modo que

$$\frac{v_P}{b} = \frac{v_Q}{a}$$

En los ejemplos que hemos presentado en esta sección, el empleo del centro instantáneo puede hacerse o sin ella con algebra vectorial. Su ventaja en encontrar y usar puntos de velocidad cero para simplificar la matemática resultante. Los centros instantáneos nunca *tienen* que usarse para encontrar una solución. Algunas veces son útiles, pero en otras puede ser mayor el problema de localizarlos que el beneficio derivado de ello.

Problemas / Sección 3.4

3.31 La velocidad angular de $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.31 es de 3 ↻ rad/s = constante. Calque las cinco figuras y muestre en las partes (a) a (d) la posición de Ⓘ para la barra $\mathcal{B}_2$. En la parte (e), usando la longitud de $\mathcal{B}_2$, dibuje las posiciones de $\mathcal{B}_2$ en los dos tiempos cuando $\mathbf{v}_B = 0$. La barra $\mathcal{B}_2$ mide 0.9 m.

3.32 Resuelva el Problema 3.16 mediante centros instantáneos.

3.33 Resuelva el Problema 3.7 mediante centros instantáneos.

3.34 Resuelva el Problema 3.12 mediante centros instantáneos.

3.35 Resuelva el Problema 3.6 mediante centros instantáneos.

* **3.36** Resuelva el Problema 3.17 mediante centros instantáneos.

* **3.37** Resuelva el Problema 3.11 mediante centros instantáneos.

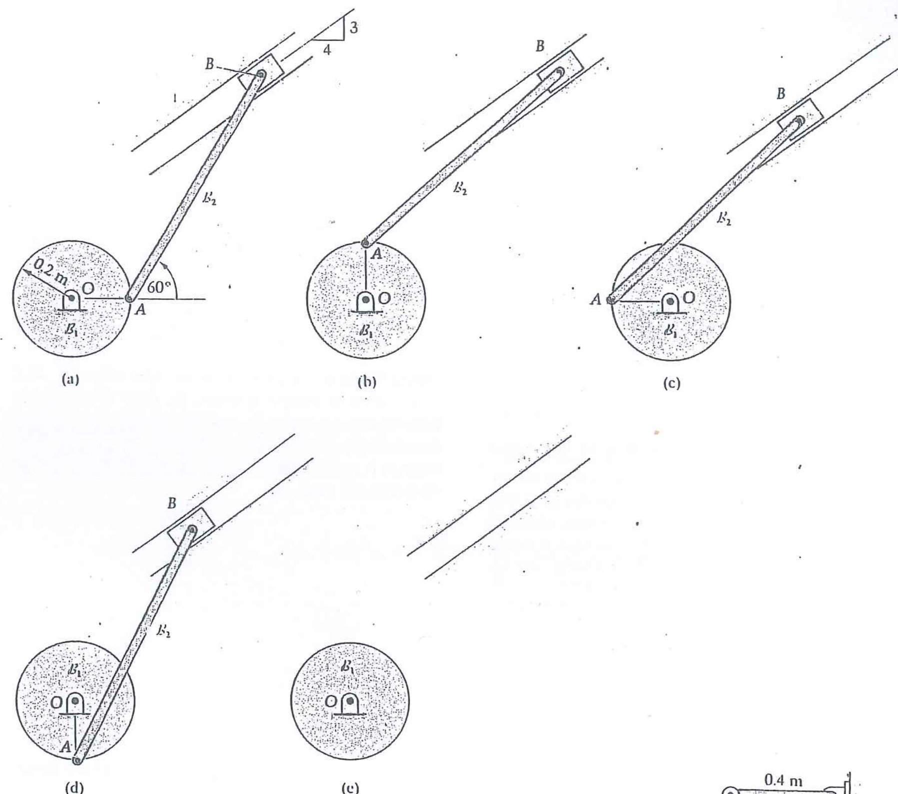


Figura P3.31

3.38 En la Fig. 3.38 la manivela $\mathcal{B}_1$ tiene 4 plg de longitud y velocidad angular constante $\omega_1 = 2$ ↻ rad/s. Está articulada a la placa triangular $\mathcal{B}_2$, que también está articulada al bloque en la guía en D. Encuentre la velocidad de D en el instante mostrado.

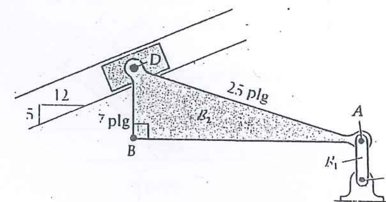


Figura P3.38

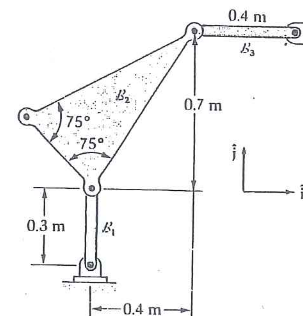


Figura P3.39

3.39 Vea la Fig. 3.39. La velocidad angular de la barra $\mathcal{B}_1$ es constante: $\omega_1 = 0.3\hat{\mathbf{k}}$ rad/s. Determine la velocidad angular de la placa $\mathcal{B}_2$ y de la barra $\mathcal{B}_3$ en la posición indicada.

3.40 El pasador en B (Fig. P3.40) tiene una velocidad constante de 51 cm/s y se mueve en un círculo en sentido horario. Encuentre las velocidades angulares de las barras $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en la posición indicada.

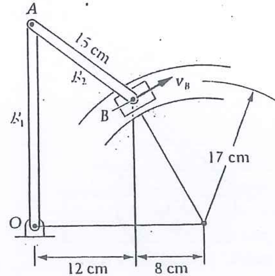


Figura P3.40

3.41 Resuelva el Ejemplo 3.5 usando el centro instantáneo de la barra.

3.42 Las barras $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ están articuladas en B y se mueven en un plano vertical con las velocidades angulares constantes mostradas en la Fig. P3.42. Localice el centro instantáneo de $\mathcal{B}_2$ para la posición dada y úselo para encontrar la velocidad del punto C. Revise luego el valor obtenido v_C (en $\mathcal{B}_2$) relacionando a ésta con la velocidad de B. Note que a veces es muy tedioso localizar Ⓘ.

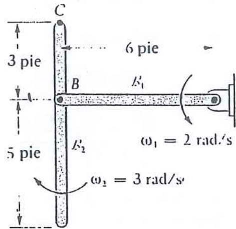


Figura P3.42

3.43 El mecanismo mostrado en la Fig. P3.43 está formado por las barras $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$. La barra $\mathcal{B}_1$ tiene velocidad angular constante $\omega_1 = 0.6$ ↺ rad/s. Determine las velocidades angulares de $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ cuando $\theta = 90°$.

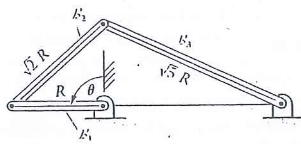


Figura P3.43

3.44 Una barra de longitud $2L$ se mueve con sus extremos en contacto con los planos mostrados en la Fig. P3.44. Encuentre la velocidad y aceleración del punto C en función de θ y sus derivadas, escribiendo y derivando el vector de posición de C. Revise el resultado obtenido para la velocidad usando el centro instantáneo.

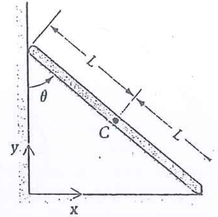


Figura P3.44

3.45 El vástago del pistón del cilindro hidráulico mostrado en la Fig. P3.45 se mueve hacia afuera con velocidad constante de 0.13 m/s. Encuentre la velocidad angular de $\mathcal{B}_1$ en el instante mostrado.

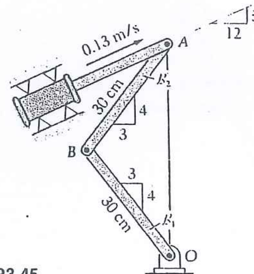


Figura P3.45

3.46 Usando el método de los centros instantáneos, encuentre la velocidad del punto B en la Fig. P3.46 que está obligado a moverse en la guía mostrada. La velocidad angular de $\mathcal{B}_1$ es 0.3 ↺ rad/s en el instante indicado.

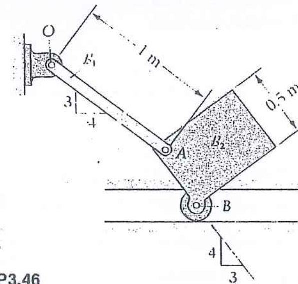


Figura P3.46

3.47 El centro del bloque $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.47 viaja con velocidad constante de 30 mi/h hacia la derecha. El disco $\mathcal{B}_2$ está articulado a $\mathcal{B}_1$ en A y gira a 100 rpm en sentido antihorario. Encuentre: (a) la velocidad de P; (b) el centro instantáneo Ⓘ de $\mathcal{B}_2$ y (c) las velocidades de Q, S y R usando Ⓘ

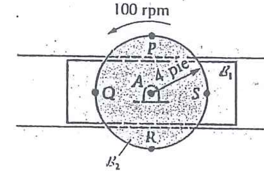


Figura P3.47

3.48 El rodillo en B que se mueve en la guía parabólica está articulado a la barra $\mathcal{B}_1$, como se muestra en la Fig. P3.48. La barra $\mathcal{B}_1$ está articulada a $\mathcal{B}_2$ en A. La velocidad angular de $\mathcal{B}_2$ se muestra en este instante. Encuentre la velocidad angular de $\mathcal{B}_1$ en ese momento.

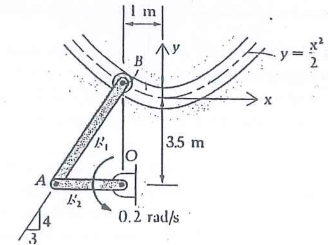


Figura P3.48

3.49 Las barras $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ (Fig. P3.49) están articuladas entre sí en A. Encuentre la velocidad angular de la barra $\mathcal{B}_1$ y la velocidad del punto B cuando las barras estén alineadas por primera vez. *Sugerencia*: Para encontrar esta configuración dibuje una serie de diagramas de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ cuando $\mathcal{B}_2$ gira en sentido antihorario desde la posición mostrada, y se evidenciará el alineamiento de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

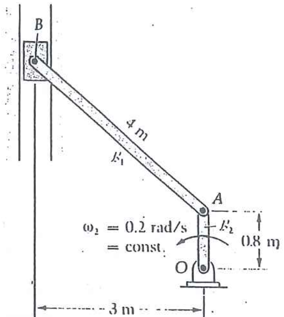


Figura P3.49

3.50 Repita el problema anterior en el *segundo* instante en que las barras están alineadas. Siga la misma sugerencia, pero esta vez comience justo después de la *primera* posición colineal encontrada en el Problema 3.49.

3.51 La velocidad angular constante de la rueda $\mathcal{B}_1$ es $\omega_1 = 100$ ↻ rad/s; se encuentra en contacto de rodamiento (sin resbalar) con $\mathcal{B}_2$, lo que implica que los puntos en contacto tiene la misma velocidad. Encuentre la velocidad angular de la barra $\mathcal{B}_4$ en el instante mostrado en la Fig. P3.51.

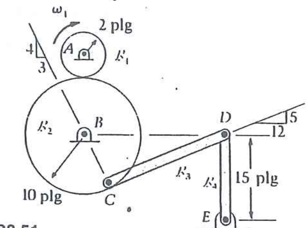


Figura P3.51

3.5 Relación entre la aceleración lineal y la aceleración angular para dos puntos del mismo cuerpo rígido

El vector aceleración angular de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento en un marco $\mathcal{J}$ se define como la derivada en $\mathcal{J}$ de la velocidad angular y se denomina α:

$$\alpha_{\mathcal{B}/\mathcal{J}} = \alpha = \frac{d\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{J}}}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \quad (3.14)$$

o bien

$$\alpha = \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \quad \text{o} \quad \alpha\hat{\mathbf{k}} \quad (3.15)$$

En donde $\hat{\mathbf{k}}$ es un vector constante en $\mathcal{B}$ y en $\mathcal{F}$. Nótese que igual que para ω, se suprimen los subíndices cuando no hay confusión posible acerca del marco de referencia usado.

Ahora desarrollaremos la relación entre las aceleraciones de dos puntos P y Q de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$. Derivando ambos miembros de la Ec. (3.8) se obtiene.

$$\dot{\mathbf{v}}_Q = \mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_P + \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PQ} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \dot{\mathbf{r}}_{PQ} \tag{3.16}$$

Usando ahora la Ec. (3.7)* podemos escribir el último término de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \dot{\mathbf{r}}_{PQ} &= \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times (\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PQ}) \\ &= \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}(\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}_{PQ}) - \mathbf{r}_{PQ}(\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \cdot \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

o bien

$$\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \dot{\mathbf{r}}_{PQ} = -\dot{\theta}^2\mathbf{r}_{PQ} \tag{3.18}$$

Pregunta 3.11 ¿Por qué es igual a cero el producto escalar $\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}_{PQ}$ en la Ec. (3.17)

Las Ecs. (3.16) y (3.18) proporcionan la buscada relación entre las aceleraciones de P y Q:

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_P + \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PQ} - \dot{\theta}^2\mathbf{r}_{PQ} \tag{3.19}$$

Nótese que a diferencia de las velocidades, las aceleraciones de P y Q no tienen generalmente componentes iguales a lo largo de la recta PQ que las une; estas componentes difieren en $r\dot{\theta}^2 = r\omega^2$. De la misma manera, las componentes *perpendiculares* a PQ difieren en $r\ddot{\theta} = r\alpha$ (del mismo modo en que las componentes normales a PQ de la velocidad difieren en $r\dot{\theta} = r\omega$).

Si la aceleración del punto A de un cuerpo $\mathcal{B}$ es $\mathbf{a}_A$, por ejemplo, entonces la aceleración de cualquier punto B es la suma de los tres vectores mostrados en la Fig. 3.13. Si A es un punto articulado o un pivote**, entonces $\mathbf{a}_B$ tiene dos componentes: una a lo largo de la recta de B a A y otra perpendicular a ella y tangente al círculo sobre el cual viaja necesariamente el punto B cuando hay un pivote en A. Nótese que la dirección de la componente tangencial depende de la dirección de α, pero que la componente "radial" *siempre* está dirigida hacia el pivote. Este caso se muestra en la Fig. 3.14. Ilustraremos ahora el uso de la Ec. (3.19) con varios ejemplos.

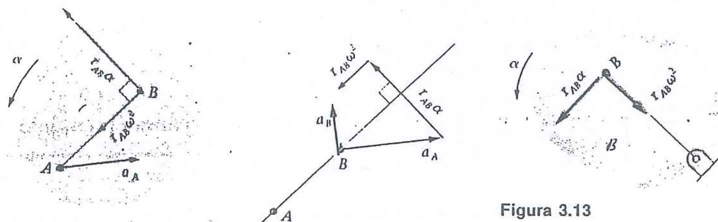


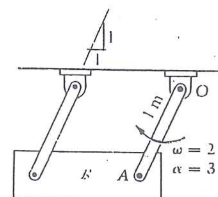
Figura 3.13

Figura 3.14

*Y también la identidad vectorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

** Un *pivote* es un punto de $\mathcal{B}$ que no se mueve durante el movimiento de éste. Los pasadores de las articulaciones son pivotes, pero no exclusivamente.

Ejemplo 3.9



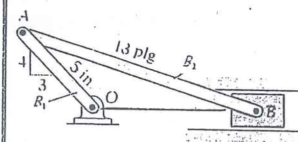
Los eslabones de la figura miden lm de longitud y tienen cada uno una $\omega = 2 \circlearrowleft$ rad/s y una $\alpha = 3 \circlearrowleft$ rad/s₂ en el momento en que forman un ángulo de 45° con el techo. Encuentre la aceleración del bloque $\mathcal{B}$. (O sea, encuentre la aceleración de cualquiera de sus puntos; todos tienen la misma, ya que $\mathcal{B}$ experimenta traslación.)

Solución

Todos los puntos de $\mathcal{B}$ tienen las mismas v y a que el punto A. Si usamos la Ec. (3.19) para el eslabón OA obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \overset{0}{\cancel{\mathbf{a}_O}} + \alpha \times \mathbf{r}_{OA} - \omega^2\mathbf{r}_{OA} \\ &= 3\hat{\mathbf{k}} \times (-0.707\hat{\mathbf{i}} + 0.707\hat{\mathbf{j}}) - 2^2(-0.707\hat{\mathbf{i}} + 0.707\hat{\mathbf{j}}) \\ &= (-2.12 + 2.83)\hat{\mathbf{i}} + (-2.12 - 2.83)\hat{\mathbf{j}} \\ &= 0.71\hat{\mathbf{i}} - 4.95\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.10



En el ejemplo 3.3 encuentre la aceleración del pistón (en traslación) en el instante mostrado si $\omega_1 = 10 \circlearrowleft$ rad/s y $\alpha_1 = 5 \circlearrowright$ rad/s².

Pregunta 3.12 ¿Que significa que α tiene dirección opuesta a la de ω ?

Solución

Relacionando O y A sobre el cuerpo $\mathcal{B}_1$ por medio de la Ec. (3.19) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_A &= \overset{0 \text{ (articulado)}}{\cancel{\mathbf{a}_O}} + \alpha_1\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{OA} - \omega_1^2\mathbf{r}_{OA} \\ &= 5\hat{\mathbf{k}} \times (-3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}) - 10^2(-3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}) \\ &= 280\hat{\mathbf{i}} - 415\hat{\mathbf{j}} \text{ plg/s}^2 \end{aligned}$$

y relacionado A y B sobre el cuerpo $\mathcal{B}_2$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha_2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{AB} - \omega_2^2\mathbf{r}_{AB}$$

En el ejemplo anterior encontramos que

$$\mathbf{r}_{AB} = 12.4\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} \text{ plg} \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = 2.42 \circlearrowleft \text{ rad/s}$$

Notando que el pistón se traslada horizontalmente obtenemos

$$\mathbf{a}_B = a_B\hat{\mathbf{i}} = 280\hat{\mathbf{i}} - 415\hat{\mathbf{j}} + 12.4\alpha_2\hat{\mathbf{j}} + 4\alpha_2\hat{\mathbf{i}} - 2.42^2(12.4\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}})$$

$$= (207 + 4\alpha_2)\hat{\mathbf{i}} + (-392 + 12.4\alpha_2)\hat{\mathbf{j}}$$

Los coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$ dan

$$\alpha_2 = \frac{392}{12.4} = 31.6 \text{ rad/s}^2$$

Los coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$ dan la respuesta buscada

$$\mathbf{a}_B = a_B\hat{\mathbf{i}} = [207 + 4(31.6)]\hat{\mathbf{i}} = 333\hat{\mathbf{i}} \text{ plg./s}^2$$

Encontremos la aceleración del centro instantáneo de velocidad nula de la barra $\mathcal{B}_2$ en los Ejemplos 3.6 y 3.10; usando esos ejemplos y la Ec. (3.19) se tiene

$$\mathbf{a}_{Ⓘ} = \mathbf{a}_B + \alpha_2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{BⒾ} - \omega_2^2\mathbf{r}_{BⒾ}$$

$$= 333\hat{\mathbf{i}} + 31.6\hat{\mathbf{k}} \times (-12.5\hat{\mathbf{j}}) - (2.42)^2(-12.5\hat{\mathbf{j}})$$

$$= 728\hat{\mathbf{i}} + 73.2\hat{\mathbf{j}} \text{ plg./s}^2$$

Vemos de este resultado que el centro instantáneo de *velocidad* nula no tiene generalmente aceleración cero. A menos que el punto Ⓘ sea un pivote (o sea, un punto fijo permanentemente, como un pasador que conecta el punto al marco de referencia), *nunca* debe suponerse que $\mathbf{a}_{Ⓘ}$ es cero*.

Ejemplo 3.11

En el Ejemplo 3.5 encuentre la aceleración angular de la barra y la aceleración de su punto extremo A.

Solución

Relacionando las aceleraciones de B y A por medio de la Ec. (3.19).

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{AB} - \omega^2\mathbf{r}_{AB} \qquad (1)$$

La aceleración del punto B es

$$\mathbf{a}_B = \ddot{s}\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n$$

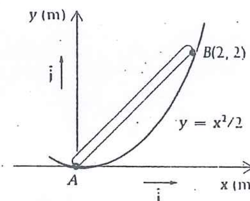


Figura 1

*En realidad, en casos no traslacionales existe un punto de a .ración nula, pero a menos que se trate de un pivote o de un punto de contacto en la superficie de rodamiento en un instante cuando $\omega = 0$, es mayor el esfuerzo que el beneficio de encontrarlo. (Véase el Problema 3.83.)

en donde $\ddot{s}_B = 0$ ya que $\dot{s}_B =$ es constante $= 0.3$ m/s. La fórmula de la curvatura estudiada en Cálculo Diferencial da el radio de curvatura en el punto B:

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}\right|$$

$$= \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

Por consiguiente,

$$\rho_B = (1 + 2^2)^{3/2}$$

$$= 5^{3/2}$$

$$= 11.2 \text{ m}$$

Entonces,

$$\mathbf{a}_B = \frac{(0.3)^2}{11.2}\hat{\mathbf{e}}_n = 0.00804\hat{\mathbf{e}}_n \text{ m/s}^2$$

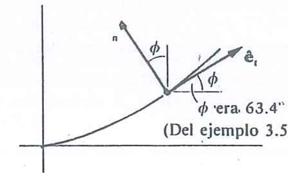


Figura 2

El vector unitario $\hat{\mathbf{e}}_n$ es según la Fig. 2

$$\hat{\mathbf{e}}_n = -\operatorname{sen}\phi\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\hat{\mathbf{j}}$$

$$= -0.894\hat{\mathbf{i}} + 0.448\hat{\mathbf{j}}$$

Por tanto,

$$\mathbf{a}_B = -0.00804\hat{\mathbf{e}}_n$$

$$= -0.00719\hat{\mathbf{i}} + 0.00360\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo a_B en la Ec. (1) da

$$-0.00719\hat{\mathbf{i}} + 0.00360\hat{\mathbf{j}} = \ddot{s}_A\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{\dot{s}_A^2}{\rho_A}\hat{\mathbf{e}}_n$$

$$+ \alpha\hat{\mathbf{k}} \times (2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) - \omega^2(2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

en donde $\mathbf{r}_{AB} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ también se ha sustituido.

El radio de curvatura de la trayectoria de A en el instante de interés es

$$\rho_A = (1 + x^2)^{3/2} = (1 + 0^2)^{3/2} = 1 \text{ m}$$

Sustituyendo $\rho_A = 1$, $\dot{s}_A = 0.403$ y $\omega = 0.134$ del Ejemplo 3.5 (junto con $\hat{\mathbf{e}}_t = \hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{e}}_n = \hat{\mathbf{j}}$ en el punto A), obtenemos la ecuación vectorial:

$$-0.00719\hat{\mathbf{i}} + 0.00360\hat{\mathbf{j}} = \ddot{s}_A\hat{\mathbf{i}} + \frac{(0.403)^2}{1}\hat{\mathbf{j}} - 2\alpha\hat{\mathbf{i}}$$

$$+ 2\alpha\hat{\mathbf{j}} - 2(0.134)^2(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$$

Para las ecuaciones de las componentes:

$$\text{Coeficientes } \hat{\mathbf{i}}: \quad -0.00719 = \ddot{s}_A - 2\alpha - 2(0.134)^2$$

$$\text{Coeficientes } \hat{\mathbf{j}}: \quad 0.00360 = \frac{(0.403)^2}{1} + 2\alpha - 2(0.134)^2$$

La ecuación en $\hat{\mathbf{j}}$ da

$$\alpha = -0.0612 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = -0.0612\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2$$

y la ecuación en $\hat{\mathbf{i}}$:

$$\ddot{s}_A = -0.0936 \text{ m/s}^2$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{a}_A = -0.0936\hat{\mathbf{i}} + \frac{(0.403)^2}{1}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= -0.0936\hat{\mathbf{i}} + 0.162\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}^2$$

Muchos ejemplos más del uso de la Ec. (3.19) se encontrarán en la sección siguiente, después de haber estudiado el tema del rodamiento.

Problemas / Sección 3.5

3.52 En la Fig. P3.52 la velocidad angular de la barra doblada es de 0.2 rad/s en sentido antihorario, en el instante en que su aceleración angular es de 0.3 rad/s² en sentido horario. Encuentre la aceleración del punto extremo B en la posición indicada.

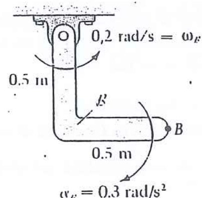


Figura P3.52

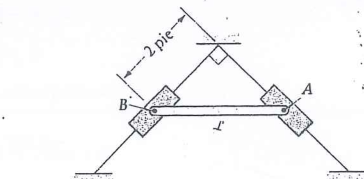


Figura P3.53

3.53 La aceleración del pasador B en la Fig. P3.53 es de 9.9 pie/s² hacia abajo y hacia la izquierda, y su velocidad es de 4 pie/s hacia arriba y hacia la derecha, cuando $\mathcal{L}$ pasa por la horizontal. En este instante, encuentre la aceleración angular de $\mathcal{L}$.

3.54 El extremo B de la barra mostrada en la Fig. P3.54 tiene una velocidad constante de 10 pie/s hacia abajo en el plano. Para la posición mostrada (barra horizontal) determine la velocidad y aceleración del extremo A de la barra.

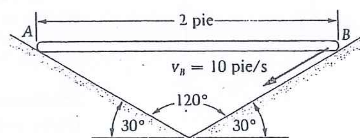


Figura P3.53

3.55 Las velocidades y aceleraciones de los dos puntos extremos A y B de una barra rígida en movimiento plano son como se muestran en la Fig. P3.55. Encuentre la aceleración del punto medio de la barra en la posición indicada.

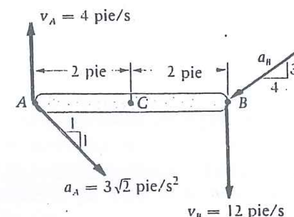


Figura P3.54

3.56 En el Problema 3.42 obtenga la aceleración de C en la posición indicada en la figura.

3.57 En el instante dado, la velocidad angular y la aceleración angular de la barra $\mathcal{B}_1$ son 0.2 ↺ rad/s y 0.1 ↻ rad/s² (Fig. P3.57). Encuentre las aceleraciones angulares de $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ en este instante.

3.58 La barra $\mathcal{B}_1$ gira con velocidad angular constante de $2\hat{\mathbf{k}}$ rad/s. Encuentre las velocidades angulares y las aceleraciones angulares de $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ en el instante mostrado en la Fig. P3.58.

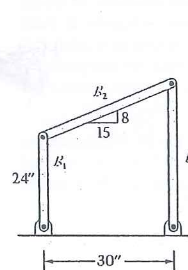


Figura P3.57

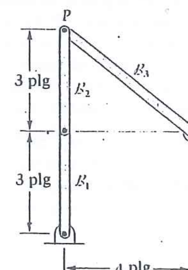


Figura P3.58

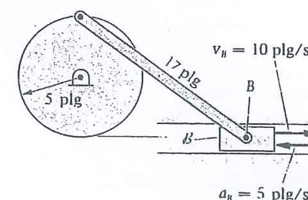


Figura P3.59

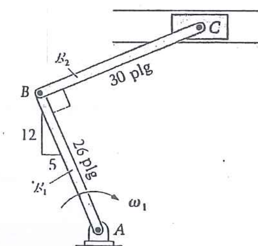


Figura P3.61

3.59 En la posición indicada en la Fig. P3.59, el bloque deslizante $\mathcal{B}$ tiene la velocidad y aceleración indicadas. Encuentre la aceleración angular de la rueda en este instante.

3.60 En el Problema 3.51, encuentre la aceleración angular de la barra $\mathcal{B}_3$ en el mismo instante.

* **3.61** La velocidad angular de $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.61 es constante e igual a 3 rad/s en sentido horario. Encuentre la velocidad y la aceleración del punto C en la configuración dada y determine la aceleración del punto C cuando $v_C = 0$.

3.62 En el Problema anterior encuentre la aceleración del punto C cuando $\omega_2 = 0$.

3.63 La rueda de 2 m de diámetro de la Fig. P3.63 gira alrededor de un eje que pasa por su centro, con una rapidez angular dada por

$$\dot{\theta} = \omega = 5 - 2t$$

en donde ω está en rad/s y t en segundos. Determine la aceleración angular de la rueda y encuentre el desplazamiento angular de la recta OP durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 5$ s.

3.64 En el instante mostrado en la Fig. P3.64, la velocidad angular y la aceleración angular de la barra $\mathcal{B}_1$ son 3 ↺ rad/s y 2 ↻ rad/s². Calcule para este instante la aceleración angular de la barra $\mathcal{B}_2$.

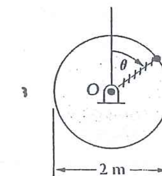


Figura P3.63

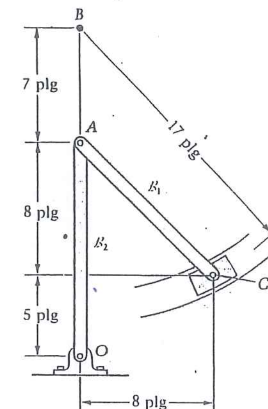


Figura P3.64

3.65 En el Problema 3.26 encuentre la ecuación para la aceleración angular $\ddot{\phi}$ de la barra $\mathcal{B}_2$ en función de r, ℓ, θ y $\dot{\theta}$.

3.66 En el problema anterior grafique $\ddot{\phi}/\dot{\theta}^2$ contra θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ para $\ell/r = 1, 2$ y 5.

3.67 La manivela $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.67 está articulada a la barra $\mathcal{B}_2$; el otro extremo de $\mathcal{B}_2$ resbala sobre un plano parabólico y está en el origen en la posición mostrada. La velocidad angular de $\mathcal{B}_1$ es de 3 ⥀ rad/s = constante. Determine la aceleración de A y la aceleración angular de $\mathcal{B}_2$ en el instante dado. *Sugerencia*: El radio de curvatura ρ de una curva plana $y = y(x)$ puede calcularse con la fórmula

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}\right|$$

Use este resultado para calcular la componente normal de $\mathbf{a}_A$ como en el Ejemplo 3.11.

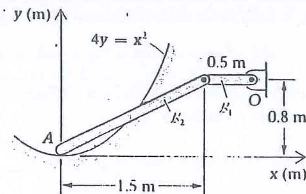


Figura P3.67

3.68 La barra de 10 pie de longitud de la Fig. P3.68 resbala hacia abajo en el círculo de 13 pie de radio, como se muestra. En la posición indicada la barra tiene una velocidad angular de 2 rad/s y una aceleración angular de 3 rad/s², ambas en el sentido horario.
Encuentre las componentes x y y de la aceleración del punto B para esta posición.

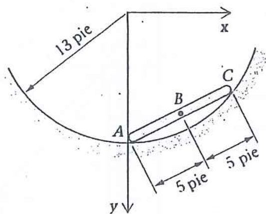


Figura P3.68

3.69 En el Problema 3.23 halle la aceleración de B cuando $x = 10$ m.

3.70 En el Problema 3.31 encuentre la aceleración del extremo superior B de la barra $\mathcal{B}_2$ en la posición (a).

3.71 Determine la aceleración de P en el Problema 3.58 si en el mismo instante el cuerpo $\mathcal{B}_1$ tiene aceleración angular $\alpha_1 = 3\hat{\mathbf{k}}$ rad/s² en vez de cero.

3.72 En el Problema 3.49 encuentre la aceleración del punto B y la aceleración angular del cuerpo $\mathcal{B}_1$ en el instante descrito.

3.73 En el Problema 3.50 calcule la aceleración del punto B y la aceleración angular del cuerpo $\mathcal{B}_1$ en el instante descrito.

3.74 En el Problema 3.22 encuentre la aceleración de S y las aceleraciones angulares de $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ en el instante en que $\theta = 30°$.

3.75 En el Problema 3.38 determine la aceleración angular de la placa y la aceleración del pasador D en la posición indicada.

3.76 En el Problema 3.45 determine las aceleraciones angulares de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en la posición indicada.

3.77 El movimiento de un elemento rotatorio en un mecanismo está controlado de manera que la taza de variación de la rapidez angular ω respecto al desplazamiento angular θ es una constante K. Si la rapidez angular es ω_0 cuando θ y t son cero, determine θ, ω, y α como *funciones del tiempo*.

***3.78** La barra $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.78 está articulada al disco $\mathcal{B}_2$ en A y en B. El disco $\mathcal{B}_2$ rota alrededor de un eje fijo que pasa por O. La barra forma un ángulo θ (rad) con la recta $\ell\ell$ como se muestra, en donde θ = sen t. El tiempo se mide en segundos. Determine las componentes horizontal y vertical de la aceleración del punto medio P del segmento AB cuando $\theta = -\pi/6$ rad.

3.79 Una barra está articulada en A y en B a los centros de dos rodillos pequeños (Vea la Fig. P3.79). La velocidad v_0 de A se mantiene constante, aún cuando B encuentre

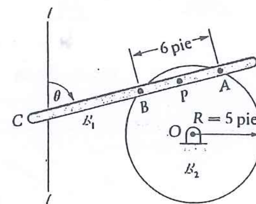


Figura P3.78

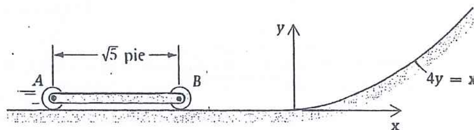


Figura P3.79

la superficie parabólica. Determine la aceleración de B justo después de que su rodillo empieza a moverse sobre la parábola.

*** 3.80** En el problema anterior encuentre $\mathbf{a}_B$ justo *después* de que el rodillo izquierdo ha comenzado a viajar sobre la parábola.

*** 3.81** La barra doblada de la Fig. P3.81 resbala sobre las superficies vertical y horizontal. En la posición mostrada A tiene una aceleración de 4 pie/s² hacia la izquierda, mientras la barra tiene una velocidad angular de 2 rad/s horaria y una aceleración angular de α.

a. Determine α para la posición mostrada.
b. Encuentre, para la posición indicada, el ángulo θ y la distancia PA, tal que el punto P tenga aceleración nula.

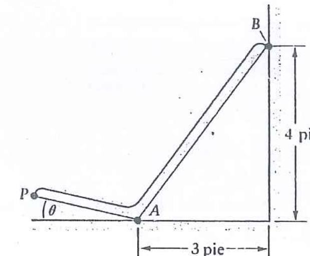


Figura P3.81

*** 3.82** El extremo derecho P de la barra $\mathcal{B}$ está restringido a moverse hacia la derecha sobre la curva senoidal mostrada en la Fig. P3.82, con una rapidez constante $\sqrt{10}$ plg/s. El extremo A de $\mathcal{B}$ está restringido a resbalar a lo largo del eje x. En el instante cuando $x = \pi$ plg, determine (a) $\omega_{\mathcal{B}}$ y (b) $\mathbf{a}_P$.

*** 3.83** Demuestre que para un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento plano, en tanto que ω y α no sean *ambas* nulas, habrá un punto en con aceleración cero. *Sugerencia*: Sea P un punto de referencia con aceleración $a_{Px}\hat{\mathbf{i}} + a_{Py}\hat{\mathbf{j}}$. Vea si puede encontrar un vector $\mathbf{r}_{PT} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$, de P a un punto T de aceleración cero. O sea, resuelva

$$\mathbf{a}_T = \mathbf{0} = \mathbf{a}_P + \alpha\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PT} - \omega^2\mathbf{r}_{PT}$$

para evaluar x y y.

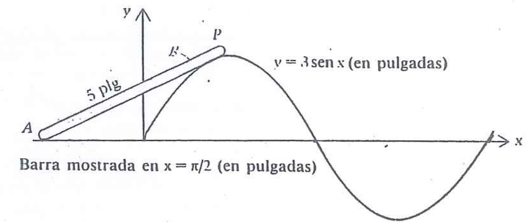


Figura P3.82

3.6 Rodamiento

Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ dos cuerpos rígidos en movimiento. Decimos que existe *rodamiento* entre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ si durante su movimiento:

1. Una sucesión continua de puntos sobre la superficie de $\mathcal{B}_1$ entra en contacto biunívoco (uno a uno) con una sucesión continua de puntos sobre la superficie de $\mathcal{B}_2$.
2. En todo instante durante el intervalo del movimiento, los puntos en contacto tienen el mismo vector velocidad.

Nótese que de acuerdo con esta definición no puede haber resbalamiento o deslizamiento entre las superficies de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ para que exista rodamiento. Muchos autores, sin embargo, usan la frase "rodamiento sin deslizamiento" para describir el movimiento definido aquí. Tal contexto, "rodamiento y deslizamiento" significaría rotación sin que los puntos de contacto tuviesen velocidades iguales; en nuestro contexto, rodamiento *implica* que no hay deslizamiento, de modo que diremos rotación y deslizamiento en los casos de velocidades desiguales en los puntos de contacto.

En esta seccion consideraremos tres clases de problemas que implican contacto por rodamiento:

1. Rodamiento de una rueda sobre una línea recta fija.
2. Rodamiento de una rueda sobre una curva plana fija.
3. Movimiento de engranes conectados.

Rodamiento sobre una línea recta fija

Si la rueda ($\mathcal{B}_1$) mostrada en la Fig. 3.15 está rodando sobre el terreno ($\mathcal{B}_2$, el marco de referencia en este caso), entonces las sucesiones continuas (sombreadas) de puntos de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ están en contacto, un par de puntos a la vez. Puesto que los puntos de $\mathcal{B}_2$ están todos en reposo, cada punto P_1 en el borde de $\mathcal{B}_1$ entra instantáneamente en reposo al ponerse en contacto con un punto P_2 de $\mathcal{B}_2$ (y es afianzado por un instante por el terreno). En este caso, las velocidades de P_1 y P_2 son iguales a cero, aunque en general no necesitan anularse para que haya rodamiento; todo lo que se requiere es que $\mathbf{v}_{P_1} = \mathbf{v}_{P_2}$.*

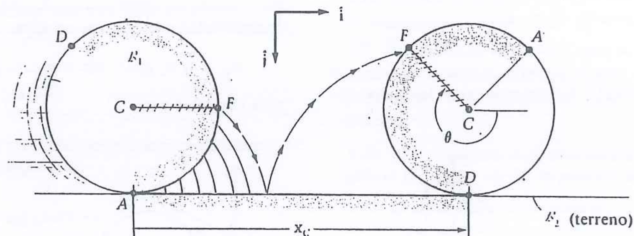


Figura 3.15 Rueda en rodamiento que ilustra la secesión de puntos de contacto.

Usando la Ec. (3.8) y notando que el centro C se mueve sólo horizontalmente y que el punto de contacto es siempre el centro instantáneo de $\mathcal{B}_1$,

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{①} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{①C} \tag{3.20}$$

$$\dot{x}_C\hat{\mathbf{i}} = 0 + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times (-r\hat{\mathbf{j}}) \tag{3.21}$$

$$\dot{x}_C\hat{\mathbf{i}} = r\dot{\theta}\hat{\mathbf{i}} \tag{3.22}$$

Para la rueda en rodamiento por consiguiente, la velocidad de su centro C y la velocidad angular del cuerpo están relacionadas simplemente por

$$\dot{x}_C = r\dot{\theta} \quad \text{o bien} \quad r\omega \tag{3.23}$$

Pregunta 3.13 ¿Qué forma tendría esta expresión si θ se escogiese de modo que creciera con una rotación antihoraria del cuerpo?

La relación entre el desplazamiento de C y la rotación de $\mathcal{B}_1$ se obtiene integrando la Ec. (3.23):

$$x_C = r\theta + C_1 \tag{3.24}$$

en donde la constante de integración es cero si escogemos $X_c = 0$ cuando $\theta = 0$.

*Si $\mathcal{B}_2$ es la plataforma de un camión, el cual a su vez está en movimiento con respecto a un marco de referencia $\mathcal{B}_3$ en el suelo, entonces $\mathbf{v}_{P1} = \mathbf{v}_{P2} \neq 0$, pero $\mathcal{B}_1$ aún rueda sobre $\mathcal{B}_2$.

Otra manera de enfocar el rodamiento es comenzar con un desplazamiento pequeño Δx_c mientras el punto ① en la base se afianza en el terreno. Si el ángulo de rotación producido es $\Delta\theta$, entonces

$$\Delta x_C = r\,\Delta\theta$$

si imaginamos al cuerpo girando alrededor de su centro instantáneo. Dividiendo entre un pequeño incremento de tiempo Δt y tomando límites, obtenemos

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x_C}{\Delta t}\right) = \dot{x}_C = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{r\,\Delta\theta}{\Delta t}\right) = r\dot{\theta} = r\omega$$

como se expresó igualmente en la Ec. (3.23).

Consideremos ahora las aceleraciones. De la Ec. (3.22):

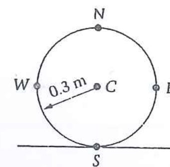
$$\mathbf{a}_C = \dot{\mathbf{v}}_C = \ddot{x}_C\hat{\mathbf{i}} = r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{i}} = r\alpha\hat{\mathbf{i}} \tag{3.25}$$

y el punto central C se acelera paralelamente al plano, ya que tiene movimiento rectilíneo (único así entre todos los puntos de la rueda). Calculemos ahora la aceleración del centro instantáneo ① de la rueda. Usando la Ec. (3.19) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{①} &= \mathbf{a}_C + \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{C①} - \dot{\theta}^2\mathbf{r}_{C①} \\ &= r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times r\hat{\mathbf{j}} - \dot{\theta}^2 r\hat{\mathbf{j}} \\ &= -r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{j}} \quad \text{o bien} \quad -r\omega^2\hat{\mathbf{j}} \quad \text{o bien} \quad r\omega^2\uparrow \end{aligned} \tag{3.26}$$

Así, el punto de contacto de una rueda con rodamiento sobre un plano fijo tiene una aceleración hacia su centro con magnitud $r\omega^2$. Vemos de nuevo que un punto con velocidad cero no tiene necesariamente aceleración nula, aunque si será así cuando se encuentra articulado al marco de referencia. El punto ① en el ejemplo está en reposo instantáneamente pero tiene aceleración, que es por lo que su velocidad deja de ser cero tan pronto como se mueve y un nuevo ① toma su lugar en el rodamiento. Presentamos ahora varios ejemplos,* cada uno de los cuales trata con un objeto redondo que rueda sobre una superficie plana.

Ejemplo 3.12



En un instante dado el cilindro en rodamiento del diagrama tiene $\omega = 2$ ↻ rad/s y $\alpha = 1.5$ ↺ rad/s². Determinar la velocidad y aceleración de los puntos N y E.

Solución

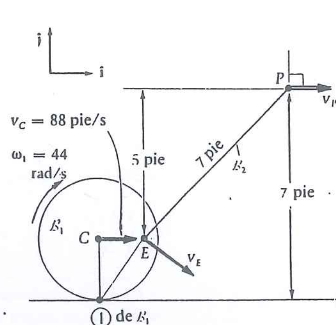
Relacionamos las velocidades y aceleraciones de N y E con las del punto C. Calculadas éstas se tiene, debido al rodamiento,

$$\mathbf{v}_C = \dot{x}_C\hat{\mathbf{i}} = \omega \times \mathbf{r}_{SC} = -2\hat{\mathbf{k}} \times 0.3\hat{\mathbf{j}} = 0.3(2)\hat{\mathbf{i}} = 0.6\hat{\mathbf{i}}\ \text{m/s}$$

*Los ejemplos de esta sección hacen uso frecuente de las Ecs. (3.8), (3.13) y (3.19) con la característica adicional de que en cada problema aparece un cuerpo rodante.

y

$$\mathbf{a}_C = \ddot{x}_C\hat{\imath} = \mathbf{a}_S + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{SC} - \omega^2\mathbf{r}_{SC}$$
$$= 0.3(2)^2\hat{\jmath} + \alpha\hat{k} \times \mathbf{r}_{SC} - (2)^2 0.3\hat{\jmath}$$
$$= \alpha\hat{k} \times \mathbf{r}_{SC}$$
$$= 1.5\hat{k} \times 0.3\hat{\jmath}$$
$$= -0.45\hat{\imath}\ \mathrm{m/s^2}$$



Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_N = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CN}$$
$$= 0.6\hat{\imath} + (-2\hat{k}) \times 0.3\hat{\jmath}$$
$$= 1.2\hat{\imath}\ \mathrm{m/s}$$

Nótese la concordancia de este resultado con

$$\mathbf{v}_N = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{①N}$$
$$= (-2\hat{k}) \times 0.6\hat{\jmath}$$
$$= 1.2\hat{\imath}\ \mathrm{m/s}$$

Continuando obtenemos

$$\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{CN} - \omega^2\mathbf{r}_{CN}$$
$$= -0.45\hat{\imath} + 1.5\hat{k} \times 0.3\hat{\jmath} - 2^2(0.3\hat{\jmath})$$
$$= -0.90\hat{\imath} - 1.2\hat{\jmath}\ \mathrm{m/s^2}$$

Para el punto E:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CE}$$
$$= 0.6\hat{\imath} + (-2\hat{k}) \times 0.3\hat{\imath}$$
$$= 0.6\hat{\imath} - 0.6\hat{\jmath}\ \mathrm{m/s}$$

y

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{CE} - \omega^2\mathbf{r}_{CE}$$
$$= -0.45\hat{\imath} + 1.5\hat{k} \times 0.3\hat{\imath} - 2^2(0.3\hat{\imath})$$
$$= -1.65\hat{\imath} + 0.45\hat{\jmath}\ \mathrm{m/s^2}$$

El lector podría obtener los resultados para $\mathbf{a}_N$ y $\mathbf{a}_E$ relacionándolos con $\mathbf{a}_{①}$ que como hemos visto es $r\omega^2\uparrow$, y *no* cero.

Ejemplo 3.13

En el Ejemplo 3.8 hallar la aceleración del pistón cuando $\theta = 90°$.

Solución

En el Caso (b) del Ejemplo 3.8 encontramos $\omega_1 = 44.0$ ↻ rad/s, $\mathbf{v}_E = 88.0\hat{\imath} + 66.0\hat{\jmath}$ pie/s, $\omega_2 = 13.5$ ↺ rad/s y $\mathbf{v}_P = 20.{:}\hat{\imath}$ pie/s.

Sobre el cuerpo B_1, la velocidad de C es constante $(88\hat{\imath})$, por lo que $a_C = 0$. También $a_C = r\alpha_1$, por lo que $\alpha_1 = 0$. Por consiguiente,

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_C + \alpha_1\hat{k} \times \mathbf{r}_{CE} - \omega_1^2\mathbf{r}_{CE}$$
$$= 0 + 0 - 44.0^2(1.5\hat{\imath})$$
$$= -2900\hat{\imath}\ \mathrm{pie/s^2}$$

Sobre B_2 relacionamos ahora $\mathbf{a}_E$ con la buscada $\mathbf{a}_P$:

$$\underbrace{\mathbf{a}_P = a_P\hat{\imath}}_{\text{Restricción cinemática}} = \mathbf{a}_E + \alpha_2\hat{k} \times \mathbf{r}_{EP} - \omega_2^2\mathbf{r}_{EP}$$

$$= -2900\hat{\imath} + \underbrace{\alpha_2\hat{k} \times (4.90\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath})}_{\text{Nótese que éste es un prod. vect.,}} - \underbrace{13.5^2(4.90\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath})}_{\text{... pero ¡éste no!}}$$

$$a_P\hat{\imath} = (-2900 - 5.00\alpha_2 - 893)\hat{\imath} + (4.90\alpha_2 - 911)\hat{\jmath}$$

Igualando los coeficientes de $\hat{\jmath}$ eliminamos la incógnita a_P.

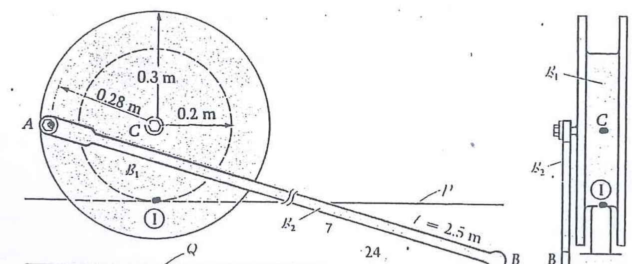
$$0 = 4.90\alpha_2 - 911 \Rightarrow \alpha_2 = 186\ \mathrm{rad/sec^2} \text{ o } \alpha_2 = 186 \circlearrowleft \mathrm{rad/s^2}$$

Luego los coeficientes de $\hat{\imath}$ dan la respuesta buscada:

$$a_P = -4720\ \mathrm{pie/s^2} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{a}_P = 4720 \leftarrow \mathrm{pie/s^2}.$$

Ejemplo 3.14

La rueda B_1 del diagrama anexo rueda hacia la derecha sobre el plano P. En el instante mostrado B_1 tiene una velocidad angular $\omega_1 = 1.2$ ↻ rad/s. La barra B_2 está articulada a B_1 en A, y el otro extremo B de B_2 resbala sobre un plano q paralelo a P. Determine la velocidad de B y la velocidad angular de B_2 en el instante dado.



Solución

Usaremos la Ec. (3.8) con los resultados obtenidos al tratar el tema del rodamiento. Buscamos primero la velocidad de A; cuando tengamos $\mathbf{v}_A$ la relacionaremos con $\mathbf{v}_B$ sobre la barra $\mathcal{B}_2$. Podemos encontrar $\mathbf{v}_A$ de dos modos, ambos sobre la rueda $\mathcal{B}_1$:

$$\mathbf{v}_A = \cancelto{0}{\mathbf{v}_{\textcircled{I}}} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{\textcircled{I}A}$$
$$= (-1.2\hat{\mathbf{k}}) \times (-0.28\hat{\mathbf{i}} + 0.2\hat{\mathbf{j}})$$
$$= 0.24\hat{\mathbf{i}} + 0.336\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{CA}$$
$$= 0.2(1.2)\hat{\mathbf{i}} + (-1.2\hat{\mathbf{k}}) \times (-0.28\mathbf{i})$$
$$= 0.24\hat{\mathbf{i}} + 0.336\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}$$

$\hat{\mathbf{j}}$ $\hat{\mathbf{i}}$

Notamos que cuando el punto A está debajo de $\textcircled{I}$, su velocidad es hacia la izquierda, o sea que va hacia atrás.

Sobre $\mathcal{B}_2$:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{AB}$$

El punto B está obligado a moverse horizontalmente, por lo que

$$v_B\hat{\mathbf{i}} = 0.24\hat{\mathbf{i}} + 0.336\hat{\mathbf{j}} + \omega_2\hat{\mathbf{k}} \times (2.4\hat{\mathbf{i}} - 0.7\hat{\mathbf{j}})$$

o bien

$$v_B\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}}(0.24 + 0.7\omega_2) + \hat{\mathbf{j}}(0.336 + 2.4\omega_2)$$

Coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$: $0 = 0.336 + 2.4\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = -0.140$

de modo que

$$\boldsymbol{\omega}_2 = -0.140\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s} \quad \text{o bien} \quad 0.140 \circlearrowright \text{ rad/s}$$

Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$: $v_B = 0.24 + 0.7(-0.140) = 0.142$

de manera que

$$\mathbf{v}_B = 0.142\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}$$

Se sugiere al lector que trate de localizar mentalmente el punto $\textcircled{I}$ para $\mathcal{B}_2$ y de ahí deducir que las direcciones de $\boldsymbol{\omega}_2$ y $\mathbf{v}_B$ son correctas.

Ejemplo 3.15

En el ejemplo anterior, en el mismo instante, $\alpha_1 = 0.8 \circlearrowright$ rad/s². Hallar la aceleración del punto B y la aceleración angular de la barra $\mathcal{B}_2$.

Solución

Igual que hicimos con la velocidad de A, podemos relacionar $\mathbf{a}_A$ con la aceleración de $\textcircled{I}$ o con la de C:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{\textcircled{I}} + \boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{r}_{\textcircled{I}A} - \omega_1^2\mathbf{r}_{\textcircled{I}A}$$

Los términos son

$$\mathbf{a}_{\textcircled{I}} = r\omega_1^2\uparrow = 0.2(1.2^2)\hat{\mathbf{j}}$$
$$= 0.288\hat{\mathbf{j}} \quad \text{(note que es 0)}$$
$$\boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{r}_{\textcircled{I}A} = -0.8\hat{\mathbf{k}} \times (-0.28\hat{\mathbf{i}} + 0.2\hat{\mathbf{j}})$$
$$= 0.16\hat{\mathbf{i}} + 0.224\hat{\mathbf{j}}$$
$$-\omega_1^2\mathbf{r}_{\textcircled{I}A} = -1.2^2(-0.28\hat{\mathbf{i}} + 0.2\mathbf{j})$$
$$= 0.403\hat{\mathbf{i}} - 0.288\hat{\mathbf{j}}$$

Sumando términos:

$$\mathbf{a}_A = 0.563\hat{\mathbf{i}} + 0.224\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{r}_{CA} - \omega_1^2\mathbf{r}_{CA}$$

Los términos son

$$\mathbf{a}_C = r\alpha_1\hat{\mathbf{i}} = 0.2(0.8)\hat{\mathbf{i}}$$
$$= 0.16\hat{\mathbf{i}}$$
$$\boldsymbol{\alpha}_1 \times \mathbf{r}_{CA} = (-0.8\hat{\mathbf{k}}) \times (-0.28\hat{\mathbf{i}})$$
$$= 0.224\hat{\mathbf{j}}$$
$$-\omega_1^2\mathbf{r}_{CA} = -1.2^2(-0.28\hat{\mathbf{i}})$$
$$= 0.403\hat{\mathbf{i}}$$

Sumando términos:

$$\mathbf{a}_A = 0.563\hat{\mathbf{i}} + 0.224\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}^2$$

Ahora relacionamos $\mathbf{a}_A$ con $\mathbf{a}_B$ sobre la barra; nótese que la aceleración de B está obligada por el plano a ser horizontal:

$$\mathbf{a}_B = a_B\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}_2 \times \mathbf{r}_{AB} - \omega_2^2\mathbf{r}_{AB}$$
$$= 0.563\hat{\mathbf{i}} + 0.224\hat{\mathbf{j}} + \alpha_2\hat{\mathbf{k}} \times (2.4\hat{\mathbf{i}} - 0.7\hat{\mathbf{j}})$$
$$-(-0.140)^2(2.4\hat{\mathbf{i}} - 0.7\hat{\mathbf{j}})$$

Coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$:

$$0 = 0.224 + 2.4\alpha_2 + 0.0137 \Rightarrow \alpha_2 = -0.0991 \text{ rad/s}^2$$

de modo que

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = -0.0991\,\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2$$

Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$:

$$a_B = 0.563 + 0.7(-0.0991) - 0.0470 = 0.447$$

por lo que

$$\mathbf{a}_B = 0.447\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}^2$$

Rodamiento de una rueda ($\mathcal{B}_1$) sobre una curva plana fija ($\mathcal{B}_2$)

En la segunda clase de problemas de rodamiento por considerar en esta sección, la superficie de contacto es curva. Sean $\hat{\mathbf{e}}_t$ y $\hat{\mathbf{e}}_n$ los vectores unitarios tangente y normal principales para el punto central C de la rueda (Fig. 3.16). Entonces, puesto que nuevamente estamos definiendo un movimiento tal que el punto de contacto tenga velocidad nula, se obtiene de la Ec. (3.8):

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{\textcircled{I}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{\textcircled{I}C}$$
$$= 0 + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times r\hat{\mathbf{e}}_n$$
$$= r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t \tag{3.27}$$

que da la velocidad de C. Derivando la Ec. (3.27) obtenemos

$$\mathbf{a}_C = r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t + r\dot{\theta}\dot{\hat{\mathbf{e}}}_t$$
$$= r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t + r\dot{\theta}\frac{\dot{s}}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n \tag{3.28}$$

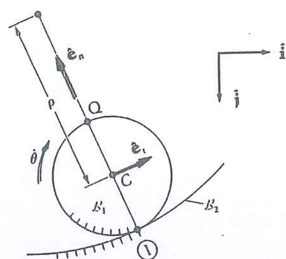


Fig. 3.16 Rueda en rodamiento sobre una vía curva cóncava hacia arriba.

en donde hemos usado las Ecs. (1.42) y (1.45); ρ es el radio de curvatura instantáneo de la trayectoria en que se mueve C. Si dicha trayectoria es un círculo, como es a menudo el caso, entonces ρ = constante = radio del círculo.

Usando $\dot{s} = v_c = r\dot{\theta}$ en la Ec. (3.28),

$$\mathbf{a}_C = r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{(r\dot{\theta})^2}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n \tag{3.29}$$

La aceleración de ① es interesante y se deduce de la Ec. (3.19):

$$\mathbf{a}_{①} = \mathbf{a}_C + \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{C①} - \dot{\theta}^2\mathbf{r}_{C①} \tag{3.30}$$

o bien

$$\mathbf{a}_{①} = r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{(r\dot{\theta})^2}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n - r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t + r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_n = \left(1 + \frac{r}{\rho}\right)r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_n \tag{3.31}$$

Comparando las aceleraciones de los puntos de contacto ① de las Figs. 3.15 y 3.16, observamos de los resultados (Ecs. 3.26 y 3.31) que el punto en contacto con la vía curva tiene una mayor aceleración que el que está en contacto con la vía plana, debido al término r/ρ de la Ec. (3.31). Este término representa la componente normal de la aceleración de C que fue cero sobre la trayectoria plana.

Es interesante también analizar la aceleración del punto Q en la parte superior de la rueda en la Fig. 3.16:

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_C + \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{CQ} - \dot{\theta}^2\mathbf{r}_{CQ}$$

$$= r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{(r\dot{\theta})^2}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n + r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t - r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_n$$

$$= 2r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t - r\dot{\theta}^2\left(1 - \frac{r}{\rho}\right)\hat{\mathbf{e}}_n \tag{3.32}$$

Nótese que es posible para la componente $\hat{\mathbf{e}}_n$ (normal) de $\mathbf{a}_Q$ estar dirigida hacia o alejándose de C (o bien ser cero) dependiendo de que se tenga $r > \rho$ o bien $r < \rho$ (o $r = \rho$), respectivamente (Fig. 3.17).

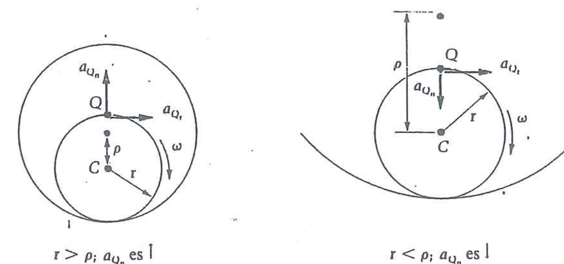


Figura 3.17

Si la trayectoria es cóncava *hacia abajo* como en la Fig. 3.18, pueden obtenerse resultados similares para las aceleraciones de C, ① y Q. De la Ec. (3.29), que aún es válida:

$$\mathbf{a}_C = r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{(r\dot{\theta})^2}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n \tag{3.33}$$

Después de relacionar $\mathbf{a}_{①}$ y $\mathbf{a}_c$ sobre $\mathcal{B}_1$, obtenemos:

$$\mathbf{a}_{①} = \left(-1 + \frac{r}{\rho}\right)r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_n \tag{3.34}$$

Relacionando Q con C o con ① se obtiene

$$\mathbf{a}_Q = 2r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t + \left(1 + \frac{r}{\rho}\right)r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_n \tag{3.35}$$

Nótese que esta vez el radio r no puede exceder a ρ, por lo que $\mathbf{a}_{①}$ está siempre dirigida hacia afuera; la componente normal de la aceleración de Q en este caso está siempre dirigida hacia adentro.

El lector puede encontrar de utilidad la siguiente forma que no depende de ninguna elección particular de sistema coordenado:

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{①C}$$

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{①C} + \text{(parte normal)}$$

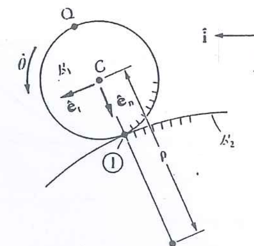
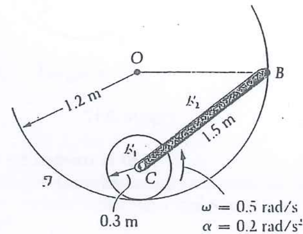


Figura 3.18 Rueda en rodamiento sobre una vía curva cóncava hacia abajo.

Si conocemos α o la componente tangencial de $\mathbf{a}_c$ por ejemplo, podemos obtener la otra sin preocuparnos por expresar la componente normal de $\mathbf{a}_c$. Presentamos ahora varios ejemplos de un cuerpo rodando sobre una superficie curva.

Ejemplo 3.16

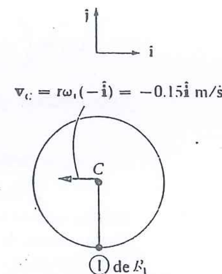
El cilindro $\mathcal{B}_1$ mostrado en el diagrama se encuentra rodando sobre la senda fija circular con la velocidad angular y aceleración indicada cuando $\mathcal{B}_1$ está en el fondo de la curva. La barra $\mathcal{B}_2$ está articulada al centro C de $\mathcal{B}_1$ y su otro extremo, B, resbala sobre la trayectoria o vía $\mathcal{I}$. Encuentre la velocidad y la aceleración de B.



Solución

Como hemos visto en la Sección 3.5, problemas como éste tienen dos partes. La "parte de velocidad" debe resolverse antes que la "parte de aceleración" porque las velocidades lineales así como las velocidades angulares se necesitan en las expresiones para la aceleración. Usaremos los centros instantáneos para obtener $\mathbf{v}_B$; los pasos son:

1. El punto de contacto de $\mathcal{B}_1$ es su punto Ⓘ, puesto que el cuerpo está rodando.
2. $\mathbf{v}_C$ se determina a partir de $r_{ⒾC}\,\omega_1$.
3. La velocidad de B es vertical (tangente a la trayectoria del punto).
4. Ⓘ de $\mathcal{B}_2$ está en la intersección de las normales a $\mathbf{v}_C$ y a $\mathbf{v}_B$ o sea en el punto O (ver la figura).
5. Entonces $\omega_2 = v_C/d_1 = 0.15/0.9 = 0.167$ o bien $\omega_2 = 0.167 \circlearrowright$ rad/s
6. Finalmente, $v_B = d_2\,\omega_2 = 1.2(0.167) = 0.200$ o $\mathbf{v}_B = 0.200 \downarrow$ m/s

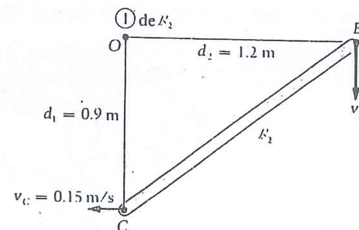


A continuación, para encontrar $\mathbf{a}_B$ relacionamos a esta con la aceleración de C que es según la Ec. (3.29):

$$\mathbf{a}_C = r\alpha(-\hat{\mathbf{i}}) + \frac{(r\omega)^2}{\rho}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= 0.3(0.2)(-\hat{\mathbf{i}}) + \frac{(0.3 \times 0.5)^2}{0.9}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= -0.06\hat{\mathbf{i}} + 0.0250\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$$



Relacionado $\mathbf{a}_C$ con $\mathbf{a}_B$ obtenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \alpha_2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{CB} - \omega_2^2\mathbf{r}_{CB}$$

$$\ddot{s}_B(-\hat{\mathbf{j}}) + \frac{\dot{s}_B^2}{\rho_B}(-\hat{\mathbf{i}}) = -0.06\hat{\mathbf{i}} + 0.0250\hat{\mathbf{j}} + \alpha_2\hat{\mathbf{k}} \times (1.2\hat{\mathbf{i}} + 0.9\hat{\mathbf{j}})$$

$$- (0.167)^2(1.2\hat{\mathbf{i}} + 0.9\hat{\mathbf{j}})$$

Al introducir $\mathbf{a}_B$ hemos tomado en cuenta que para B se tiene $\hat{\mathbf{e}}_t = -\hat{\mathbf{j}}$ (vector de dirección de $\mathbf{v}_B$) y $\hat{\mathbf{e}}_n = -\hat{\mathbf{i}}$ (siempre dirigido hacia el centro de curvatura de la trayectoria). Haciendo la sustitución $\dot{s}_B = |\mathbf{v}_B| = 0.2$ m/s y $\rho_B = 1.2$ m, disponemos de dos ecuaciones escalares en las dos incógnitas $\ddot{s}_B$ y α_2:

Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$:

$$-0.0333 = -0.06 - 0.9\alpha_2 - 0.0333$$

$$\alpha_2 = -0.0667\ \text{rad/s}^2$$

coeficientes $\hat{\mathbf{j}}$

$$-\ddot{s}_B = 0.0250 + 1.2\alpha_2 - 0.0250 = -0.0800$$

$$\ddot{s}_B = 0.0800\ \text{m/s}^2$$

Entonces

$$\mathbf{a}_B = -0.0333\hat{\mathbf{i}} - 0.0800\hat{\mathbf{j}}\ \text{m/s}^2$$

Queremos señalar un punto muy importante del ejemplo anterior. Se habrá usted notado que los valores de α_2 y $\ddot{s}_B$ podrían haberse obtenido más rápidamente con la expresión

$$|\alpha_2| = \frac{a_C}{r_{OC}} = \frac{0.06}{0.9} = 0.0667\ \text{rad/s}^2$$

y

$$\ddot{s}_B = r_{OB}|\alpha_2| = 1.2(0.0667) = 0.08\ \text{m/s}^2$$

¡Este atajo es muy peligroso porque no siempre es válido! Es esencial entender cuando y por qué este procedimiento funciona. (¡No es porque O sea el centro instantáneo de velocidad nula de $\mathcal{B}_2$!) Como contraejemplo, consideremos los resultados de los Ejemplos 3.3, 3.6 y 3.10: Si dividiésemos $\mathbf{a}_B$ entre $\mathbf{r}_{ⒾB}$ (Fig. 3.19), obtendríamos equivocadamente 26.6 $\circlearrowright$ rad/s². Pero α_2 es igual a 31.6 $\circlearrowleft$ rad/s². La respuessta a la pregunta de cuándo es legítimo el procedimiento está dada por la interrogante que sigue.

Pregunta 3.14 ¿Cuándo podemos usar $r_{ⒾB}\,\alpha$ para obtener la componente de aceleración correcta de B normal a la recta Ⓘ B?

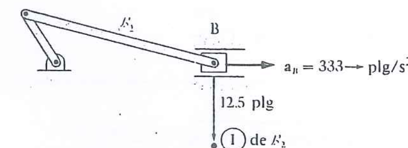
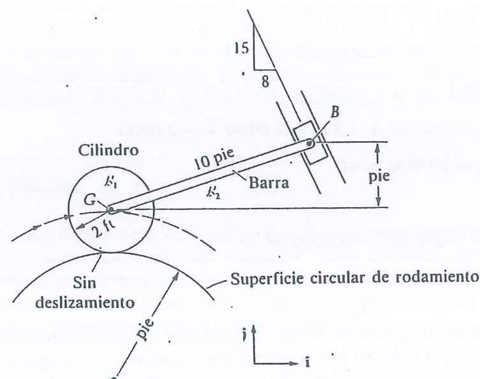


Figura 3.19

Ejemplo 3.17

La magnitud de la velocidad de G en el diagrama es $v_G = t^2$ pie/s, y G se mueve sobre el círculo de 8 pie de radio en dirección horaria. La posición mostrada es en $t = 2$ s. Calcular la aceleración de B en este instante.



Solución

Relacionamos $\mathbf{a}_B$ con $\mathbf{a}_G$ sobre la barra $\mathcal{B}_2$:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \alpha_2\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{GB} - \omega_2^2\mathbf{r}_{GB} \qquad (1)$$

Primero determinamos $\mathbf{a}_G$. Puesto que $v_G = \dot{s}_G = t^2$ se tendrá $\ddot{s}_G = 2t = 2(2) = 4$ pie/s². Por ello

$$\mathbf{a}_G = \ddot{s}_G\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{\dot{s}_G^2}{\rho_G}\hat{\mathbf{e}}_n = 2t\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{t^4}{8}\hat{\mathbf{e}}_n$$

$$= 4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} \text{ pie/s}^2 \qquad (\text{en } t = 2 \text{ s})$$

De la Ec. (1):

$$\mathbf{a}_B = a_B\left(\frac{8\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}}{17}\right) = \underbrace{\mathbf{a}_G}_{(4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}})} + \alpha_2\hat{\mathbf{k}} \times \underbrace{\mathbf{r}_{GB}}_{(\sqrt{91}\,\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})} - \omega_2^2\mathbf{r}_{GB}$$

en donde la aceleración de B es una magnitud desconocida con una dirección conocida, dada ésta por el vector unitario $(8\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}})/17$ dirigido hacia abajo en la guía.

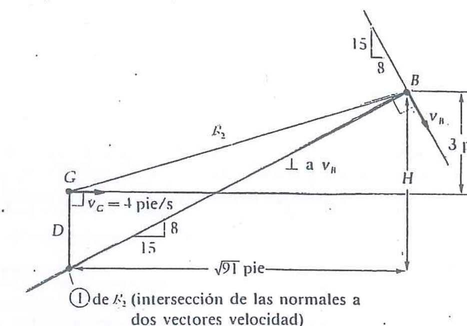
Pregunta 3.15 Si la dirección de $\mathbf{a}_B$ resulta ser hacia arriba en la guía, ¿será válida la solución?

Tenemos dos ecuaciones (de coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$) con tres incógnitas a_B, α_2 y ω_2, pero la rapidez angular ω_2 puede encontrarse a partir del centro instantáneo de $\mathcal{B}_2$.

De las relaciones geométricas del diagrama auxiliar se obtiene

$$\frac{\sqrt{91}}{H} = \frac{15}{8} \Rightarrow H = 5.09 \text{ pie}$$

$$D = H - 3 = 2.09 \text{ pie}$$



Entonces

$$\omega_2 = \frac{v_G}{D} = \frac{4}{2.09} = 1.91 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 1.91 \circlearrowright \text{ rad/s}$$

Nótese que antes de localizar Ⓘ de $\mathcal{B}_2$, no sabemos si $\mathbf{v}_B$ es hacia arriba o hacia abajo en la guía; sin embargo, la *normal* a $\mathbf{v}_B$ es la misma línea en ambos casos. Una vez determinado Ⓘ, $\mathbf{v}_G$ hacia la derecha da una ω_2 horaria y entonces sabemos que $\mathbf{v}_B$ es hacia *abajo*. Sustituyendo obtenemos

$$a_B\left(\frac{8\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}}}{17}\right) = 4\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{91}\,\alpha_2\hat{\mathbf{j}} - 3\alpha_2\hat{\mathbf{i}} - 1.91^2(\sqrt{91}\,\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$$

$$\text{Coeficientes de } \hat{\mathbf{i}}: \quad \frac{8}{17}a_B = 4 - 3\alpha_2 - 1.91^2\sqrt{91}$$

$$\text{Coeficientes de } \hat{\mathbf{j}}: \quad \frac{-15}{17}a_B = -2 + \sqrt{91}\,\alpha_2 - 1.91^2(3)$$

Eliminando α_2 se obtiene $a_B = -181$, por lo que

$$\mathbf{a}_B = 181 \text{ (dirección 15/8)} \quad \text{o} \quad (-85.2\hat{\mathbf{i}} + 160\hat{\mathbf{j}}) \text{ pie/s}^2$$

El ejemplo final en esta parte de la Sección 3.6 será muy útil posteriormente en situaciones como la mostrada en la Fig. 3.20. Supongamos que se necesita conocer la localización

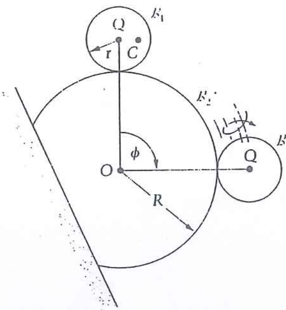
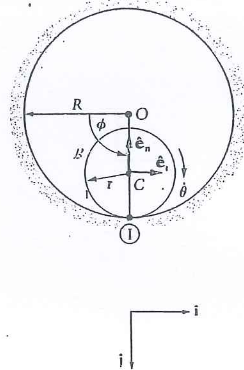


Figura 3.20

del punto C del cilindro $\mathcal{B}_1$ después de que $\mathcal{B}_1$ ha rodado sobre $\mathcal{B}_2$ a la posición más baja*. El problema es encontrar el angulo θ girado por $\mathcal{B}_1$ para una rotación dada ϕ de la línea OQ. El procedimiento a seguir para resolver este problema se ilustra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.18

Encuentre la relación entre el ángulo .(que define la posición de la recta OC) y el ángulo de rotación 0 del cilindro rodante



Solución

Tratando C como un punto cuya trayectoria es un círculo conocido, obtenemos

$$\mathbf{v}_C = \dot{s}\hat{\mathbf{e}}_t = (R - r)\dot{\phi}\hat{\mathbf{i}}$$

Podemos también tratar a C como un punto sobre el cilindro con centro instantáneo en Ⓘ:

$$\mathbf{v}_C = \omega\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{ⒾC} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times (-r\hat{\mathbf{j}}) = r\dot{\theta}\hat{\mathbf{i}}$$

Igualando las dos expresiones para $\mathbf{v}_c$, tenemos

$$(R - r)\dot{\phi} = r\dot{\theta}$$

Integrando y haciendo $\theta = 0$ cuando $\phi = 0$, obtenemos

$$(R - r)\phi = r\theta + \overset{0}{\cancel{C_1}}$$

o bien

$$\theta = \left(\frac{R - r}{r}\right)\phi \qquad (3.36)$$

*Esta necesidad surgirá, por ejemplo, en problemas cinéticos en los cuales se busca el trabajo efectuado por la gravedad sobre $\mathcal{B}_1$ si su centro de masa se encuentra desplazado respecto a su centro geométrico.

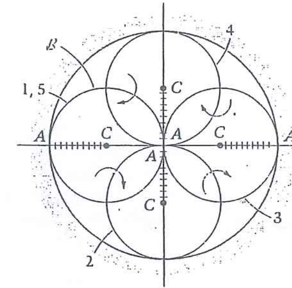


Figura 3.21

En el Ejemplo 3.18, si hacemos $R = 2r$, vemos que $\theta \equiv \phi$. (Fig. 3.21). Aunque las circunferencias del cilindro y la vía son $2\ \pi r$ y $4\ \pi r\ (= 2\ \pi R)$,* la curvatura obliga a las velocidades angulares de la línea OC y del cilindro a ser las mismas. Si la vía exterior fuese *recta* y de longitud $4\ \pi r$, el cilindro efectuaría dos revoluciones en el espacio en vez de sólo una al recorrerla.

Se ve que la recta AC de $\mathcal{B}$ (y por consiguiente, $\mathcal{B}$ también) gira una vez cuando C completa su trayectoria circular para el caso $R = 2r$. Cuando $R > 2r$ entonces $\theta > \phi$. Tal caso se muestra en la Fig. 3.22. Si ahora $R = 7r$, la Ec. (3.36) da $\theta = 6\phi$ y $\mathcal{B}$ gira una vez en el espacio por cada 60° de giro de la línea OC.

Si la senda o trayectoria fuese convexa, para $R = 2r$ tendríamos:

$$\mathbf{v}_C = 3r\dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_t \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_C = r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t \Rightarrow 3\phi = \theta$$

y la rueda giraría en el espacio *tres veces* más y también tres veces más rápido que la recta OC (Fig. 3.23).

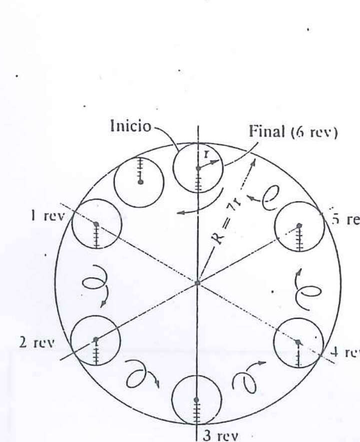


Figura 3.22

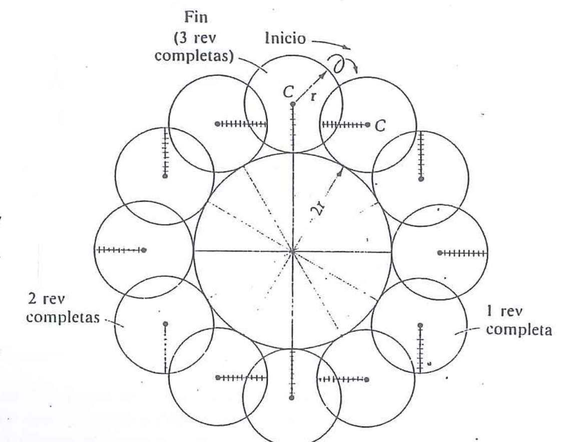


Figura 3.23

*Podría parecer entonces a primera vista, que el cilindro debe girar dos veces por cada revolución de OC.

Movimiento de engranes conectados

La clase final de problemas de rodamiento tiene que ver con los engranes o ruedas dentadas. Los engranes se usan para transmitir potencia. Sus dientes engranes se perfilan de modo que impartan velocidad constante al engrane impulsado cuando el engrane impulsor gira a velocidad angular constante.

Sin embargo, los engranes violan la condición de rodamiento; existe necesariamente algún resbalamiento, ya que los puntos de contacto no tienen velocidades iguales (excepto en $\theta = 0$), como puede verse en la Fig. 3.24; no obstante, los dientes se cortan de modo que podemos tratarlos correctamente para fines dinámicos como si fueran dos cilindros rodando uno sobre el otro en las circunferencias de base. Así, cuando los centros están articulados como en la Fig. 3.24, podemos usar la relación

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \tag{3.37}$$

en donde r_1 y r_2 son los radios de paso de los engranes $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, respectivamente. Podemos usar también la derivada de la Ec. 3.37 (ya que es válida para toda t):

$$r_1\alpha_1 = r_2\alpha_2 \tag{3.38}$$

Notemos que la relación de los radios es inversamente proporcional a la relación de las velocidades angulares (y directamente proporcional a la relación del número de dientes, ya que la forma y separación de estos deben concordar). Se considerarán ahora varios ejemplos. (El primero se refiere a una transmisión de cadena, que es una especie de engranaje.)

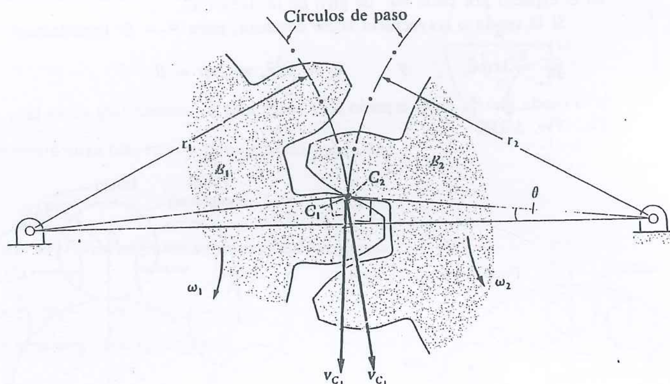


Figura 3.24 Dientes de engranes cilíndricos en contacto.

Ejemplo 3.19

Hallar la velocidad angular de la estrella (o rueda catarina delantera) (fija rígidamente a las manivelas de los pedales) de la bicicleta del diagrama, si ésta viaja a 10 mi/h. Hay 26 dientes en la estrella y 9 en la (maza (o rueda catarina trasera) (que está fija rígidamente a la rueda respectiva). Los diámetros de las ruedas de biciclo son de 26 plg.



Solución

Las velocidades de A y B (los dos extremos del tramo recto superior de la cadena) son iguales. (Como muestra el diagrama, A está justamente saliendo de la maza $\mathcal{B}_1$; B está a punto de entrar a la estrella $\mathcal{B}_2$.). Para probar esto notamos que el tramo AB en traslación de la cadena se comporta como si fuera rígido, de modo que si llamamos a este "cuerpo" $\mathcal{B}_3$,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_{AB}$$

Pero $\boldsymbol{\omega}_3 = \mathbf{0}$, por lo que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

A continuación relacionamos las velocidades iguales de A y B con los respectivos centros de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$:

$$\mathbf{v}_{C_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{C_1A} = \mathbf{v}_{C_2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C_2B}$$

Ahora, las velocidades de C_1 y C_2 son cada una igual a la velocidad de la bicicleta en su conjunto (la velocidad común de todos los puntos en traslación). Por consiguiente $\mathbf{v}_{C1}$ y $\mathbf{v}_{C2}$ se cancelan dejando

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{C_1A} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{C_2B}$$

Esto significa simplemente que (vea el diagrama):

$$r_1\omega_1 = r_2\omega_2$$

Como la velocidad de la bicicleta es de 10 mi/h, tenemos

$$v_{C_1} = \overset{13\text{ plg}}{\not{r}}\omega_1 = 10\text{ mph}\left(\frac{88\text{ pie/s}}{60\text{ mph}}\right)\frac{12\text{ plg}}{1\text{ pie}} = 176\ \text{plg/s}$$

o bien

$$\omega_1 = 13.5 \circlearrowright \text{rad/s}$$

Por tanto

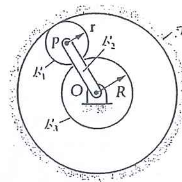
$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 = \frac{9}{26}(13.5)$$ (Los radios son proporcionales a los números de dientes).

$$= 4.67\text{ rad/s}$$

El ciclista debe hacer girar entonces los pedales a $4.67/2\pi = 0.732$ rev/s.

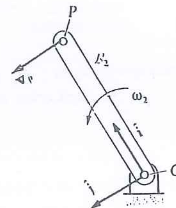
Ejemplo 3.20

El marco de referencia $\mathcal{I}$ es una corona de engrane fija con dientes interiores (no se muestran en el diagrama) que embonan con los del engrane planetario $\mathcal{B}_1$. Los dientes de $\mathcal{B}_1$ también embonan con los del engrane solar $\mathcal{B}_3$ que está articulado en el punto central $\mathcal{I}$ al marco $\mathcal{B}_1$. El brazo $\mathcal{B}_2$ tiene velocidad angular $\omega_2(t)$ antihoraria. Obtener la velocidad angular de $\mathcal{B}_3$ en términos de R, r y ω_2.



Solución

Se considera $\mathcal{I}$ como marco de referencia al cual se referirán todos los movimientos. Nos fijamos primero en el brazo $\mathcal{B}_2$, ya que conocemos su velocidad angular y la velocidad (lineal) de uno de sus puntos ($\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$). De acuerdo con el diagrama de $\mathcal{B}_2$ podemos escribir

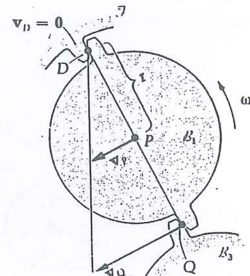


$$\mathbf{v}_P = \overset{\mathbf{0}}{\cancel{\mathbf{v}_O}} + \omega_2\hat{\mathbf{k}} \times (R + r)\hat{\mathbf{i}} \qquad (1)$$

$$= (R + r)\omega_2\hat{\mathbf{j}}$$

(Nótese que alineamos a $\hat{\mathbf{i}}$ paralelo a OP por conveniencia; no hay que dibujarlo siempre hacia la derecha).

Los puntos de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ que están articulados en P tienen la misma velocidad en todo momento. Además, los puntos de $\mathcal{I}$ y $\mathcal{B}_1$ en D (vea la figura anexa) están en contacto y cada uno tiene velocidad nula* ya que D está fijo en $\mathcal{I}$. Entonces



$$\mathbf{v}_P = \overset{\mathbf{0}}{\cancel{\mathbf{v}_D}} + \omega_1\hat{\mathbf{k}} \times (-r\hat{\mathbf{i}})$$

o bien

$$(R + r)\omega_2\hat{\mathbf{j}} = -r\omega_1\hat{\mathbf{j}}$$

Resolviendo para determinar ω_1 se obtiene

$$\omega_1 = \frac{-(R + r)\omega_2}{r} \quad \text{o} \quad \omega_1 = \frac{R + r}{r}\omega_2 \circlearrowright \qquad (2)$$

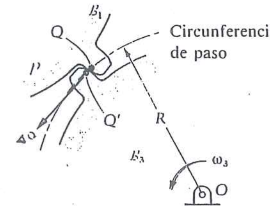
Podemos ahora obtener la velocidad lineal del punto Q de $\mathcal{B}_1$, que es el punto en contacto con el diente de $\mathcal{B}_3$:

$$\mathbf{v}_Q = \overset{\mathbf{0}}{\cancel{\mathbf{v}_D}} + \omega_1\hat{\mathbf{k}} \times (-2r\hat{\mathbf{i}})$$

Sustituyendo ω_1 en términos de ω_2 (Ec. 2) obtenemos

$$\mathbf{v}_Q = 2(R + r)\omega_2\hat{\mathbf{j}} \qquad (3)$$

*Como hemos señalado, los puntos de contacto de los dientes necesariamente resbalan entre sí. Los puntos usados en el análisis no son en realidad puntos de los dientes sino puntos imaginarios sobre las circunferencias de paso del engranaje; además, los radios dados en los ejemplos y problemas son los radios de esos círculos.



Nótese que Q tiene el doble de la velocidad de P ya que está al doble de la distancia que P del centro instantáneo D de $\mathcal{B}_1$.

Finalmente llegamos al cuerpo de interés $\mathcal{B}_3$ (vea el diagrama). Sabiendo que Q y Q' (los puntos en contacto en los dientes sobre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_3$ respectivamente) tienen iguales velocidades al moverse juntos tangencialmente a la circunferencia, obtenemos:

$$\mathbf{v}_{Q'} = \mathbf{v}_O + \omega_3\hat{\mathbf{k}} \times R\hat{\mathbf{i}}$$

$$2(R + r)\omega_2\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0} + R\omega_3\hat{\mathbf{j}}$$

Entonces la rapidez angular de $\mathcal{B}_3$ en $\mathcal{I}$ es

$$\omega_3 = \frac{2(R + r)\omega_2}{R} \qquad (4)$$

Y la velocidad angular de $\mathcal{B}_3$ en $\mathcal{I}$ es

$$\omega_3\hat{\mathbf{k}} = \frac{2(R + r)\omega_2}{R}\hat{\mathbf{k}}$$

Nótese en el ejemplo anterior que el punto de $\mathcal{B}_2$ que está pasando sobre el punto Q tiene una velocidad $R\,\omega_2$ que es, por supuesto, menor que la velocidad $\mathbf{v}_Q$ del diente en contacto en Q. Esta velocidad es $R\,\omega_3 = 2(R + r)\,\omega_2$ que es más del doble de $R\,\omega_2$.

Notemos también que puesto que las respuestas

$$\omega_1(t) = \frac{R + r}{r}\omega_2(t) \quad \text{y} \quad \omega_3(t) = \frac{2(R + r)}{R}\omega_2(t)$$

son funciones completamente generales del tiempo, las aceleraciones angulares se obtienen inmediatamente por derivación en que $\alpha_2 = \dot{\omega}_2$:

$$\alpha_1(t) = \frac{R + r}{r}\alpha_2(t) \quad \text{y} \quad \alpha_3(t) = \frac{2(R + r)}{R}\alpha_2(t)$$

En vez de derivar obtendremos en el siguiente ejemplo esos dos resultados de otra manera: por el uso repetido de la Ec. (3.19). El propósito es adquirir destreza en su manejo en problemas de engranes con cuerpos múltiples. El procedimiento del ejemplo siguiente debería haberse seguido en el ejemplo anterior si éste se hubiese resuelto mediante valores instantáneos en vez de haberlo hecho de modo general (con símbolos).

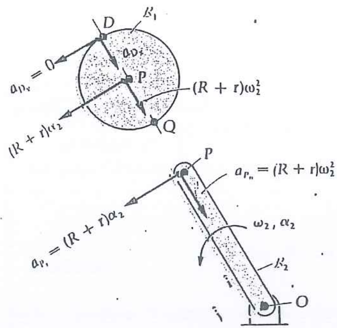
Ejemplo 3.21

Hallar las aceleraciones angulares de α_1 y α_3 de los engranes solar y planetario en el ejemplo anterior en términos de R, r, ω_2 y α_2, siendo estas últimas funciones del tiempo t.

Solución

Relacionando las aceleraciones de P y O sobre el cuerpo $\mathcal{B}_2$ se obtiene (vea el diagrama siguiente):

$$\mathbf{a}_P = -(R + r)\omega_2^2\hat{\mathbf{i}} + (R + r)\alpha_2\hat{\mathbf{j}}$$



Esta aceleración se transmite al punto P coincidente sobre $\mathcal{B}_1$. Relacionando D y P sobre el engrane planetario $\mathcal{B}_1$ tenemos

$$\mathbf{a}_D = a_D\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{a}_P + \alpha_1\hat{\mathbf{k}} \times \overset{r\hat{\mathbf{i}}}{\mathbf{r}_{PD}} - \omega_1^2 \overset{r\hat{\mathbf{i}}}{\mathbf{r}_{PD}}$$

$$= -(R + r)\omega_2^2\hat{\mathbf{i}} + (R + r)\alpha_2\hat{\mathbf{j}} + \alpha_1\hat{\mathbf{k}} \times r\hat{\mathbf{i}} - \omega_1^2 r\hat{\mathbf{i}}$$

Recordando que

$$\omega_1 = \frac{R + r}{r}\omega_2$$

los coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$ dan entonces

$$a_D = \frac{-(R + 2r)(R + r)}{r}\omega_2^2$$

y los coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$:

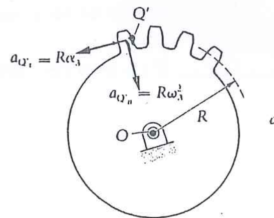
$$\alpha_1 = \frac{-(R + r)\alpha_2}{r} \quad \text{o bien} \quad \alpha_1 = \frac{R + r}{r}\alpha_2 \circlearrowright$$

Ahora necesitamos $\mathbf{a}_Q$, siendo Q el punto en el diente de $\mathcal{B}_1$ en contacto con el engrane solar $\mathcal{B}_3$:

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_D + \alpha_1\hat{\mathbf{k}} \times \overset{-2r\hat{\mathbf{i}}}{\mathbf{r}_{DQ}} - \omega_1^2\mathbf{r}_{DQ}$$

$$= \frac{-(R + 2r)(R + r)}{r}\omega_2^2\hat{\mathbf{i}} + 2(R + r)\alpha_2\hat{\mathbf{j}} + \frac{2r(R + r)^2}{r^2}\omega_2^2\hat{\mathbf{i}}$$

$$= \frac{(R + r)R}{r}\omega_2^2\hat{\mathbf{i}} + 2(R + r)\alpha_2\hat{\mathbf{j}}$$



Nos referimos ahora al cuerpo $\mathcal{B}_3$ para completar la solución. Relacionando el punto Q' *en el diente con* O sobre $\mathcal{B}_3$ se obtienen las componentes de $\mathbf{a}_{Q'}$ *(vea el diagrama). Las componentes de la aceleración tangencial de* Q y Q' son iguales* ya que los dientes están en contacto y se mueven juntos:

*Esto es cierto aun cuando *ningún* centro de los cuerpos está fijo y la geometría es irregular. En tanto exista rodamiento, las componentes de la aceleración de los puntos en contacto *en el plano tangente a los dos cuerpos,* son iguales siempre durante un movimiento plano. (Véase "Contact Point Accelerations in Rolling Problems", D.J. McGill, *Mechanics Research Communications,* 7(3), 175-179, 1980.

$$a_{Q_t} = a_{Q'_t} = 2(R + r)\alpha_2 = R\alpha_3$$

Por lo tanto

$$\alpha_3 = \frac{2(R + r)}{R}\alpha_2 \circlearrowleft$$

Nótese que podemos expresar la componente de la aceleración normal de Q' en términos de ω_2 usando el resultado para ω_3 del problema precedente:

$$a_{Q'_n} = -a_{Q'_x} = +R\omega_3^2 = +R\left[\frac{2(R + r)}{R}\omega_2\right]^2$$

$$= \frac{4(R + r)^2\omega_2^2}{R}$$

Nótese que también podríamos haber obtenido las aceleraciones de D y Q como puntos en los bordes de ruedas en rodamiento sobre pistas o vías curvas usando las Ecs. (3.31) y (3.32). Observando que ρ para P es $(R + r)$, presentamos estas comprobaciones parciales de nuestra solución:

$$\mathbf{a}_D = \left(1 + \frac{r}{\rho}\right)r\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_n = \left(1 + \frac{r}{R + r}\right)r\omega_1^2(-\hat{\mathbf{i}})$$

$$= -\left(\frac{R + 2r}{R + r}\right)r\omega_1^2\hat{\mathbf{i}} = -\left(\frac{R + 2r}{R + r}\right)r\left(\frac{R + r}{r}\omega_2\right)^2\hat{\mathbf{i}}$$

$$= \frac{-(R + 2r)(R + r)}{r}\omega_2^2\hat{\mathbf{i}} \quad \text{(igual que antes)}$$

$$\mathbf{a}_Q = 2r\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t - r\dot{\theta}^2\left(1 - \frac{r}{\rho}\right)\hat{\mathbf{e}}_n$$

$$= 2r(-\alpha_1)(+\hat{\mathbf{j}}) - r\omega_1^2\left(1 - \frac{r}{R + r}\right)(-\hat{\mathbf{i}})$$

$$= \frac{Rr}{R + r}\omega_1^2\hat{\mathbf{i}} - 2r\alpha_1\hat{\mathbf{j}}$$

$$= \frac{Rr}{R + r}\left(\frac{R + r}{r}\omega_2\right)^2\hat{\mathbf{i}} - 2r\left[\frac{-(R + r)}{r}\alpha_2\right]\hat{\mathbf{j}}$$

$$= \frac{(R + r)R}{r}\omega_2^2\hat{\mathbf{i}} + 2(R + r)\alpha_2\hat{\mathbf{j}} \quad \text{(igual que antes)}$$

Problemas / Sección 3.6

3.84 La rueda en la Fig. P3.84 tiene rodamiento sobre el plano con velocidad angular constante de 1 ⥀ rad/s. Encuentre la velocidad del punto Q usando el centro instantáneo Ⓘ de velocidad nula. Luego revise el resultado usando la Ec. (3.8) para relacionar v_Q con v_P.

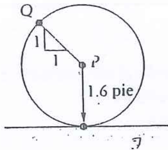


Figura P3.84

3.85 En el problema anterior, suponga que el plano $\mathcal{J}$ en que hay rodamiento no esta fijo al marco de referencia sin que se traslada en él (esta vez el marco de referencia es $\mathcal{G}$) con velocidad constante de 3 pie/s hacia la izquierda. (Vea la Fig. P3.85).

a. Encuentre el centro instantáneo de velocidad nula Ⓘ.
b. Calcule nuevamente v_Q.

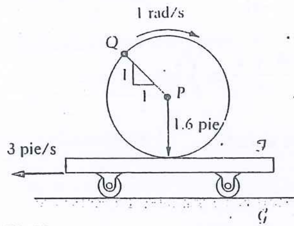


Figura P3.85

3.86 La rueda en la Fig. P3.86 rueda sobre la barra. Si en un cierto instante la barra tiene una velocidad de 2 m/s hacia la derecha y la rueda tiene una velocidad angular antihoraria de 0.5 rad/s, determine la velocidad de: (a) el centro de la rueda y (b) el punto P.

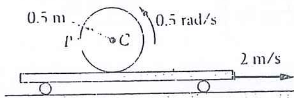


Figura P3.86

3.87 La Fig. P3.87a muestra el modo en que las ruedas de ferrocarril descansan sobre los rieles. Si el tren viaja a velocidad constante de 80 mi/h y no resbala sobre la vía, determine las velocidades de los puntos A, B, D y E sobre la recta vertical que pasa por su centro C (Fig. P3.87b). ¿Que punto está moviéndose hacia atrás? ¿Por qué?

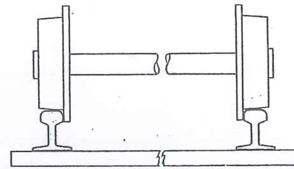


Figura P3.87a

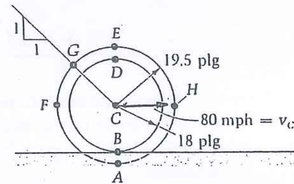


Figura P3.87b

3.88 En el problema anterior encuentre las velocidades de los puntos F, G y H.

3.89 Obtenga las velocidades de los puntos B y C en la Fig. P3.89 si el cilindro no resbala sobre los cuerpos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en traslación.

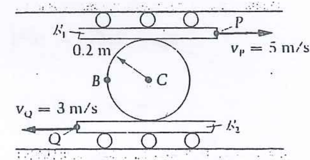


Figura P3.89

3.90 Dos hombres, uno alto y el otro bajo, caminan hacia arriba sobre planos inclinados idénticos, tirando de carretes idénticos por medio de cuerdas enrolladas alrededor de los cubos de los carretes. (Fig. P3.90). Ambos hombres caminan a la misma velocidad constante v_0, y las cuerdas están enrolladas en las direcciones opuestas indicadas. Si los carretes no resbalan sobre el plano, uno de los hombres será atropellado por su propio carrete. Demuestre cuál es y cuánto tardará el carrete en atropellarlo a partir del instante mostrado.

3.91 Un cilindro $\mathcal{B}$ de radio r rueda sobre un arco circular con radio de curvatura constante R (Fig. P3.91). ¿Cuál es la relación de la velocidad angular del cilindro a $\dot{\phi}$?

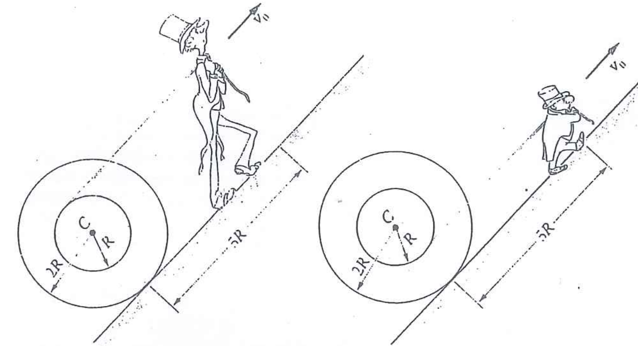


Figura P3.90

3.92 Un disco con diámetro de 1.2 m rueda a lo largo del plano como se indica en la Fig. P3.92. Su punto central C tiene la velocidad

$$v_C = (t^2 + 3t + 4)\hat{\mathbf{i}} \text{ m/s}$$

en donde t es el tiempo en segundos. Encuentre la velocidad del punto que se encuentra 0.3 m directamente abajo de C cuando (a) $t = 2$ s y (b) $t = 5$ s.

3.93 El tanque mostrado en la Fig. P3.93 se traslada hacia la derecha y en cierto instante tiene una velocidad $v_0\hat{\mathbf{i}}$ y una aceleración $a_0\hat{\mathbf{i}}$. (Estos valores son v y a para todos los puntos en el cuerpo del tanque y para los centros de sus ruedas.) Halle las velocidades de los cinco puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 si no hay resbalamiento. Las ruedas tienen radio R.

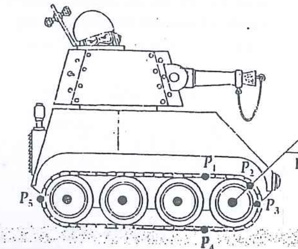


Figura P3.93

3.94 La rueda tiene rodamiento sobre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ (Fig. P3.94). La velocidad angular constante de la rueda en el marco $\mathcal{J}$ se muestra en la figura. Encuentre:

a. La velocidad de los puntos de $\mathcal{B}_1$ relativa a $\mathcal{B}_2$
b. La velocidad constante de C en $\mathcal{J}$ para la cual las velocidades de T (sobre $\mathcal{B}_1$) y de B (sobre $\mathcal{B}_2$) en $\mathcal{J}$ son iguales en magnitud y opuestas en dirección.

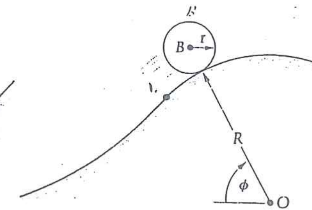


Figura P3.91

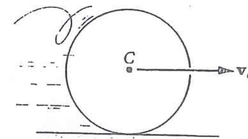


Figura P3.92

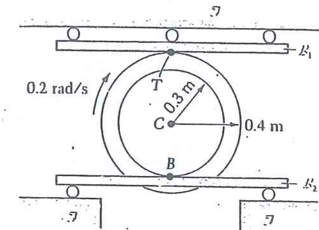


Figura P3.94

3.95 Una cuerda inextensible está enrollada alrededor del cilindro de la Fig. P3.95, ajustada en una pequeña ranura cerca del borde. El centro C se mueve hacia abajo con velocidad constante de 0.1 m/s. Encuentre las velocidades de los puntos A, B, D y E. *Sugerencia*: El cilindro no está rodando sobre el plano *sino* sobre. . . . ?

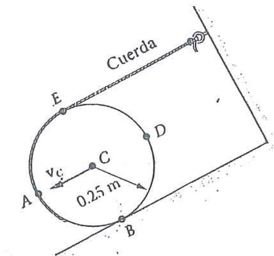


Figura P3.95

3.96 En el instante mostrado en la Fig. P3.96 el punto B del bloque (al que está articulada la barra $\mathcal{B}$) tiene una $v_B = 0.5 \downarrow$ pie/s. Encuentre la velocidad angular del cilindro en rodamiento.

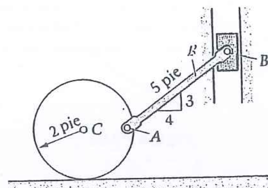


Figura P3.96

3.97 La Fig. P3.97 muestra una leva circular $\mathcal{B}_1$ y un seguidor oscilante que consiste del rodillo $\mathcal{B}_2$ (que rueda sobre $\mathcal{B}_1$) y de la barra $\mathcal{B}_3$. Si la leva gira con velocidad angular constante de 0.3 ↺ rad/s, encuentre la velocidad angular de la barra y del rodillo en el instante dado.

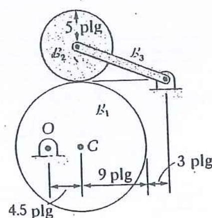


Figura P3.97

3.98 El cilindro de la Fig. P3.98 rueda hacia la izquierda con velocidad constante de su centro igual a v_C. Una barra se encuentra articulada al cilindro en B y su otro extremo A resbala sobre el plano. Calcule la velocidad de A cuando $\theta = 0°, 90°, 180°$ y $270°$.

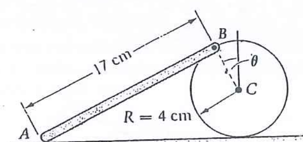


Figura P3.98

3.99 La rueda $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.99 tiene velocidad angular de 3 ↻ rad/s. Encuentre las velocidades angulares de la rueda $\mathcal{B}_2$ y de la barra doblada $\mathcal{B}_3$.

* **3.100** El carro $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.100 viaja de izquierda a derecha, sus ruedas traseras $\mathcal{B}_2$ ruedan con velocidad angular constante de 0.2 ↻ rad/s. Las ruedas delanteras $\mathcal{B}_3$ ruedan sobre la superficie parabólica mostrada. Las ruedas

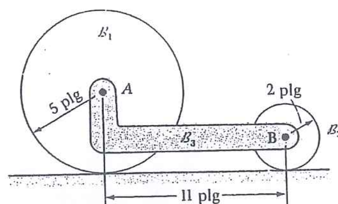


Figura P3.99

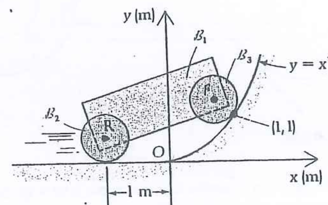


Figura P3.100

tienen un radio de 0.4 m y su eje se halla fijo al carro. Encuentre la velocidad angular del carro $\mathcal{B}_1$ en el instante dado. *Sugerencia:*

$$\frac{dy}{dx} = \tan\phi = 2$$

$$\phi = 63.43°$$

3.101 Las velocidades angulares constantes de la corona de engrane $\mathcal{B}_1$ y del portador $\mathcal{B}_2$ mostrados en la Fig. P3.101 son de 2 ↺ rad/s y de 10 ↻ rad/s, respectivamente. Determine la velocidad angular del engrane $\mathcal{B}_3$ y la velocidad del punto del $\mathcal{B}_4$ cuya velocidad sea máxima en la posición dada. Los centros de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ están fijos como ejes al marco de referencia $\mathcal{I}$.

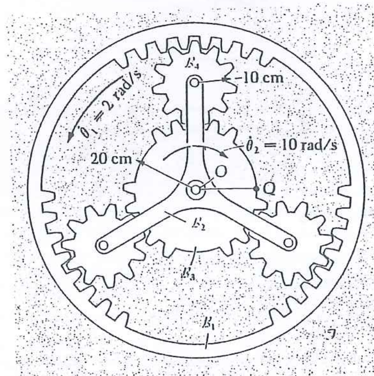


Figura P3.101

3.102 La barra $\mathcal{R}$, que está articulada al cilindro $\mathcal{B}_2$, se traslada hacia arriba en la dirección y con velocidad constante de 4 pie/s (Fig. P3.102). La barra $\mathcal{B}_1$ está articulada al marco de referencia en O y descansa contra el borde de $\mathcal{B}_2$, como se muestra en la figura. Existe contacto de rodamiento entre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Encuentre las velocidades angulares de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en el instante mostrado.

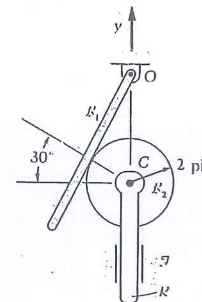


Figura P3.102

3.103 Si las velocidades dadas de P y Q en el Problema 3.89 son constantes, encuentre las aceleraciones de C y B.

3.104 Si en el Problema 3.89 las aceleraciones respectivas de P y Q son: 1 ← m/s$_2$ y 2 → m/s$_2$, encuentre la aceleración angular del cilindro.

3.105 Los arcos sombreados sobre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ (Fig. P3.105a) son siempre iguales si los dos cuerpos se encuentran en contacto rodante; sin embargo el enunciado recíproco no es necesariamente cierto. Aunque los arcos de contacto sean iguales ello no implica que $\mathcal{B}_1$ rueda sobre $\mathcal{B}_2$. Para la rueda $\mathcal{B}_1$ sobre el plano $\mathcal{B}_2$ mostrado en la Fig. P3.105b, de valores constantes $\dot{x}_C$ y $\dot{\theta}$ para los cuales los arcos de contacto son iguales pero las velocidades de los puntos de contacto no lo son. *Sugerencia*: Observe los arcos sombreados sobre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en la Fig. P3.105b.

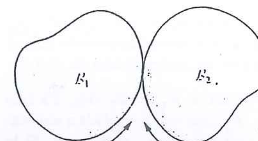


Figura P3.105a

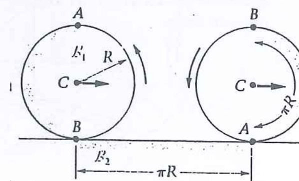


Figura P3.105b

3.106 Si en el Problema 3.99 la aceleración angular de $\mathcal{B}_1$ es $\alpha_1 = 1$ ↺ rad/s² en el instante dado, encuentre α_2 y α_3 para ese momento.

3.107 En el Problema 3.93 encuentre las aceleraciones de los mismos cinco puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5. (Vea la Fig. P3.107).

3.108 En el Ejemplo 3.12 note que el punto S es el centro instantáneo de $\mathcal{B}$, de modo que $v_S = 0$ y $a_S = r\omega^2 \uparrow = -1.2\hat{j}$ (usando la convención de signos de ese ejemplo). Aplique esos resultados, en vez de v_C y a_C *para recalcular la velocidad y aceleración de los puntos N y E*; compare sus resultados con los del ejemplo.

3.109 En el Ejemplo 3.12 encuentre la velocidad y la aceleración del punto W.

3.110 Durante el inicio del movimiento de las dos ruedas de fricción (Fig. P3.110), la velocidad angular de $\mathcal{B}_1$ es $\omega_1 = 5t^2$ ↺ rad/s². Suponiendo contacto de rodamiento, calcule la aceleración del punto T, que está en la parte superior de $\mathcal{B}_2$ cuando $t = 3$ s.

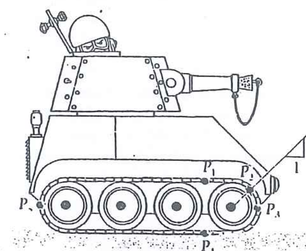


Figura P3.107

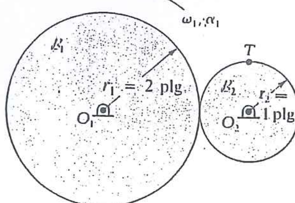


Figura P3.110

3.111 Una rueda tiene rodamiento sobre una curva de 10 cm de radio. (Fig. P3.111). En el instante mostrado la rueda tiene una velocidad angular de 4 rad/s y una aceleración de −3 rad/s². En el instante mostrado encuentre:

a. La velocidad y aceleración de C
b. La velocidad y aceleración de A
c. (d/dt) v_A
d. El centro de curvatura de la trayectoria del punto T.

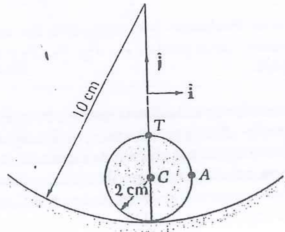


Figura P3.111

3.112 En el Problema 3.87 encuentre las aceleraciones de los puntos A, B, C, D y E.

3.113 En el Problema 3.88 encuentre las aceleraciones de los puntos F, G y H.

3.114 Un momento aplicado al engrane $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.114 genera una aceleración angular constante $\alpha_1 = 2$ ⟲ rad/s². El otro engrane, $\mathcal{B}_2$, está fijo en el marco de referencia. Determine:

a. El tiempo requerido por C para regresar a su punto de partida después de una revolución alrededor de $\mathcal{B}_2$ habiendo partido del reposo.
b. El número de vueltas dadas en el espacio por $\mathcal{B}_1$ durante la revolución completa.

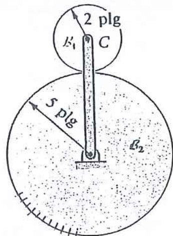


Figura P3.114

3.115 Calcule la aceleración del centro instantáneo de la barra 2 en el Ejemplo 3.15.

3.116 El engrane $\mathcal{B}_1$ y la manivela $\mathcal{B}_2$ tienen velocidades angulares ω_0 y aceleraciones angulares α_0 en el instante mostrado en la Fig. P3.116, en las direcciones indicadas. Encuentre los vectores, velocidad angular y aceleración angular de los engranes $\mathcal{B}_3$ y $\mathcal{B}_4$ en el mismo instante, si $\mathcal{B}_2$ está articulada a $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_3$, y $\mathcal{B}_4$.

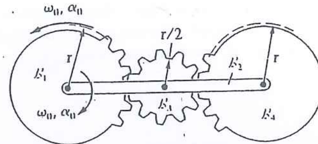


Figura P3.116

3.117 El centro C del pequeño cilindro $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.117 tiene una rapidez de $0.1t^2$ m/s al moverse en sentido horario sobre un circulo. El cuerpo $\mathcal{B}_1$ rueda sobre el cilindro grande $\mathcal{B}_2$. En la posición de la figura, t = 10 s. Encuentre la aceleración del punto B de la barra $\mathcal{B}_3$ que está en contacto con $\mathcal{B}_2$ en el instante dado.

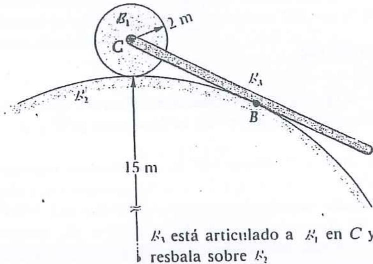


Figura P3.117

3.118 En el Problema 3.89 sea a_P = 0.2 → m/s² y a_Q = 0.1 ← m/s² en el instante mostrado. Suponiendo que no hay resbalamiento, encuentre las aceleraciones de B y C.

3.119 Los dos cilindros idénticos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ (Fig. P3.119) están unidos por la barra $\mathcal{B}_3$ (que está articulada a sus centros) y ruedan sobre la superficie como se muestra. Si la velocidad angular de $\mathcal{B}_1$ es $\omega_1 = \omega_0$ ⟲ = constante, encuentre las aceleraciones angulares de $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ en el instante dado.

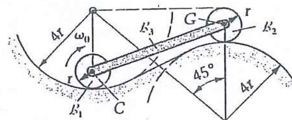


Figura P3.119

3.120 El punto A del bloque deslizante tiene en el instante mostrado en la Fig. P3.120 una v_A = 12 ↑ plg/s y una a_A = 6 ↓ plg/s². Encuentre la aceleración angular de la barra $\mathcal{B}$.

3.121 Dos ruedas de 5 plg de radio ruedan sobre una superficie plana (Fig. P3.121). Una barra $\mathcal{B}$ de 13 plg está articulada a las ruedas en A y en B. Si C tiene una velocidad constante de 20 pie/s hacia la derecha, encuentre para la posición mostrada, la aceleración de A.

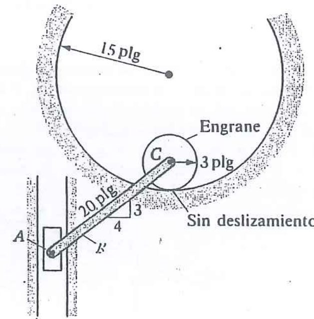


Figura P3.120

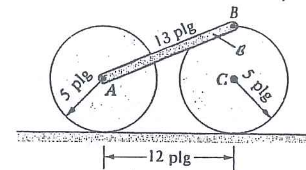


Figura P3.121

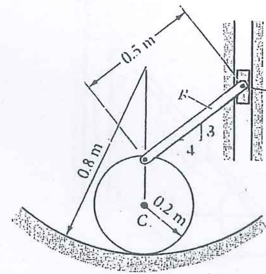


Figura P3.123

3.122 Vea la Fig. P3.122. La velocidad del pasador en el bloque $\mathcal{B}$ es de 0.2 ↓ m/s y su aceleración es de 0.5 ↑ m/s² en la posición indicada. Halle para este instante la velocidad angular y la aceleración angular del cilindro si hay suficiente fricción para impedir que resbale.

3.123 Una rueda tiene rodamiento a lo largo de una superficie curva. En la posición mostrada en la Fig. P3.123, su velocidad angular ω es de 3 ⟲ rad/s y su aceleración angular es α = 5 ⟲ rad/s². Determine en este instante la aceleración angular de la barra $\mathcal{B}$ y la aceleración del pasador B del bloque deslizante.

3.124 En el Ejemplo 3.13 encuentre la aceleración del pistón cuando θ = 0°, 180°, 270°.

3.125 El punto central C del engrane $\mathcal{B}_1$ en la Fig. 3.125 se mueve en un plano horizontal con rapidez constante v_0. *La corona $\mathcal{I}$ está fija en el marco de referencia y la velocidad angular constante de $\mathcal{B}_1$ tiene sentido horario. Encuentre la aceleración del punto Q de $\mathcal{B}_1$.*

3.126 Si una bola de un cojinete (Fig. P3.126) no resbala ni sobre el eje ni sobre la caja fija, encuentre la velocidad y la aceleración del centro de la bola en términos de la velocidad angular y de la aceleración angular del eje (ω y $\dot{\omega}$).

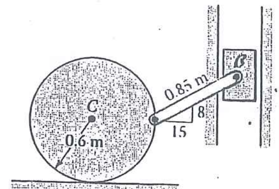


Figura P3.122

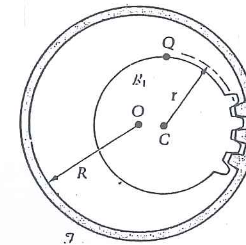


Figura P3.125

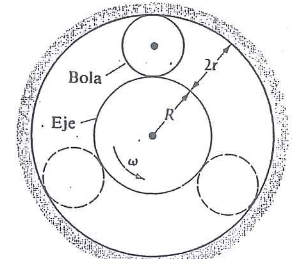


Figura P3.126

3.127 La bola en la Fig. P3.127 rueda sobre la superficie fija y en el instante mostrado tiene velocidad angular $\omega = 3\hat{k}$ rad/s y aceleración angular $\alpha = -2\hat{k}$ rad/s². Para tal instante encuentre:

a. Las velocidades de A y B
b. Las aceleraciones de A y B
c. $(d/dt)\,|\mathbf{v}_B|$

3.128 La velocidad angular de la manivela $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.128 es constante e igual a 3 ↺ rad/s. En la posición dada, encuentre la velocidad del centro C de la rueda $\mathcal{B}_2$ y también determine la aceleración angular de $\mathcal{B}_2$ que rueda sobre la vía circular.

3.129 Los cilindros $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en la Fig. P3.129 tienen radios de 10 plg y ruedan sobre los planos respectivos. La barra $\mathcal{B}_3$ tiene 48 plg de longitud y está articulada a los centros de los cilindros. El centro G de $\mathcal{B}_1$ tiene una $v_G = -10t \rightarrow$ plg/s. Si en el instante mostrado $t = 5$ s, encuentre α_2 y α_3 en ese instante.

3.130 La barra $\mathcal{B}$ en la Fig. P3.130 tiene 25 cm de longitud y está articulada en B al cilindro rodante. El otro extremo de $\mathcal{B}$ está articulado al rodillo en A. El centro del cilindro tiene una $v_C = 11.2$ cm/s y una $a_C = 16.8$ cm/s² hacia abajo en el plano en el instante dado; en este momento la recta B ① es vertical, A ① es horizontal y BC es paralela al plano bajo ella. Encuentre la aceleración del punto A y la aceleración angular del cuerpo $\mathcal{B}$ en el instante indicado.

3.131 La Fig. P3.131 muestra un disco de 10 pie de radio que rueda sobre una superficie plana. Tiene en el instante mostrado una velocidad angular de 2 rad/s y una aceleración angular de 3 rad/s², ambas antihorarias. Encuentre un punto sobre el disco o el disco extendido que tenga aceleración nula en ese instante.

3.132 Encuentre la aceleración del punto B que es el pasador que conecta la barra $\mathcal{B}$ al bloque en la Fig. P3.132, en $t = 1$ s. La barra está en posición horizontal en $t = 0$ y la velocidad de C es $v_C = 2t^2 \rightarrow$ pie/s.

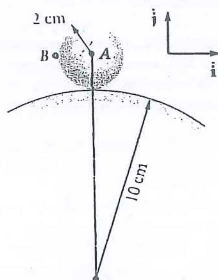


Figura P3.127

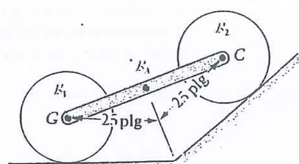


Figura P3.129

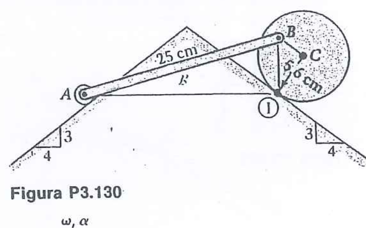


Figura P3.130

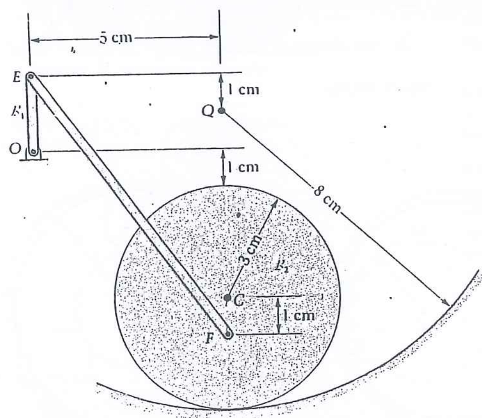


Figura P3.128

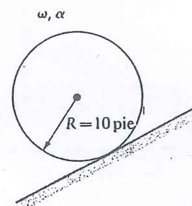


Figura P3.131

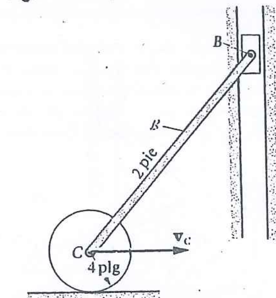


Figura P3.132

3.133 Con referencia al Problema 3.121, si en el instante mostrado $v_C = 20 \rightarrow$ plg/s y $a_C = 5 \leftarrow$ plg/s², encuentre a_A en este tiempo.

* **3.134** Los engranes $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en la Fig. P3.134 tienen 25 y 50 dientes, respectivamente. La barra $\mathcal{B}_3$ tiene 2 pie de longitud y el radio de $\mathcal{B}_2$ es de 1 pie. Determine la aceleración del punto A cuando $t = 0$ si $X_B = 0.2$ sen πt (en pies) (positivo hacia la izquierda) con $\theta = 90°$ en $t = 0$.

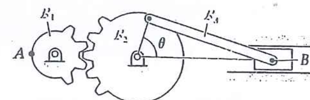


Figura P3.134

* **3.135** En el instante mostrado en la Fig. P3.135, la barra $\mathcal{B}_1$ tiene $\omega_1 = \pi$ ↺ rad/s y $\alpha_1 = \pi/3$ ↻ rad/s²; el engrane $\mathcal{B}_2$ tiene $\omega_2 = 2\pi$ rad/s ↻ y $\alpha_2 = \pi/2$ ↺ rad/s². En este instante, determine las aceleraciones de cada uno de los puntos de contacto en los dientes.

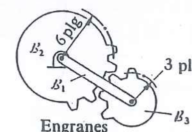


Figura P3.135

* **3.136** La corona de engrane $\mathcal{I}$ en la Fig. P3.136 es estacionaria. La manivela $\mathcal{B}_1$ gira con velocidad angular constante de 10 rad/s antihoraria, y tiene su eje en el centro del engrane solar $\mathcal{B}_2$ (en S); soporta al engrane planetario $\mathcal{B}_3$ (en P). Encuentre las aceleraciones de los puntos $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ que están en contacto entre sí, si el radio de $\mathcal{B}_2$ es de 3 plg y el de $\mathcal{B}_3$ es de 10 plg.

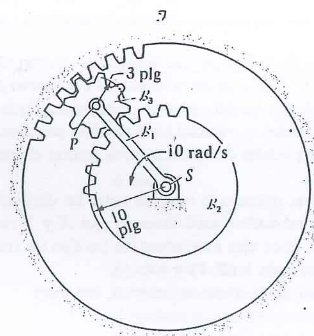


Figura P3.136

* **3.137** El punto O está articulado al marco de referencia $\mathcal{I}$ (Fig. P3.137). Los radios de paso de los engranes $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son de 0.2 m. Las velocidades angulares de $\mathcal{B}_3$ y $\mathcal{B}_4$ son de 2 rad/s, horaria para $\mathcal{B}_3$ y antihoraria para $\mathcal{B}_4$ y ambas son constantes. Encuentre la magnitud de la aceleración máxima experimentada por cualquier punto de $\mathcal{B}_1$.

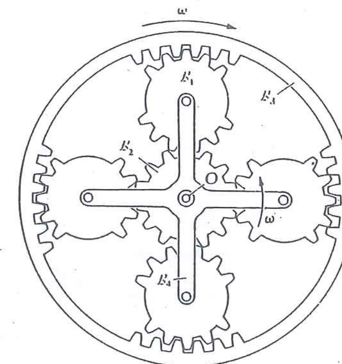


Figura P3.137

* **3.138** La rueda en la Fig. P3.138 tiene rodamiento sobre el plano. Encuentre el radio y el centro de curvatura de la trayectoria del punto T en el tiempo dado en función de r.

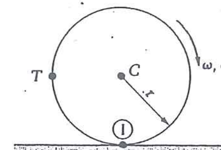


Figura P3.138

* **3.139** Una *cicloide* es la curva descrita por un punto sobre el borde de una rueda en rodamiento. Las ecuaciones en coordenadas ortogonales de un punto sobre la cicloide, en términos del parámetro φ (el ángulo mostrado en la Fig. P3.139) son

$$x = a(\varphi - \text{sen}\,\varphi)$$

$$y = a(1 - \cos\varphi)$$

en donde a es el radio de la rueda. Recuerde que la curvatura de una curva plana es

$$\frac{1}{\rho} = \left|\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}\right|$$

en donde ρ es el radio de curvatura.

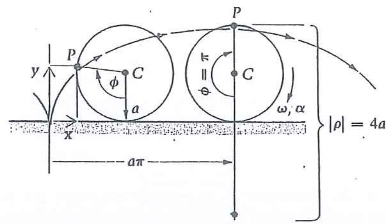


Figura P3.139

a. Use la regla de la cadena

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$$

y muestre que, para la cicloide,

$$\rho = -2^{3/2}\, a\sqrt{1 - \cos\varphi}$$

b. Explique que significa el signo menos en la expresión para ρ .

c. Observe que P está en el punto más alto cuando $\varphi = \pi$ y que $|\rho| = 4a$ en ese punto. En esta configuración, demuestre que las siguientes dos expresiones para la aceleración de P concuerdan:

$$\mathbf{a}_P = a\alpha\hat{\mathbf{i}} + \alpha\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{CP} - \omega^2\mathbf{r}_{CP}$$

$\mathbf{a}_C$

$$\mathbf{a}_P = \ddot{s}\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{\mathbf{e}}_n$$

* 3.140 Muestre que para un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento plano, en tanto que $\alpha \neq 0$, existe un círculo de puntos P de $\mathcal{B}$ cuyas aceleraciones pasan a través de cualquier punto C $\mathcal{B}$. *Sugerencia*: Escriba $\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_C + \alpha\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{CP} - \omega^2\mathbf{r}_{CP}$ demultiplique escalarmente ambos miembros por el vector $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{CP}$. Suponga que $\mathbf{a}_P \parallel \mathbf{r}_{CP}$ y vea si puede determinar $\mathbf{r}_{CP}$. Para una rueda en rodamiento muestre que los puntos son como se indica en la Fig. P3.140.

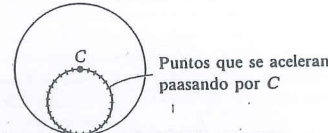


Figura P3.140

* 3.141 Demuestre que para el cilindro rodante uniforme de la Fig. P3.141 existe un punto de aceleración nula en la posición indicada J si ω y α tienen las direcciones indicadas y no son ambas nulas. Debe encontrar que las coordenadas de J son

$$(x_J, y_J) = [r\alpha\omega^2/(\omega^4 + \alpha^2),\ r\alpha^2/(\omega^4 + \alpha^2)].$$

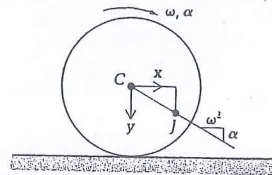


Figura P3.141

3.7 Relación entre las velocidades de un punto con respecto a dos marcos de referencia diferentes

La Ec. (3.8) da la relación entre las velocidades en $\mathcal{I}$ de dos puntos del *mismo* cuerpo rígido; sin embargo, a menudo necesitamos otra ecuación que relacione las velocidades del *mismo punto* relativas a dos marcos o cuerpos *diferentes*. Esta relación (junto con una ecuación asociada para aceleraciones que será desarrollada en la sección siguiente) es esencial para resolver problemas cinemáticos que incluyen cuerpos con movimientos especiales relativos a otros (como el pasador de un cuerpo que resbala en la ranura de otro).

Para desarrollar esta ecuación debemos encontrar primero la relación entre las derivadas de un vector arbitrario $\mathbf{A}$ en dos marcos $\mathcal{I}$ y $\mathcal{B}$. Comenzamos estableciendo ejes X y Y en $\mathcal{I}$, y ejes x y y en $\mathcal{B}$ como se indica en la Fig. 3.25. A estos ejes asociamos las parejas de vectores unitarios $(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}})$ e $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}})$, siempre paralelos respectivamente a (X, Y) y a (x, y).

Notamos que si $\theta(t)$ localiza al eje x respecto al X como se muestra, entonces

$$\hat{\mathbf{i}} = \cos\theta\hat{\mathbf{I}} + \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{J}} \tag{3.39}$$

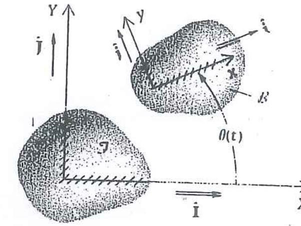


Figura 3.25

y

$$\hat{\mathbf{j}} = -\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{I}} + \cos\theta\hat{\mathbf{J}} \tag{3.40}$$

Derivando en el marco $\mathcal{I}$ y notando que $\hat{\mathbf{I}}$ y $\hat{\mathbf{J}}$ son ahí constantes,

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = \dot{\hat{\mathbf{i}}} = (-\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{I}} + \cos\theta\hat{\mathbf{J}})\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{j}} \tag{3.41}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} = \dot{\hat{\mathbf{j}}} = -(\cos\theta\hat{\mathbf{I}} + \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{J}})\dot{\theta} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{i}} \tag{3.42}$$

Ahora describimos el vector arbitrario $\mathbf{A}$ en el marco $\mathcal{B}$ (lo que significa expresar $\mathbf{A}$ en términos de sus componentes ahí, o sea en términos de vectores unitarios fijos en dirección en $\mathcal{B}$):

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$$

Derivando este vector en $\mathcal{I}$ obtenemos

$$^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_x\hat{\mathbf{i}} + \dot{A}_y\hat{\mathbf{j}} + A_x{}^{\mathcal{I}}\dot{\hat{\mathbf{i}}} + A_y{}^{\mathcal{I}}\dot{\hat{\mathbf{j}}} \tag{3.43}$$

Ahora notemos que los dos primeros términos en el lado derecho de la Ec. (3.43) representan la derivada del vector $\mathbf{A}$ en $\mathcal{B}$ porque $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ no cambian ahí en magnitud ni en dirección con el tiempo. Entonces

$$^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{A}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{A}} + A_x{}^{\mathcal{I}}\dot{\hat{\mathbf{i}}} + A_y{}^{\mathcal{I}}\dot{\hat{\mathbf{j}}}$$

Sustituyendo las derivadas de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ en $\mathcal{I}$ de las Ecs. (3.41) y (3.42) se obtiene

$$\begin{aligned} ^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{A}} &= {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{A}} + \dot{\theta}(A_x\hat{\mathbf{j}} - A_y\hat{\mathbf{i}}) \\ &= {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{A}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) \end{aligned}$$

o bien

$$^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{A}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{A}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A} \tag{3.44}$$

La velocidad angular $\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$ ha reaparecido y la Ec. (3.44) muestra que este vector tiene un propósito más general que meramente relacionar las velocidades en la Cinemática. Es de hecho el eslabón que permite relacionar las derivadas de cualquier vector en dos marcos diferentes. (Este mismo resultado es también cierto en el movimiento general tridimensional, con vectores tridimensionales y una expresión más general para la velocidad angular, como se verá en el Capítulo 6.)

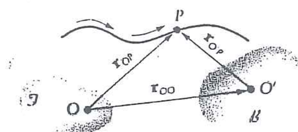


Figura 3.26

Usamos ahora la Ec. (3.44) para relacionar las velocidades de un punto P en dos marcos y . De la Fig. 3.26 los vectores de posición de P en esos dos marcos están relacionados por

$$\mathbf{r}_{OP} = \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{r}_{O'P} \qquad (3.45)$$

Derivando esta ecuación en $\mathcal{F}$ obtenemos

$$^{\mathcal{F}}\dot{\mathbf{r}}_{OP} = {}^{\mathcal{F}}\dot{\mathbf{r}}_{OO'} + {}^{\mathcal{F}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} \qquad (3.46)$$

Los primeros dos vectores en la Ec. (3.46) son por definición las velocidades de P y O' en $\mathcal{F}$:

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{F}} + {}^{\mathcal{F}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} \qquad (3.47)$$

Pregunta 3.16 (a) ¿Por qué el último vector en la Ec. 3.47 no es la velocidad de P en $\mathcal{F}$? (b) ¿Por qué no es la velocidad de P en $\mathcal{B}$?

Para reemplazar ${}^{\mathcal{F}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P}$ por un vector con el que podamos operar, usamos la Ec. (3.44), identificando $\mathbf{r}_{O'P}$ con el vector **A**:

$$^{\mathcal{F}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{O'P} \qquad (3.48)$$

Por lo tanto, aceptamos que ${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P}$ es $\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$ y sustituyendo la Ec. (3.48) en la (3.47), obtenemos

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{v}_{O'/\mathcal{F}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{O'P} \qquad (3.49)$$

Otra manera de expresar la Ec. (3.49) es imaginar a $\mathcal{B}$ como un "marco móvil" con respecto a un marco "fijo" $\mathcal{F}$. Entonces las velocidades de P pueden escribirse simplemente como $\mathbf{v}_P$ cuando la referencia es $\mathcal{F}$ ($\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$) y como $\mathbf{v}_{rel}$ cuando la referencia es el "marco móvil" $\mathcal{B}$ ($\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$). Entonces podemos escribir la Ec. (3.49) en notación abreviada como

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{v}_{O'} + \omega \times \mathbf{r} \qquad (3.50)$$

en donde $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'P}$ (posición de P en el marco móvil) y ω es la velocidad angular de $\mathcal{B}$ respecto a $\mathcal{F}$. El lector encontrará esta forma de la Ec. (3.49) más fácil de usar cuando haya sólo un "marco móvil".

Denotemos ahora con P' el punto de $\mathcal{B}$ (o $\mathcal{B}$ extendido) que coincide con P. Entonces $\mathbf{r}_{O'P} = \mathbf{r}_{O'P'}$ y los útimos términos de la Ec. (3.49) o de la (3.50) son, según la Ec. (3.8), la velocidad de P' en $\mathcal{F}$:

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{v}_{P'/\mathcal{F}} \qquad (3.51)$$

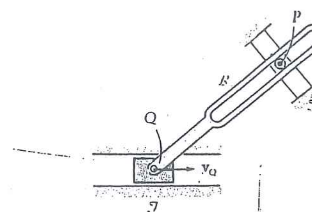


Figura 3.27

En palabras, la Ec. (3.51) dice que en un tiempo cualquiera, la velocidad de P en $\mathcal{F}$ es la suma de la velocidad de P en $\mathcal{B}$ más la velocidad en $\mathcal{F}$ del punto de $\mathcal{B}$ coincidente con P*.

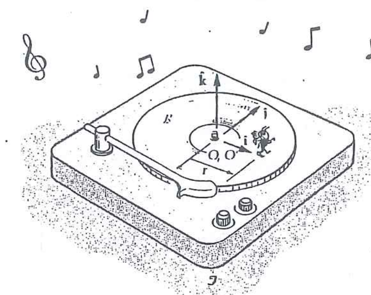
Como un ejemplo preliminar considere la Fig. 3.27 en donde el pasador Q se mueve hacia la derecha. Sea P el centro del otro pasador que está ligado al marco $\mathcal{F}$. Entonces podemos escribir

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = 0 = \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{v}_{P'/\mathcal{F}} \Rightarrow \mathbf{v}_{P'/\mathcal{F}} = -\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$$

El movimiento en $\mathcal{B}$ del centro del pasador es necesariamente a lo largo de una línea recta dentro de la ranura de $\mathcal{B}$. Por ello la velocidad de P' (el punto de $\mathcal{B}$ extendido coincidente con P) es *también* paralela a la ranura y en dirección (↗) opuesta a la de $\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$ (↙). Consideremos ahora varios ejemplos detallados del uso de la Ec. (3.51).

Ejemplo 3.22

Una avispa camina radialmente y hacia afuera con velocidad constante de 2 plg/s sobre una línea recta relativa a un disco en rotación con ω = 33 1/3 rpm. Encuentre la velocidad de la avispa en el marco $\mathcal{F}$ que es la caja que soporta al tocadisco.



Solución

Trataremos a la avispa como un punto Y; notemos que los vectores unitarios de la figura están fijos en nuestro "marco móvil" $\mathcal{B}$. También

*Este último término se podría denominar *velocidad vehicular* de *P*.

coinciden los orígenes (O') y (O), "móvil" y "fijo" respectivamente. Usando la Ec. (3.49);

$$\mathbf{v}_{Y/\mathcal{I}} = \mathbf{v}_{Y/\mathcal{B}} + \mathbf{v}_{O'/\mathcal{I}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{O'Y}$$

$$= 2\hat{\mathbf{i}} + 0 + \left(33\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2\pi}{60}\right)\hat{\mathbf{k}} \times r\hat{\mathbf{i}}$$

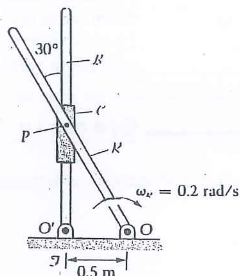
$$= 2\hat{\mathbf{i}} + \frac{10\pi}{9} r\hat{\mathbf{j}} \ \text{plg./s}$$

Nótese como el segundo término crece linealmente con el radio.

En el siguiente ejemplo, hay más de un "marco móvil". Para evitar el uso de subíndices, llamaremos a los cuerpos: $\mathcal{B}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{C}$ en vez de $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$. Así ω_1 será $\omega_{\mathcal{B}}$, etc.

Ejemplo 3.23

El casquillo $\mathcal{C}$ en el diagrama está articulado a la barra $\mathcal{R}$ en P y puede resbalar libremente a lo largo de la barra $\mathcal{B}$. La velocidad angular de $\mathcal{R}$ es de 0.2 ↻ rad/s en el instante mostrado. Encuentre la velocidad angular de $\mathcal{B}$ en este momento y determine la velocidad de P relativa a $\mathcal{B}$.



Solución

Relacionamos las velocidades de P en $\mathcal{I}$ y en $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{v}_{O'/\mathcal{I}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r}_{O'P}$$

$$\overbrace{\underbrace{\mathbf{v}_{O/\mathcal{I}}}_{\text{cero}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}} \times \mathbf{r}_{OP}}^{\text{en } \mathcal{R}} = v_{P/\mathcal{B}}\hat{\mathbf{j}} + (\underbrace{\mathbf{v}_{O'/\mathcal{I}}}_{\text{cero}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r}_{O'P})$$



$$-0.2\hat{\mathbf{k}} \times (-0.5\hat{\mathbf{i}} + 0.866\hat{\mathbf{j}}) = v_{P/\mathcal{B}}\hat{\mathbf{j}} + \omega_{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{k}} \times 0.866\hat{\mathbf{j}}$$

Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$: $0.173 = -0.866\omega_{\mathcal{B}}$

$$\omega_{\mathcal{B}} = -0.2 \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} = -0.2\hat{\mathbf{k}} \ \text{rad/s} \quad \text{o} \quad 0.2 \ ↻ \ \text{rad/s}$$

Coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$: $0.1 = v_{P/\mathcal{B}}$

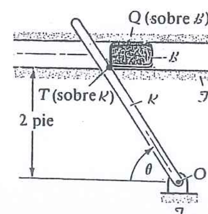
$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} = 0.1\hat{\mathbf{j}} \ \text{m/s}$$

Entonces el pasador se mueve hacia afuera sobre $\mathcal{B}$ que está girando en sentido horario.

Pregunta 3.17 ¿Tendrá $\mathcal{B}$ *siempre* la misma ω que $\mathcal{R}$?

Nótese que en el ejemplo, no tuvimos necesidad de conocer la velocidad angular de $\mathcal{C}$. Sin embargo es importante que el lector vea que $\omega_{\mathcal{C}} \equiv \omega_{\mathcal{B}}$. La razon es que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ sólo pueden *trasladarse* relativamente entre sí; línea fijas en ellos girarán con la misma en $\mathcal{I}$. Esta observación se necesitará en ocasiones (como en los Problemas 3.147 y 3.149).

Ejemplo 3.24



El bloque $\mathcal{B}$ se traslada en una guía horizontal (vea el diagrama) y es empujado por una barra $\mathcal{R}$ que gira con velocidad angular $\omega_{\mathcal{R}} = 10$ ↻ rad/s alrededor del pasador en O. Calcular $\mathbf{v}_Q$ (velocidad del punto de contacto de $\mathcal{B}$), cuando $\theta = 60°$.

Solución

Sea el suelo el marco de referencia $\mathcal{I}$ y nótese que T es el punto de $\mathcal{R}$ coincidente con Q en el instante dado (el que hemos llamado P' en la teoría). Usando la Ec. (3.51) se obtiene

$$\mathbf{v}_{Q/\mathcal{I}} = \mathbf{v}_{Q/\mathcal{R}} + \mathbf{v}_{T/\mathcal{I}}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_{Q/\mathcal{I}} = v_{Q/\mathcal{R}}\left(\frac{\hat{\mathbf{i}}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}}\right) + (-10\hat{\mathbf{k}}) \times \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}\right) \quad (1)$$

Nótese que la velocidad de Q relativa a la barra $\mathcal{R}$ tiene una magnitud desconocida $v_{Q/\mathcal{R}}$ pero una dirección *conocida* (a lo largo de $\mathcal{R}$). Conocemos también la dirección de $\mathbf{v}_{Q/\mathcal{I}}$ de modo que

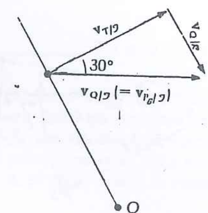
$$\mathbf{v}_{Q/\mathcal{I}} = v_{Q/\mathcal{I}}\hat{\mathbf{i}} = \frac{20}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{j}} + 20\hat{\mathbf{i}} + \frac{v_{Q/\mathcal{R}}}{2}\hat{\mathbf{i}} - v_{Q/\mathcal{R}}\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}} \quad (2)$$

Igualando las componentes x de la Ec. (2),

$$v_{Q/\mathcal{I}} = 20 + \frac{v_{Q/\mathcal{R}}}{2} \quad (3)$$

E igualando las componentes y,

$$0 = \frac{20}{\sqrt{3}} - v_{Q/\mathcal{R}}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$



La Ec. (4) da $v_{Q/\mathcal{R}} = 13.3$ pie/s, con lo que la Ec. (3) da

$$\mathbf{v}_{Q/\mathcal{I}} = v_{Q/\mathcal{I}}\hat{\mathbf{i}} = 26.7\hat{\mathbf{i}} \ \text{pie/s}$$

En el diagrama anexo se muestra el triángulo correcto que relaciona las velocidades de Q y T. Como comprobación, $v_Q \cos 30° = (26.7)\sqrt{3}/2 = 23.1$ y $v_T = \sqrt{(20/\sqrt{3})^2 + 20^2} = 23.1$ pie/s.

Pregunta 3.18 ¿Podría el ejemplo anterior resolverse usando $\mathbf{v}_{T/} = \mathbf{v}_{T/\mathcal{J}} + \mathbf{v}_{Q/\mathcal{B}}$

Ejemplo 3.25

El disco $\mathcal{C}$ de la Fig. 1, con el pasador P unido a él, tiene un movimiento angular limitado. Después de una rotación horaria de 45° desde la posición original (Fig. 2), el disco $\mathcal{C}$ tiene una velocidad angular $\omega_{\mathcal{C}} = 2 \circlearrowright$ rad/s. Para este momento, hallar la $\omega_{\mathcal{J}}$ del cuerpo triangular ranurado $\mathcal{J}$ y determine la velocidad relativa a $\mathcal{J}$ del pasador P.

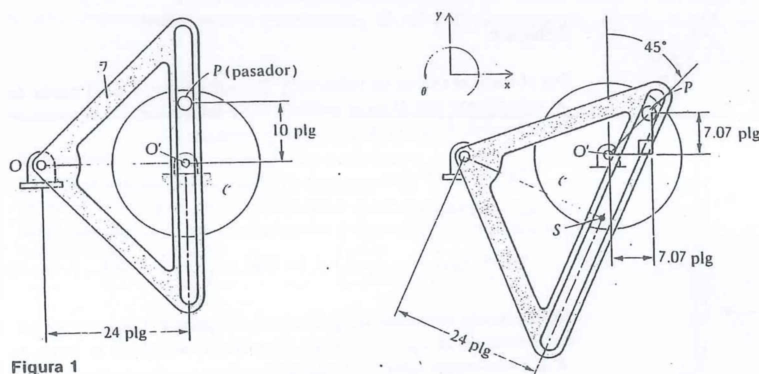


Figura 1

Solución

Llamemos $\mathcal{J}$ al marco de referencia dado por el suelo. Relacionemos las velocidades del pasador P en $\mathcal{J}$ y en $\mathcal{J}$:

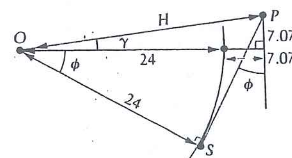
$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{J}} = \mathbf{v}_{P/\mathcal{J}} + \mathbf{v}_{P'/\mathcal{J}} \qquad (1)$$

en donde P' es el punto de $\mathcal{J}$ coincidente con P.

Podemos encontrar $\mathbf{v}_{P/\mathcal{J}}$ relacionándola sobre el cuerpo $\mathcal{C}$ a $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{J}}$ (que se anula):

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{J}} = \omega_{\mathcal{C}}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{O'P} = -2\hat{\mathbf{k}} \times (7.07\hat{\mathbf{i}} + 7.07\hat{\mathbf{j}})$$

$$= 1.41\hat{\mathbf{i}} - 1.41\hat{\mathbf{j}} \text{ plg./s}$$



Para encontrar $\mathbf{v}_{P/\mathcal{J}}$ necesitamos la orientación de la ranura. A 45° $\circlearrowright$, la configuración es como se muestra en el diagrama anexo. Nótese que el centro S de la ranura se mueve sobre un círculo centrado en O y que una tangente a este círculo en S debe pasar por P en todo momento, ya que P debe permanecer dentro de la ranura. Usando geometría y trigonometría obtenemos del diagrama:

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{7.07}{31.07}\right) = 12.8°$$

$$H = \frac{7.07}{\operatorname{sen}\gamma} = 31.9 \text{ plg}$$

$$\varphi + \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{24}{31.9}\right) = 41.2°$$

$$\varphi = 28.4°$$

Usando φ para formar $\mathbf{v}_{P/\mathcal{J}}$ en la Ec. (1), tendremos:

$$1.41\hat{\mathbf{i}} - 1.41\hat{\mathbf{j}} = v_{P/\mathcal{J}}(\operatorname{sen}28.4°\hat{\mathbf{i}} + \cos 28.4°\hat{\mathbf{j}}) + \mathbf{v}_{P'/\mathcal{J}}$$

en donde hemos usado el hecho de que conocemos la dirección pero no la magnitud de $\mathbf{v}_{P/\mathcal{J}}$. (Se mueve en la ranura según el ángulo calculado antes). Además, relacionando las velocidades de los puntos P' y O sobre $\mathcal{J}$, tenemos

$$\mathbf{v}_{P'/\mathcal{J}} = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_{O/\mathcal{J}}}} + \omega_{\mathcal{J}}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{OP'} = \omega_{\mathcal{J}}\hat{\mathbf{k}} \times (31.1\hat{\mathbf{i}} + 7.07\hat{\mathbf{j}})$$

o bien

$$\mathbf{v}_{P'/\mathcal{J}} = -7.07\omega_{\mathcal{J}}\hat{\mathbf{i}} + 31.1\omega_{\mathcal{J}}\hat{\mathbf{j}}$$

Sustituyendo e igualando los coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$ y de $\hat{\mathbf{j}}$, obtenemos:

Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$: $0.476v_{P/\mathcal{J}} - 7.07\omega_{\mathcal{J}} = 1.41$

Coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$: $0.880v_{P/\mathcal{J}} + 31.1\omega_{\mathcal{J}} = -1.41$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $v_{P/\mathcal{J}} = 1.61$, de modo que:

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{J}} = 1.61 \; \angle 28.4° \text{ plg./s}$$

$$\omega_{\mathcal{J}} = -0.0909 \text{ rad/s} \quad \text{o} \quad \omega_{\mathcal{J}} = 0.0909 \circlearrowright \text{ rad/s}$$

Al resolver los siguientes problemas se aconseja al estudiante comenzar por seleccionar cuidadosamente un punto cuyas velocidades en dos marcos se relacionen por medio de la Ec. (3.51).

Problemas / Sección 3.7

3.142 El bote $\mathcal{B}$ en la Fig. 3.142 parte de A y debe llegar a un punto B, 100 pie río abajo y sobre la orilla opuesta; el río tiene una velocidad de 5 pie/s. Si $\mathcal{B}$ puede moverse a 10 pie/s respecto al agua y si navega en línea recta de A a B, ¿Cuánto tiempo le tomará el viaje?

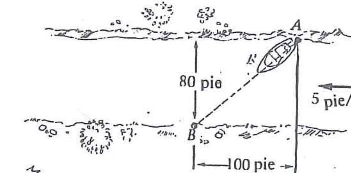


Figura P3.142

3.143 La barra $\mathcal{A}$ en la Fig. P3.143 gira en sentido horario con velocidad angular de 0.25 rad/s, empujando durante este movimiento a la barra $\mathcal{B}$. Encuentre $\omega_{\mathcal{B}}$ para el instante dado.

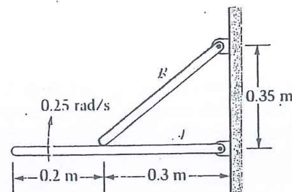


Figura P3.143

3.144 El cilindro $\mathcal{C}$ en la Fig. P3. 144 rueda sobre una superficie circular. Cuando se encuentra en el punto más bajo del círculo su velocidad angular es $\omega_{\mathcal{C}} = 0.2$ ↺ rad/s y su aceleración angular es $\alpha_{\mathcal{C}} = 0.02$ ↺ rad/s^2. La barra $\mathcal{B}$ está articulada a $\mathcal{C}$ en E y está también articulada a un bloque en P que se desliza en la guía de $\mathcal{S}$. La velocidad angular constante de $\mathcal{S}$ es de 0.3 ↺ rad/s. Encuentre la velocidad de P en $\mathcal{S}$ y la velocidad angular de $\mathcal{B}$ en el instante dado.

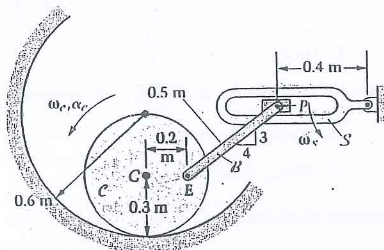


Figura P3.144

3.145 La barra $\mathcal{R}$ está articulada al techo en A y resbala sobre la cuña $\mathcal{W}$ en B. (Fig. P3.145). La cuña se mueve hacia la derecha con velocidad constante de 5 pie/s. Encuentre la velocidad angular de la barra en la posición mostrada.

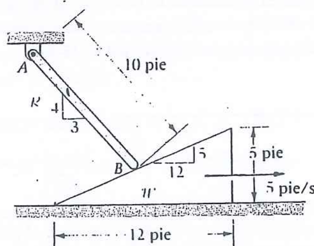


Figura P3.145

3.146 Según la notación del Ejemplo 3.24, demuestre que $\mathbf{v}_{Q/\mathcal{R}} = -\mathbf{v}_{T/\mathcal{B}}$.

3.147 La barra $\mathcal{B}$ se desliza a través de un casquillo o collarín unido al cuerpo $\mathcal{C}$ (Fig. P3.147) y está articulada en P a una segunda barra $\mathcal{R}$ · $\mathcal{R}$ y $\mathcal{C}$ están articuladas al marco de referencia como se muestra, y $\mathcal{R}$ gira con movimiento restringido y velocidad angular constante $\dot{\theta}_{\mathcal{R}} = 1$ rad/s, antihoraria. Encuentre la velocidad angular de $\mathcal{C}$ cuando el punto P está en la cima del círculo sobre el que viaja.

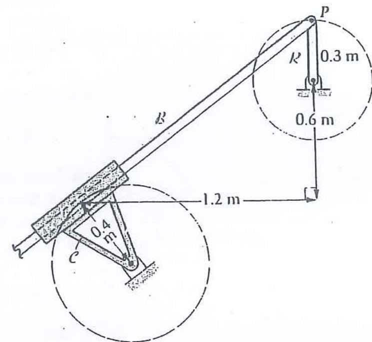


Figura P3.147

3.148 El tablón $\mathcal{P}$ resbala sobre el piso en A y sobre el bloque $\mathcal{D}$ en Q. El bloque $\mathcal{D}$ se mueve hacia la derecha con una velocidad constante de 6 pie/s, mientras que el extremo A del tablón se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 4 pie/s. Para la posición mostrada en la Fig. P3.148, encuentre la velocidad angular del tablín.

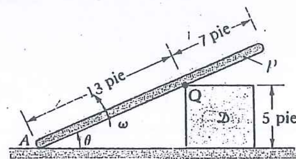


Figura P3.148

3.149 La barra $\mathcal{B}$ en la Fig. P3.149 tiene una velocidad angular de 5 ↺ rad/s. Está articulada a otra barra $\mathcal{R}$ que pasa a través de una ranura en $\mathcal{A}$ como se muestra. En el instante dado, encuentre la velocidad angular del cuerpo $\mathcal{A}$ y la velocidad de cualquier punto de $\mathcal{R}$ relativa a $\mathcal{A}$. *Sugerencia*: Todos los puntos de $\mathcal{R}$ se trasladan en $\mathcal{A}$; ¿que implica esto para las velocidades angulares de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{A}$?

3.150 Un mecanismo consiste de la manivela $\mathcal{C}$ articulada en O' balancín $\mathcal{R}$ articulado a O' y de un cuerpo pequeño $\mathcal{B}$ que está articulado a $\mathcal{C}$ y se desliza en la guía de $\mathcal{R}$. (Vea la Fig. P3.150). La longitud de $\mathcal{C}$ es $\ell = D/\sqrt{2}$ en donde

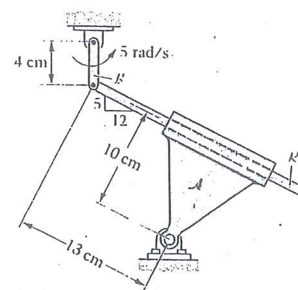


Figura P3.149

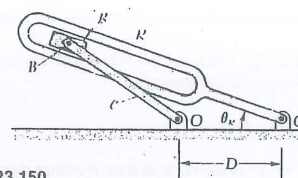


Figura P3.150

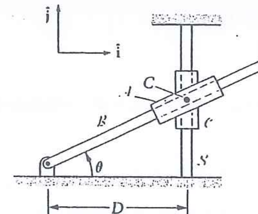


Figura P3.151

D es la distancia entre O y O'. Si $\mathcal{C}$ tiene velocidad angular constante $\omega_{\mathcal{C}}$ ↻ en un intervalo de su movimiento, encuentre $\omega_{\mathcal{R}}$ cuando: (a) $\theta_{\mathcal{R}} = \tan^{-1}(1/2)$ y (b) $\theta_{\mathcal{R}} = 90°$.

3.151 Los collarines $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ de la Fig. P3.151 están ambos articulados en C y se deslizan sobre las barras $\mathcal{B}$ y $\mathcal{S}$, respectivamente. La barra $\mathcal{B}$ tiene una velocidad angular constante $\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$ para $10° \le \theta \le 45°$. Encuentre la velocidad del punto C relativa a $\mathcal{B}$ en función de D, $\dot{\theta}$ y θ en este intervalo del ángulo

3.152 La Fig. P3.152 muestra una leva circular $\mathcal{B}_1$ y un seguidor $\mathcal{B}_2$ de cara plana en traslación. Si $\mathcal{B}_1$ gira con velocidad angular constante ω_0 ↺ encuentre la máxima velocidad en el marco $\mathcal{F}$ de cualquier punto de $\mathcal{B}_2$, en términos de ω_0, y de la excentricidad δ.

* 3.153 La Fig. P3.153 ilustra un "mecanismo de Ginebra" en el que el disco $\mathcal{A}$ es guiado con velocidad angular constante antihoraria y produce un movimiento rotacional intermitente (echando a andar deteniéndose, esperando y así ciclicamente) del disco ranurado $\mathcal{B}$. El pasador P está fijo en $\mathcal{A}$ y guía al disco $\mathcal{B}$ presionando sobre las superficies de las ranuras. Demuestre con el uso de la Ec. (3.51) que el disco $\mathcal{B}$ tendrá velocidad angular nula en las dos posiciones mostradas, una velocidad angular variable entre esas posiciones y velocidad angular nula mientras P está retornando a la posición $\theta = 135°$. Note que la operación del mecanismo requiere que la distancia entre O y O' sea $\sqrt{2}R$.

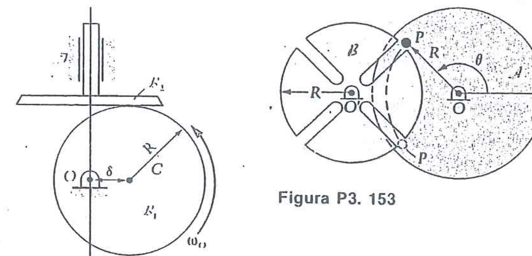


Figura P3.152

Figura P3. 153

* 3.154 En el problema anterior sea $R = 0.1$ m y $\dot{\theta}_{\mathcal{A}} = 5$ ↺ rad/s = constante. Encuentre la velocidad angular del cuerpo ranurado $\mathcal{B}$ en el instante en que $\theta = 160°$.

* 3.155 Las barras $\mathcal{R}$ y $\mathcal{L}$ en la Fig. P3.155 están articuladas en O y en O' el marco de referencia $\mathcal{F}$. La barra $\mathcal{L}$ está también articulada al cuerpo ranurado $\mathcal{B}$ en B. El extremo superior de $\mathcal{R}$ está articulado en P a un rodillo que se mueve libremente en la ranura de $\mathcal{B}$. Las velocidades angulares de la barra $\mathcal{R}$ y del eslabón $\mathcal{L}$ son constantes:

$$\omega_{\mathcal{R}} = 0.2 \ \text{↻ rad/s}$$

$$\omega_{\mathcal{L}} = 0.4 \ \text{↻ rad/s}$$

Determine la velocidad de P en $\mathcal{B}$ y la velocidad angular de $\mathcal{B}$ en el instante dado.

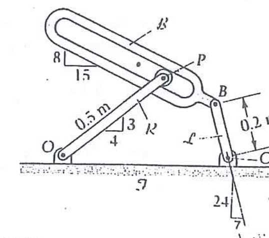


Figura P3.155

* 3.156 En la Fig. P3.156 el collarín $\mathcal{C}$ está fijo al brazo $\mathcal{A}$ y desliza a lo largo de la barra $\mathcal{R}$. El brazo $\mathcal{A}$ está articulado

a un segundo collarín $\mathcal{R}$ en $\mathcal{A}$; este collarín desliza sobre la barra $\mathcal{L}$. En el instante dado, $\omega_{\mathcal{R}} = 0.2$ ⟲ rad/s, $\omega_{\mathcal{L}} = 0.1$ ⟲ rad/s y la velocidad de todos los puntos de $\mathcal{C}$ relativa a la barra $\mathcal{R}$ es de 0.3 m/s hacia afuera (a lo largo de OC). Dé por inspección, la velocidad angular de $\mathcal{A}$ y encuentre la velocidad de los puntos de $\mathcal{K}$ relativa a $\mathcal{L}$.

3.157 Demuestre que la Ec. (3.8) para la velocidad de un cuerpo rígido puede deducirse de la Ec. (3.49). *Sugerencia:* Fije P a $\mathcal{B}$ y la ecuación relacionará las velocidades en $\mathcal{I}$ de los dos puntos P y O' de $\mathcal{B}$.

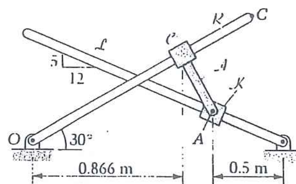


Figura P3.156

3.8 Relación entre las aceleraciones de un punto con respecto a dos marcos de referencia diferentes

Obtendremos ahora la ecuación compañera de la Ec. (3.49) que va a relacionar las aceleraciones de P en $\mathcal{I}$ y en $\mathcal{B}$. Derivando la Ec. (3.49) en $\mathcal{I}$ obtenemos

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{v}}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{a}_{O'/\mathcal{I}} + \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{O'P} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} \tag{3.52}$$

Usando la Ec. (3.44) para "mover la derivada" en el primero y último término del segundo miembro de la Ec. (3.52) se obtiene

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} = ({}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{v}}_{P/\mathcal{B}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}) + \mathbf{a}_{O'/\mathcal{I}} + \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{O'P} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times ({}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{O'P}) \tag{3.53}$$

Observando que ${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} = \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$ y que ${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{v}}_{P/\mathcal{B}} = \mathbf{a}_{P/\mathcal{B}}$ y reagrupando términos obtenemos de la Ec. (3.53):

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{a}_{P/\mathcal{B}} + (\mathbf{a}_{O'/\mathcal{I}} + \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{O'P} - \dot{\theta}^2\mathbf{r}_{O'P}) + 2\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} \tag{3.54}$$

en donde $\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times (\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{O'P}) = -\dot{\theta}^2\mathbf{r}_{O'P}$ como ya vimos en la sección 3.5.

El término en paréntesis en la Ec. (3.54) es igual, según la Ec. (3.19), a $\mathbf{a}_{P'/\mathcal{I}}$, en donde, como antes, P' es el punto de $\mathcal{B}$ (ó $\mathcal{B}$ extendido) coincidente con P. Por lo tanto se tiene el siguiente resultado:

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{a}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{a}_{P'/\mathcal{I}} + 2\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} \tag{3.55}$$

En palabras: La aceleración de P en $\mathcal{I}$ es igual a su aceleración en $\mathcal{I}$, más la aceleración en $\mathcal{B}$ del punto de $\mathcal{B}$ coincidente con P, más la **aceleración de Coriolis**, $2\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$.
La aceleración de Coriolis proporciona una diferencia esencial inesperada entre las formas de las Ecs. (3.51) y (3.55).

Pregunta 3.19 Si derivamos la Ec. (3.51) en vez de la (3.49) obtendríamos (*erróneamente*)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} &= {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{v}}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{a}_{P'/\mathcal{I}} \\ &= {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{v}}_{P/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{a}_{P'/\mathcal{I}} \\ &= \mathbf{a}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{a}_{P'/\mathcal{I}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}\end{aligned}$$

faltando la mitad del término de Coriolis. ¿Por qué está mal esta derivación?

Igual que hicimos con las velocidades, podemos simplificar la notación de la Ec. (3.54) si sólo se tiene un "marco móvil" ($\mathcal{B}$) que esté en movimiento, relativo al marco de referencia ($\mathcal{I}$):

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} \tag{3.56}$$

En esta ecuación, $\mathbf{a}_P$ y $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ son las aceleraciones respectivas de P en $\mathcal{I}$ y en $\mathcal{B}$. Los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{I}$ (iguales a $\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$ y $\ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$) y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{O'P}$ (el vector de posición de P en el "marco móvil"). Veremos ahora algunos ejemplos que muestran el uso de las Ecs. (3.54) y (3.55).

Ejemplo 3.26

Obtener la aceleración en el marco $\mathcal{I}$ de la avispa del Ejemplo 3.22.

Solución

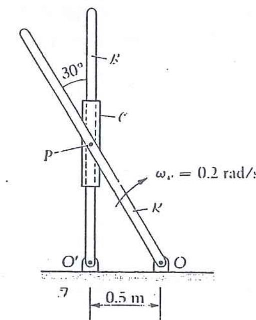
Usando la Ec. 3.54 obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{Y/\mathcal{I}} &= \mathbf{a}_{Y/\mathcal{B}} + (\mathbf{a}_{O'/\mathcal{I}} + \ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{O'Y} - \dot{\theta}^2\mathbf{r}_{O'Y}) + 2\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_{Y/\mathcal{B}} \\ &= 0 + 0 + 0 - \left(\frac{10\pi}{9}\right)^2(r\hat{\mathbf{i}}) + 2\left(\frac{10\pi}{9}\hat{\mathbf{k}}\right) \times 2\hat{\mathbf{i}} \\ &= -\frac{100\pi^2}{81}r\hat{\mathbf{i}} + \frac{40\pi}{9}\hat{\mathbf{j}} \text{ plg/s}^2\end{aligned}$$

El "término en $\hat{\mathbf{j}}$" en este Ejemplo es la aceleración de Coriolis. Nótese que la avispa tiene dos componentes de aceleración no nulas a pesar de que aquí $\ddot{r}$ y $\ddot{\theta}$ son ambas igual a cero.

Ejemplo 3.27

Si en el Ejemplo 3.23 tenemos el dato adicional de que $\alpha_{\mathcal{R}} = 0.25\hat{\mathbf{k}}$ rad/s² en el instante dado, encuentre $\alpha_{\mathcal{B}}$ y $\mathbf{a}_{P/\mathcal{B}}$. (Vea el diagrama).



Solución

Relacionando las aceleraciones de P en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{I}$, tendremos

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{a}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{a}_{O'/\mathcal{I}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r}_{O'P} - \omega_{\mathcal{B}}^2 \mathbf{r}_{O'P} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$$

$$\overbrace{\underbrace{\mathbf{a}_{O/\mathcal{I}}}_{\text{cero}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{R}} \times \mathbf{r}_{OP} - \omega_{\mathcal{R}}^2 \mathbf{r}_{OP}}^{\text{en } \mathcal{R}} = a_{P/\mathcal{B}}\hat{\mathbf{j}} + \underbrace{\mathbf{a}_{O'/\mathcal{I}}}_{\text{cero}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r}_{O'P} - \omega_{\mathcal{B}}^2 \mathbf{r}_{O'P} + 2(-0.2\hat{\mathbf{k}}) \times (0.1\hat{\mathbf{j}})$$

en donde las respuestas al Ejemplo 3.23 se usan en el término de Coriolis. Sustituyendo valores obtenemos

$$0.25\hat{\mathbf{k}} \times (-0.5\hat{\mathbf{i}} + 0.866\hat{\mathbf{j}}) - 0.04(-0.5\hat{\mathbf{i}} + 0.866\hat{\mathbf{j}})$$
$$= a_{P/\mathcal{B}}\hat{\mathbf{j}} + \alpha_{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{k}} \times 0.866\hat{\mathbf{j}} - 0.04(0.866\hat{\mathbf{j}}) + 0.04\hat{\mathbf{i}}$$

Coeficientes $\hat{\mathbf{i}}$: $\quad -0.217 + 0.02 = -0.866\alpha_{\mathcal{B}} + 0.04$

$$\alpha_{\mathcal{B}} = 0.274 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}} = 0.274\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2$$

Coeficientes $\hat{\mathbf{j}}$: $\quad -0.125 - 0.0346 = a_{P/\mathcal{B}} - 0.0346$

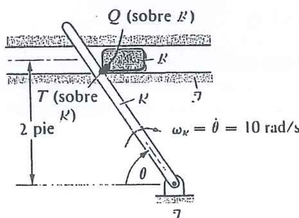
$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{B}} = -0.125\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}^2$$

El punto P se va deteniendo al moverse hacia afuera sobre $\mathcal{B}$ y también $\mathcal{B}$ se va deteniendo al girar en sentido horario.

El lector debe notar en este ejemplo que $\alpha_{\mathcal{C}}$ y $\alpha_{\mathcal{B}}$ son idénticas. El collarín obliga a los dos cuerpos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ a trasladarse relativamente entre ellos de modo que, como se señaló al final del Ejemplo 3.23, $\omega_{\mathcal{B}} \equiv \omega_{\mathcal{C}}$. Diferenciando esta ecuación, vemos que las aceleraciones angulares son también siempre iguales.

Ejemplo 3.28

Supóngase que en el instante dado ($\theta = 60°$) en el Ejemplo 3.24 todos los datos son los mismos y que además $\alpha_{\mathcal{R}} = 30$ ↺ rad/s². Se trata de encontrar la aceleración del bloque $\mathcal{B}$ (vea el diagrama anexo).



Solución

Nótese que si de nuevo usamos Q como el punto (del bloque $\mathcal{B}$) que se está moviendo relativamente a dos cuerpos ($\mathcal{R}$ y $\mathcal{I}$), conocemos entonces la dirección de $\mathbf{a}_{Q/\mathcal{R}}$. (Es a lo *largo* de $\mathcal{R}$ ya que Q se mueve en *línea recta* sobre $\mathcal{R}$. Sin embargo no conocemos la dirección de la aceleración $\mathcal{B}$ del punto T de la barra $\mathcal{R}$.

La Ec. (3.54) da entonces

$$\mathbf{a}_{Q/\mathcal{I}} = \mathbf{a}_{Q/\mathcal{R}} + \mathbf{a}_{Q'/\mathcal{I}} + 2\omega_{\mathcal{R}}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_{Q/\mathcal{R}}$$

Notando que el punto Q' es el punto T, obtenemos

$$a_{Q/\mathcal{I}}\hat{\mathbf{i}} = a_{Q/\mathcal{R}}\left(-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}}\right) + (\overset{0}{\mathbf{a}_O} + \overset{30}{\alpha_{\mathcal{R}}}\hat{\mathbf{k}} \times \overbrace{\mathbf{r}_{OP}}^{\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}\right)} - \overset{10^2}{\omega_{\mathcal{R}}^2}\mathbf{r}_{OP})$$
$$+ 2(-10\hat{\mathbf{k}}) \times \left(\frac{40}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

Este resultado proporciona las siguientes ecuaciones escalares en las componentes $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$:

Coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$: $\quad 0 = a_{Q/\mathcal{R}}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{60}{\sqrt{3}} - 200 + \dfrac{800}{6}$

$$a_{Q/\mathcal{R}} = 117 \text{ plg./s}^2$$

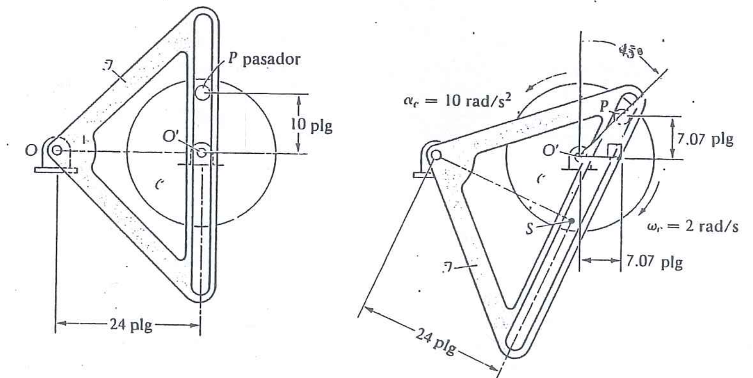
Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$: $\quad a_{Q/\mathcal{I}} = 117\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 60 + \dfrac{200}{\sqrt{3}} + \dfrac{800}{6}\sqrt{3}$

La aceleración del bloque en traslación es entonces:

$$\mathbf{a}_{Q/\mathcal{I}} = a_{Q/\mathcal{I}}\hat{\mathbf{i}} = 228\hat{\mathbf{i}} \text{ plg./s}^2$$

Ejemplo 3.29

Si en el Ejemplo 3.25 agregamos $\alpha_{\mathcal{C}} = 10$ ↺ rad/s² a los datos, hallaremos la aceleración angular de $\mathcal{I}$ y la aceleración de P relativa a $\mathcal{I}$. (Ver el diagrama anexo).



Solución



De nuevo aplicamos la Ec. (3.55):

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} + \mathbf{a}_{P'/\mathcal{I}} + 2\omega_{\mathcal{I}}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{I}}$$

$$\overset{0}{\cancel{\mathbf{a}_{O'/\mathcal{I}}}} + \overset{10}{\alpha_{\mathcal{C}}}\hat{\mathbf{k}} \times \overset{(7.07\hat{\mathbf{i}} + 7.07\hat{\mathbf{j}})}{\cancel{\mathbf{r}_{O'P}}} - \overset{2^2}{\cancel{\omega_{\mathcal{C}}^2}}\mathbf{r}_{O'P} = a_{P/\mathcal{I}}(\text{sen}\, 28.4°\hat{\mathbf{i}} + \cos 28.4°\hat{\mathbf{j}}) + \overset{0}{\cancel{\mathbf{a}_{O'/\mathcal{I}}}}$$

$$+ \alpha_{\mathcal{I}}\hat{\mathbf{k}} \times (31.1\hat{\mathbf{i}} + 7.07\hat{\mathbf{j}}) - \overset{0.091^2}{\cancel{\omega_{\mathcal{I}}^2}}(31.1\hat{\mathbf{i}} + 7.07\hat{\mathbf{j}})$$

$$+ 2(-0.091\hat{\mathbf{k}}) \times 1.62(\text{sen}\, 28.4°\hat{\mathbf{i}} + \cos 28.4°\hat{\mathbf{j}})$$

e igualamos los coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$ y de $\hat{\mathbf{j}}$:

Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$: $-99.0 = 0.476a_{P/\mathcal{I}} - 7.07\alpha_{\mathcal{I}} - 0.258 + 0.259$

Coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$: $42.4 = a_{P/\mathcal{I}}(0.880) + 31.1\alpha_{\mathcal{I}} - 0.0586 - 0.140$

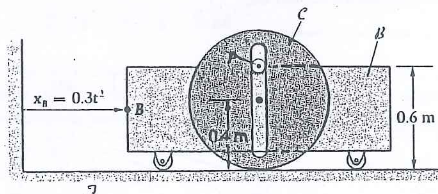
Resolviendo estas ecuaciones resulta que $\alpha_{\mathcal{I}} = 5.12$ rad/s², de modo que

$$\alpha_{\mathcal{I}} = 5.12 \circlearrowleft \text{rad/sec}^2$$

$$a_{P/\mathcal{I}} = -132 \text{ plg./s}^2 \text{ o } \mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} = 132 \angle 28.4° \text{ plg./s}^2$$

Ejemplo 3.30

El pasador P en el diagrama está unido al carro $\mathcal{B}$ y se desliza en la ranura lisa de la rueda $\mathcal{C}$; ésta rueda sobre el plano rugoso $\mathcal{I}$. La posición del carro está dada por $x_B = 0.3t^2$, con x_B en metros cuando t está en segundos. Encuentre $\omega_{\mathcal{C}}$ y $\alpha_{\mathcal{C}}$ en el instante dado ($t = 3$ s) y determine la aceleración de P en la ranura en este momento.



Solución



Ya que $x_B = 0.3t^2$, tenemos que $\mathbf{v}_B = 0.6\,t\hat{\mathbf{i}}$ y $\mathbf{a}_B = 0.6\,\hat{\mathbf{i}}$; estos valores corresponden a los vectores velocidad y aceleración de todos los puntos del carro $\mathcal{B}$, en particular de P. En $t = 3$ s, tenemos $\mathbf{v}_B = 1.8\hat{\mathbf{i}}$ m/s y $\mathbf{a}_B = 0.6\hat{\mathbf{i}}$ m/s².

Relacionando las velocidades de P en los marcos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{I}$, obtenemos:

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{v}_{P/\mathcal{C}} + \mathbf{v}_{P'/\mathcal{I}}$$

$$v_B\hat{\mathbf{i}} = v_{P/\mathcal{C}}\hat{\mathbf{j}} + 0.6\omega_{\mathcal{C}}\hat{\mathbf{i}}$$

Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$: $v_B = 1.8 = 0.6\omega_{\mathcal{C}} \Rightarrow \omega_{\mathcal{C}} = 3 \circlearrowright$ rad/s

Coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$: $v_{P/\mathcal{C}} = 0$

Relacionando las aceleraciones por medio de la Ec. (3.54) obtenemos:

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{a}_{P/\mathcal{C}} + \underbrace{\mathbf{a}_{P'/\mathcal{I}}} + 2\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{I}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{C}}$$

$$a_B\hat{\mathbf{i}} = a_{P/\mathcal{C}}\hat{\mathbf{j}} + \overbrace{0.6\alpha_{\mathcal{C}}\hat{\mathbf{i}} + 0.2\omega_{\mathcal{C}}^2\hat{\mathbf{j}}} + 0$$

Nótese que hemos relacionado P' (el punto de $\mathcal{C}$ extendido coincidente con P) y el centro de $\mathcal{C}$ (o sea C) para obtener:

$$\mathbf{a}_{P'/\mathcal{I}} = \mathbf{a}_C + \alpha_{\mathcal{C}}\hat{\mathbf{k}} \times \overset{-0.2\hat{\mathbf{j}}}{\cancel{\mathbf{r}_{CP'}}} - \omega_{\mathcal{C}}^2\mathbf{r}_{CP'}$$

$$= \overset{0.4}{\cancel{R}}\alpha_{\mathcal{C}}\hat{\mathbf{i}} + 0.2\alpha_{\mathcal{C}}\hat{\mathbf{i}} + 0.2\omega_{\mathcal{C}}^2\hat{\mathbf{j}}$$

$$= 0.6\alpha_{\mathcal{C}}\hat{\mathbf{i}} + 0.2\omega_{\mathcal{C}}^2\hat{\mathbf{j}}$$

Resolviendo las ecuaciones se tiene:

Coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$: $a_B = 0.6 = 0.6\alpha_{\mathcal{C}} \Rightarrow \alpha_{\mathcal{C}} = 1 \circlearrowright$ rad/s²

Coeficientes de $\hat{\mathbf{j}}$: $a_{P/\mathcal{C}} = -0.2\omega_{\mathcal{C}}^2 = -0.2(3^2) = -1.8$ m/s²

La aceleración de P en la ranura (que es su aceleración en $\mathcal{C}$) es de 1.8 ↑ m/s²; es hacia arriba porque la supusimos en la dirección positiva de y (↓) y obtuvimos una respuesta negativa. Nótese que aunque P está momentáneamente en reposo en la ranura ($v_{P/C} = 0$), tiene que "estar listo", para moverse hacia afuera ya que $\mathcal{B}$ se está trasladando hacia la derecha y $\mathcal{C}$ está rodando en esa dirección. Esto es lo que significa $\mathbf{a}_{P/C} = 1.8 \uparrow$ m/s².

Problemas / Sección 3.8

3.158 Un insecto $\mathcal{B}$ se arrastra hacia afuera con rapidez uniforme, relativa al brazo en rotación, de 3 pie/s. En la posición mostrada en la Fig. P3.158, $\omega = 2$ rad/s y $\alpha = 4$ rad/s², ambas antihorarias ¿Cuál es la aceleración del insecto? Indique la dirección en un croquis.

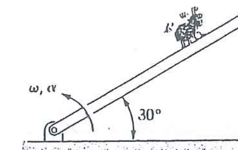


Figura P3.158

3.159 El mecanismo mostrado en la Fig. P3.159 se usa para levantar y bajar el martinete $\mathcal{H}$. La manivela $\mathcal{C}$ de 26 cm de longitud gira en sentido horario a 30 rpm constantes. Está articulada al bloque $\mathcal{B}$ que se desliza en una guía en $\mathcal{H}$.

Si en $t = 0$ el punto A está directamente arriba de O, encuentre la velocidad y la aceleración de $\mathscr{H}$ en función del tiempo. (El bloque y el martinete están ligeramente situados a un lado de $\mathscr{C}$ para no interferir con el pasador en O).

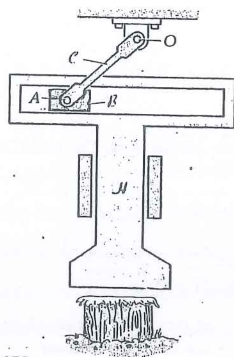


Figura P3.159

3.160 La barra $\mathscr{A}$ en la Fig. P3.160 tiene una velocidad angular de 0.25 ⟲ rad/s y una aceleración angular de 0.15 ⟲ rad/s² en el instante dado. Encuentre la aceleración angular de $\mathscr{B}$ en este momento (Vea el Problema 3.143).

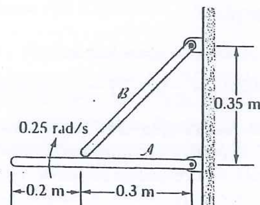


Figura P3.160

3.161 En el Problema 3.144 encuentre la aceleración de P en $\mathscr{S}$ y la aceleración angular de $\mathscr{B}$.

3.162 En el Problema 3.155 encuentre, para el mismo instante, la aceleración de P en $\mathscr{B}$ y la aceleración angular de $\mathscr{B}$.

3.163 En la Fig. P3.163,

$$\mathbf{v}_A = 4 \rightarrow \text{plg/sec} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt}|\mathbf{v}_A| = 3 \text{ plg/s}^2$$

Si la barra permanece en contacto con el escalón y con la superficie curva, encuentre su aceleración angular. *Sugerencia*: Considere el punto Q (fijo al escalón) como el "punto móvil" y note que Q se mueve sobre una recta relativa a la barra.

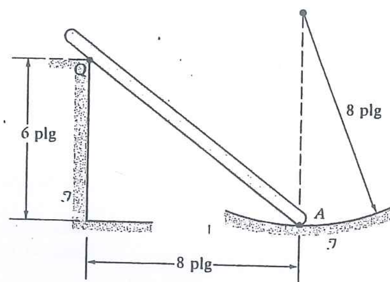


Figura P3.163

3.164 En el Problema 3.151 determine la aceleración de C relativa a $\mathscr{B}$ como función de D, θ y $\dot{\theta}$.

3.165 Las barras $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ (Fig. P3.165) pasan libremente a través de los collarines cortos, que pueden girar entre sí gracias a la conexión de rótula mostrada. Si las barras $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ giran con velocidades angulares constantes de 0.4 ⟲ rad/s y de 0.2 ⟳ rad/s respectivamente, encuentre la velocidad y la aceleración de la conexión con respecto a $\mathscr{A}$ y a $\mathscr{B}$ en la posición indicada.

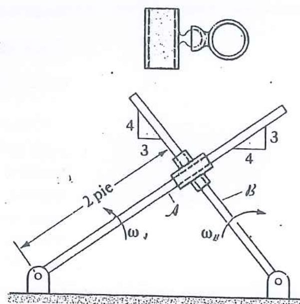


Figura P3.165

* 3.166 La rueda $\mathscr{W}$ en la Fig. P3.166 tiene una velocidad angular horaria constante de 2 rad/s. Está conectada por el eslabón $\mathscr{L}$ al bloque $\mathscr{E}$. El extremo B de la barra $\mathscr{R}$ desliza en una ranura vertical en el bloque $\mathscr{E}$. Para la posición mostrada, encuentre la velocidad angular y la aceleración angular de la barra $\mathscr{R}$ si el bloque $\mathscr{E}$ se traslada.

* 3.167 Ampliando el Problema 3.149 suponga que la velocidad angular de la barra $\mathscr{B}$, 5 ⟲ rad/s, es constante (Fig. P3.167). Encuentre para el instante dado, la aceleración angular de $\mathscr{A}$ y la aceleración de cualquier punto de $\mathscr{R}$ relativa a $\mathscr{A}$.

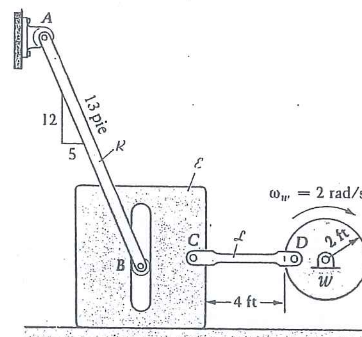


Figura P3.166

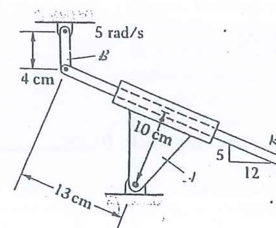


Figura P3.167

3.168 Con referencia al Ejemplo 3.28 para el significado de los símbolos, muestre que $\mathbf{a}_{Q/\mathscr{R}} \neq -\mathbf{a}_{T/\mathscr{R}}$.

* 3.169 Un tornamesa circular $\mathscr{T}$ (Fig. P3.169) gira alrededor de un eje vertical que pasa por O (normal al plano de la página) con θ variando con razón constante ω_0. Un bloque $\mathscr{B}$ descansa en una ranura del tornamesa. Si se tira el cordón con velocidad constante v relativa a $\mathscr{T}$, encuentre expresiones para las componentes radial y transversal de la aceleración del bloque. Revise sus respuestas usando la expresión para la aceleración en coordenadas cilíndricas.

3.170 Demuestre que la Ec. (3.19) para la aceleracion de un cuerpo rígido puede *deducirse* de la Ec. (3.54). *Sugerencia*: Si se fija P a $\mathscr{B}$, la ecuación relacionará entonces las aceleraciones en $\mathscr{T}$ de los dos puntos P y O' de $\mathscr{B}$.

* 3.171 En el Problema 3.153, sea $R = 0.1$ m y $\ddot{\theta}_{\mathscr{A}} = 5$ rad/s, como en el Problema 3.154. Esta vez, también para $\theta = 160°$ encuentre: (a) la aceleración angular de $\mathscr{A}$ y (b) la aceleración de P en $\mathscr{B}$ $(= \mathbf{a}_{P/\mathscr{B}})$.

* 3.172 La barra $\mathscr{R}$ de 26 pie de longitud en la Fig. P3.172 desliza sobre una superficie plana en A y sobre el medio cilindro fijo en Q, como se muestra. Si el extremo A se mueve con velocidad constante de 4 pie/s hacia la derecha sobre el plano, determine la componente vertical de la aceleración de B para la posición mostrada.

* 3.173 El pasador P en la Fig. P3.173 se mueve a lo largo de una trayectoria curva y es controlado por los movimientos de los eslabones ranurados $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$. En el instante mostrado, cada punto de $\mathscr{B}$ tiene una velocidad de 5 pie/s y una aceleración de 20 pie/s², ambas hacia la derecha, mientras que cada punto de tiene una velocidad de 3 pie/s y una aceleración de 30 pie/s² en la dirección mostrada en la figura. Encuentre el radio de curvatura de la trayectoria de P en esta posición.

* 3.174 Suponga que un punto P se mueve en el plano XY, en donde X y Y están fijos en un marco de referencia $\mathscr{G}$. (Vea la Fig. P3.174). El marco $\mathscr{T}$ gira a $\boldsymbol{\omega}_{\mathscr{T}/\mathscr{G}} = \dot{\phi}\hat{\mathbf{k}}$ con respecto a $\mathscr{G}$, en donde ϕ se mide como se muestra, tal que la tangente al círculo que toca el eje y siempre pasa por P. Encuentre la velocidad y la aceleración de P en $\mathscr{G}$ expresadas en función de sus componentes en ϕ.

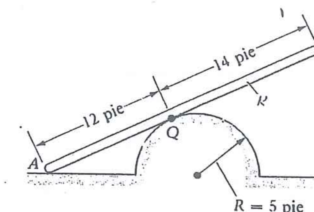


Figura P3.172

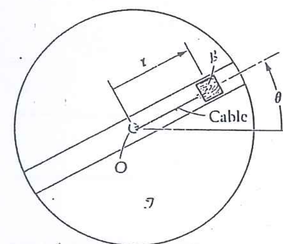


Figura P3.169

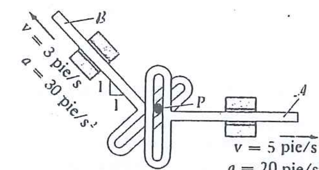


Figura P3.173

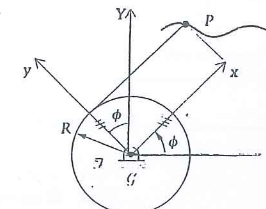


Figura P3.174

* 3.175 En el Problema anterior sea P una partícula en el extremo de una cuerda que está enrollada alrededor del círculo de radio a. Muestre que en un tiempo cualquiera, $x = \ell +$, en donde ℓ es la longitud no enrollada en el inicio, cuando $\phi = 0$, como se muestra en la Fig. P3.175. Luego especifique las respuestas al problema anterior para la velocidad y la aceleración de P en $\mathcal{G}$ para este caso especial.

* 3.176 Considerando el centro instantáneo Ⓘ de la barra en la Fig. P3.176 como un punto de $\mathcal{B}$ extendido, encuentre la aceleración de Ⓘ en el instante mostrado si $\mathbf{v}_A = 2\hat{\imath}$ plg/s = constante. Encuentre también la aceleración del punto B' de $\mathcal{B}$ pasando sobre el pasador y note que no está a lo largo de la ranura.

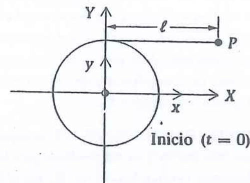


Figura P3.175

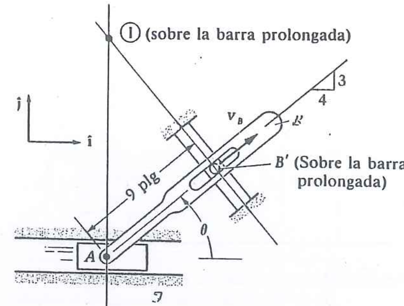


Figura P3.176

Problemas para computadora / Capítulo 3

* 3.177 La manivela $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.177 gira con una velocidad angular constante horaria ω. Demuestre que la velocidad del pistón es máxima cuando θ satisface la ecuación

$$\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{(\ell_2/\ell_1)^2 - \operatorname{sen}^2\theta}} + \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4[(\ell_2/\ell_1)^2 - \operatorname{sen}^2\theta]^{3/2}} = 0$$

Encuentre con ayuda de una computadora la primera raíz de esta ecuación cuando las longitudes de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son 8 cm y 20 cm respectivamente. Note que la respuesta es independiente del valor de ω. Se sugiere al lector leer el Apéndice B y hacer uso del método de Newton-Raphson descrito ahí.

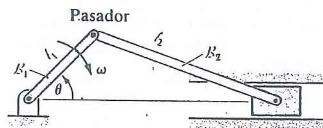


Figura P3.177

* 3.178 La manivela $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P3.178 gira con velocidad angular constante $\dot{\theta}\hat{k}$. Use una computadora para generar los datos para una gráfica de las siguientes dos cantidades como funciones de θ para el caso en que $D = 2\ell$:

a. El ángulo φ que localiza al brazo $\mathcal{B}_2$.
b. La relación $\dot{\varphi}/\dot{\theta}$ de las velocidades angulares de $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_1$.

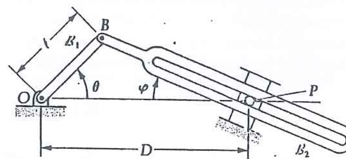


Figura P3.178

Respuestas a las Preguntas / Capítulo 3

P3.1 Se necesitan tres puntos no colineales.

P3.2 Si en algún momento $x_A \neq x_B$ o bien $y_A \neq y_B$ (o ambos), la hipótesis del cuerpo rígido o las hipótesis del movimiento plano (o ambas) se habrán infringido.

P3.3 No; el cuerpo podría girar alrededor de la recta que une los dos puntos. En tres dimensiones se requieren tres puntos, no todos sobre la misma recta.

P3.4 Las $2 \times 2 = 4$ coordenadas de P_1 y P_2 no son independientes. La distancia entre los puntos es una constante; entonces

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \text{constante}$$

puede usarse para encontrar cualquiera de los valores x_1, y_1, x_2, y_2 en términos de los otros tres.

P3.5 Porque $\mathcal{B}$ es rígido, r_{PQ} es la distancia *constante* entre los puntos P y Q.

P3.6 (a) No; (b) sí, porque la geometría sería diferente.

P3.7 La derivada de $\dot{\theta}\hat{k} \times \mathbf{r}_{PQ}$ **no es cero meramente porque** $\dot{\theta}$ **se anule cero en un instante particular. Para poder diferenciar** $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P$, esta ecuación debe ser válida para todo valor de t y *no* para sólo uno.

P3.8 Si $\dot{\theta} = 0$, la Ec. (3.8) afirma que $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P$; o sea todos los puntos de $\mathcal{B}$ tienen el *mismo* vector velocidad. Este vector común es entonces cero sólo si el cuerpo está en reposo. Incidentalmente, hay quien considera que $\mathcal{B}$ tiene un centro instantáneo Ⓘ en el infinito cuando $\dot{\theta} = 0$.

P3.9 Si el punto Ⓘ estuviese arriba de Q, entonces $\omega \times \mathbf{r}_{ⒾQ}$ daría una dirección incorrecta para la velocidad $\mathbf{v}_Q$; sería opuesta a la dirección real. Los sentidos de $\mathbf{v}_Q$ y ω cuando se observan desde Ⓘ deben coincidir, como señalamos posteriormente en la sección.

P3.10 La dirección conocida de la velocidad de Aimplica que $\mathcal{B}_2$ está girando en sentido horario alrededor de Ⓘ, por lo que $\mathbf{v}_B$ *tiene que ser "suroeste" para que tal sea el caso.*

P3.11 Porque $\mathbf{r}_{PQ}$ está en el plano de referencia (xy) y es por tanto perpendicular a $\hat{k}$.

P3.12 Significa que la rapidez angular del cuerpo está decreciendo.

P3.13 Entonces tendríamos $\dot{x}_C = -r\dot{\theta}$.

P3.14 De la Fig. 3.13 podemos ver exactamente cuando la componente de $\mathbf{a}_B$ normal a la recta AB está dada por $r_{AB}\,\alpha$: es cuando $\mathbf{a}_A$ no tiene componente normal a AB. (Tal resultado no requiere que A sea el punto Ⓘ.)

P3.15 Si; esto se evidenciará al resultar a_B negativa. Nótese que (a_B negativa)$\cdot$ $[(8\hat{\imath} - 15\hat{\jmath})/17]$ es lo mismo que: (a_B positiva)$\cdot$ $[(-8\hat{\imath} + 15\hat{\jmath})/17]$.

P3.16 (a) No es $\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}}$ porque el origen del vector de posición no está fijo en $\mathcal{I}$; (b) y no es $\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$ porque la derivada de $\mathbf{r}_{OP}$ no está tomada en $\mathcal{B}$.

P3.17 ¡Definitivamente no! Esto fue así debido a la geometría en el instante dado.

P3.18 Sí, siempre que reconozcamos que la dirección de $\mathbf{v}_{T/\mathcal{B}}$ es a lo largo del eje de la barra (Vea el Problema 3.146). O sea $\mathbf{v}_{T/\mathcal{B}}$ debe ser tangente a la superficie en que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{B}$ se tocan. Es importante darse cuenta que la trayectoria de Q en $\mathcal{R}$ es una línea recta pero que la de T en $\mathcal{B}$ no lo es. Entonces $\mathbf{a}_{T/\mathcal{B}}$ *no* tendría la dirección del eje de $\mathcal{R}$.

P3.19 El error es que la derivada ${}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{v}}_{P'/\mathcal{I}}$ no es igual a $\mathbf{a}_{P'/\mathcal{I}}$, porque P' denota una *sucesión de puntos* de $\mathcal{B}$ que son en cada instante coincidentes con P.

Cuestionario de repaso Capítulo 3

¿Verdadero o falso?

En estas preguntas, P y Q son puntos en el plano de referencia de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento plano.

1. En un cuerpo rígido en movimiento plano con velocidad angular $\dot{\theta}\hat{k}$, se tiene que $\dot{\theta}$ depende de una cierta selección de puntos cuyas velocidades deben estar relacionadas.

2. En un cuerpo rígido en movimiento plano hay siempre un centro instantáneo Ⓘ de velocidad nula localizado a una distancia finita del cuerpo.
3. $\mathbf{a}_{Ⓘ}$ no es necesariamente cero.
4. $\mathbf{v}_P = \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{ⒾP}$ si la velocidad angular de $\mathcal{B}$ no es cero.
5. En un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en traslación rectilínea, las velocidades de todos los puntos de $\mathcal{B}$ son iguales y también las aceleraciones.
6. En un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en traslación curvilínea, las velocidades de todos los puntos de $\mathcal{B}$ son iguales, pero las aceleraciones no lo son.
7. En un instante dado, cualquier punto puede considerarse localizado sobre una extensión rígida de cualquier cuerpo.
8. El menor número de parámetros escalares requeridos para localizar un cuerpo rígido en movimiento plano es cuatro.
9. Para un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento plano

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{QP}$$

10. Un punto P puede tener velocidad angular.
11. Las componentes de $\mathbf{v}_P$ y $\mathbf{v}_Q$ a lo largo de la recta PQ no son siempre iguales.
12. Las componentes de $\mathbf{a}_P$ y $\mathbf{a}_Q$ a lo largo de la recta PQ no son siempre iguales.

Respuestas: 1 F; 2 F; 3 V; 4 V; 5 V; 6 F; 7 V; 8 F; 9 V; 10 F; 11 F; 12 V.

Capítulo 4 Cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano. Desarrollo y solución de las ecuaciones diferenciales del movimiento

4.1 Introducción

En este capítulo aplicamos las leyes de Euler a los movimientos planos de cuerpos rígidos. El movimiento del centro de masa de cualquier cuerpo, rígido o no, está regido por la Primera Ley de Euler, como se vio en el Capítulo 2. El movimiento *rotacional* de un cuerpo rígido está regido por la Segunda Ley de Euler. Vimos en el Capítulo 2 que esta Ley puede expresarse en términos de la cantidad de movimiento angular para cualquier cuerpo, rígido o no. Sin embargo, dicha cantidad (llamada también *ímpetu angular* para un cuerpo rígido puede expresarse en una forma particularmente compacta que incluye los momentos y productos de inercia del cuerpo y su velocidad angular; el término *cantidad de movimiento angular* es sinónimo de *momento de cantidad de movimiento.**

En las Secciones 4.2 y 4.3 se desarrollan expresiones para la cantidad de movimiento angular y se discuten algunas de las propiedades de los momentos de inercia y de los productos de inercia. En la Sección 4.4 se deducen formas especialmente útiles de la Segunda Ley de Euler en términos de las propiedades de inercia mencionadas antes. En la Sección 4.5 se resuelven ciertos problemas de la cinética de los cuerpos rígidos en movimiento plano; en estos problemas investigamos las relaciones entre las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo y sus aceleraciones en un instante dado. Tales problemas constituyen extensiones de los encontrados por el estudiante en la estática; esto es, se conoce la configuración geométrica y se busca información relativa a las fuerzas que actúansobre el cuerpo. En otro tipo de problemas la geometría es muy sencilla y permite establecer con la ayuda de las Leyes de Euler, ecuaciones diferenciales que pueden integrarse fácilmente y predecir así el movimiento del cuerpo en cierto intervalo de tiempo. Finalmente en la Sección 4.6 tratamos el problema de la rotación de un cuerpo inequilibrado alrededor de un eje fijo; establecemos así las bases para el problema tecnológicamente importante del equilibrio dinámico.

En el siguiente capítulo continuamos el estudio de la cinética del movimiento plano de cuerpos rígidos investigando el uso de tres soluciones especiales (que pueden obtenerse en general) para las ecuaciones diferenciales del movimiento. Esas integrales especiales se conocen como los principios del trabajo y la energía cinética, del impulso y la cantidad de movimiento lineales y del impulso y la cantidad de movimiento angulares.

Es posible obtener los resultados de este capítulo sobre el movimiento plano de cuerpos rígidos a partir de los resultados generales tridimensionales desarrollados en el Capítulo 7. Vale la pena hacer notar que aunque el caso plano cubre una clase limitada de movimientos, contiene de hecho un gran número de problemas con importantes aplicaciones a la ingeniería.

4.2 Cantidad de movimiento angular (ímpetu angular) de un cuerpo rígido en movimiento plano.

Hemos visto en el Capıtulo 3 que la cinemática de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento plano puede describirse muy simplemente. Si conocemos la velocidad de un solo punto y la velocidad angular, entonces conocemos la velocidad de *todo punto* de $\mathcal{B}$. Gracias a esta simplicidad veremos que pueden escribirse expresiones compactas y, sin embargo, completamente generales para la c. de mov: angular. Primero recordemos que la **cantidad de movimiento angular** de cualquier cuerpo con respecto a un punto P (no necesariamente fijo en nuestro marco de referencia) se definió como

$$\mathbf{H}_P = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{R} \times \mathbf{v}\, dm \qquad (2.37b)$$

* (N. del R.) La cantidad de movimiento (o ímpetu) angular se llama en inglés *angular momentum*, lo que ha originado la denominación usual pero impropia de "momento angular".

en que $\mathbf{R}$ en esta sección es el vector que va de P al elemento de masa dm (Fig. 4.1). Notemos que $\mathbf{H}_P$ depende de la localización de P así como de las distribuciones de la masa y las velocidades en el cuerpo; se ve que es la suma de los momentos de las cantidades de movimiento de todos los elementos de masa de $\mathcal{B}$.

Sea ahora nuestro punto general P en la Fig. 4.1 cualquier punto de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$. Los ejes ortogonales (x, y, z) tienen el origen en P como se muestra en la Fig. 4.2 y el plano xy es el plano del movimiento.

Notando que la velocidad $\mathbf{v}$ de dm es la misma que la de su punto acompañante Q en el plano de referencia*, procedemos a expresar $\mathbf{H}_P$ en términos útiles para el estudio del cuerpo rígido en movimiento plano:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \omega\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{PQ}$$

Por consiguiente

$$\mathbf{H}_P = \int \underbrace{(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})}_{\mathbf{R}} \times [\mathbf{v}_P + \omega\hat{\mathbf{k}} \times \underbrace{(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})}_{\mathbf{r}_{PQ}}]\, dm$$

o bien

$$\mathbf{H}_P = \left(\int \mathbf{R}\, dm\right) \times \mathbf{v}_P + \int (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) \times [\omega\hat{\mathbf{k}} \times (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})]\, dm$$

La integral $\int \mathbf{R}\, dm$ es igual a $m\mathbf{r}_{PC}$ según la definición del centro de masa. Haciendo esta sustitución y efectuando los productos vectoriales, se obtiene el vector cantidad de movimiento angular en términos de $\mathbf{v}_P$, ω, y ciertas integrales de la distribución de la masa:

$$\mathbf{H}_P = \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{v}_P + \hat{\mathbf{k}}\omega \int (x^2 + y^2)\, dm - \hat{\mathbf{i}}\omega \int xz\, dm - \hat{\mathbf{j}}\omega \int yz\, dm \qquad (4.1)$$

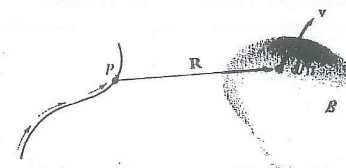


Figura 4.1

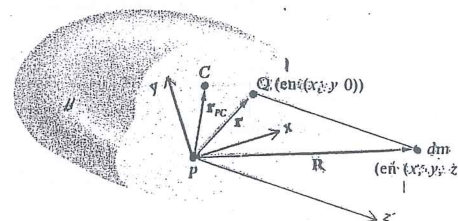


Figura 4.2

*Recuérdese del Capítulo 3 que cada punto del cuerpo tiene un "compañero" en el plano de referencia que tiene siempre las mismas x, y, por consiguiente, las mismas $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$.

Llamamos a las integrales en (4.1) *propiedades de inercia*. Específicamente:

$\int (x^2 + y^2)\, dm = I_{zz}^P =$ Momento de inercia de la masa de $\mathscr{B}$ respecto al eje z a través de P (4.2a)

$-\int xz\, dm = I_{xz}^P =$ Producto de inercia de la masa de $\mathscr{B}$ respecto a los ejes x y z a través de P* (4.2b)

$-\int yz\, dm = I_{yz}^P =$ Producto de inercia de la masa de $\mathscr{B}$ respecto a los ejes y y z a través de P 4.2c)

Por tanto

$$\mathbf{H}_P = \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{v}_P + I_{xz}^P\omega\hat{\mathbf{i}} + I_{yz}^P\omega\hat{\mathbf{j}} + I_{zz}^P\omega\hat{\mathbf{k}} \tag{4.3}$$

Nos encontramos ahora en la etapa de la deducción o desarrollo en que las propiedades de inercia, como el centro de masa en el Capítulo 2, han aparecido naturalmente. En la siguiente sección estudiaremos los momentos y los productos de inercia; los lectores ya familiarizados con las propiedades de inercia pueden pasar a la Sección 4.3.

Antes de dejar la Ec. (4.1) notemos para referencias futuras que su primer término, $\mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{v}_P$, desaparece sí P es el centro de masa ó si tiene velocidad nula*. En estos dos casos, $\mathbf{H}_P$ toma la forma

$$\mathbf{H}_P = I_{xz}^P\omega\hat{\mathbf{i}} + I_{yz}^P\omega\hat{\mathbf{j}} + I_{zz}^P\omega\hat{\mathbf{k}} \tag{4.4}$$

En estos casos es claro que la cantidad de movimiento angular queda expresada en términos de la velocidad angular de $\mathscr{B}$ junto con tres expresiones referentes a la distribución de su masa.

4.3 Momentos y Productos de Inercia. Teoremas de los ejes paralelos

Ejemplos de momentos de enercia

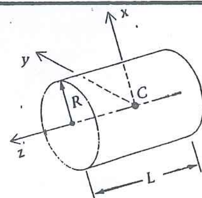
De la definición de momento de inercia,

$$I_{zz}^P = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

vemos que I_{zz}^P es una medida de "cuánta y cuán lejos está localizada la masa" respecto del eje z que pasa por P. En coordenadas cilíndricas tenemos $I_{zz}^P = \int r^2\, dm$, y entonces I_{zz}^P mide la suma total de la masa multiplicada por la distancia al cuadrado sobre el volumen del cuerpo. La cantidad I_{zz}^P es siempre positiva. Calcularemos ahora los momentos de inercia de varios cuerpos comunes. En los Ejemplos 4.1 al 4.9 se busca I_{zz}^C.

Ejemplo 4.1

Cilindro sólido homogéneo si su eje es el z (ver el diagrama).



*Si los productos de inercia se definen *con* el signo menos, entonces y sólo entonces las propiedades de inercia se transformarán en un tensor.

*O si $\mathbf{r}_{PC}$ es paralelo a $\mathbf{v}_P$, caso que no necesitamos considerar aquí.

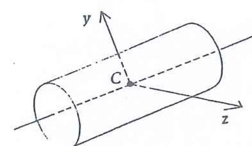
Solución

Notando que $dm = \rho\, dV$, en donde $\rho =$ densidad,

$$I_{zz}^C = \int_{\text{vol}} (x^2 + y^2)\overbrace{\rho\, dV}^{dm} = \int_{z=-L/2}^{L/2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r^2\rho(r\, dr\, d\theta\, dz)$$

$$I_{zz}^C = \rho \frac{r^4}{4}\Big]_0^R \theta\Big]_0^{2\pi} z\Big]_{-L/2}^{L/2} = (\rho\pi R^2 L)\frac{R^2}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

Ejemplo 4.2



Cilindro sólido homogéneo si z es un eje normal al eje del cilindro (Ver el diagrama)

Solución

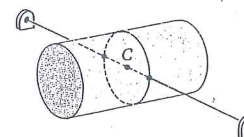
$$I_{zz}^C = \int_{\text{vol}} (x^2 + y^2)\rho\, dV = \int_{x=-L/2}^{L/2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} [\underbrace{(r \operatorname{sen}\theta)^2}_{y = r\operatorname{sen}\theta} + x^2]\rho r\, dr\, d\theta\, dx$$

$$= \int_{x=-L/2}^{L/2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} + \frac{x^2 r^2}{2}\right)\Bigg]_0^R \rho\, d\theta\, dx$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2}\left[\frac{R^4}{4}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{x^2R^2\theta}{2}\Bigg|_0^{2\pi}\right]\rho\, dx$$

$$= \rho\frac{\pi R^4}{4}x\Bigg|_{-L/2}^{L/2} + \frac{\rho R^2\pi x^3}{3}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = (\rho\pi R^2 L)\left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)$$

$$= \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{12}$$



Puede ser confuso al principio saber qué momento de inercia usar para un cilindro en problemas de cinética plana; la respuesta es que es siempre el valor asociado al eje normal al plano xy del movimiento. Si el problema es un cilindro en rodamiento, $I_{zz}^P = mR_2/2$. Si tenemos un cilindro girando alrededor de un eje diametral (ver la figura anexa), entonces $I_{zz}^P = mR^2/4 + mL^2/12$.

Ejemplo 4.3

Dos casos especiales del Ejemplo 4.2: Barras y discos delgados.

Solución

1. Si $L \gg R$, el momento de inercia respecto a un eje lateral a través de C es aproximadamente $mL^2/12$. Este resultado es también correcto aun si la sección transversal no es circular pero tiene una dimensión máxima en su sección transversal mucho menor que L. Tal cuerpo de denomina *barra delgada*.
2. Si el cuerpo es un disco se tiene $R \gg L$ y el momento de inercia es aproximadamente $mR^2/4$.

Para un cilindro con la apariencia de un lápiz, por ejemplo, $R = \frac{1}{8}$ plg y $L = 7$ plg, vemos que (Fig. 1)

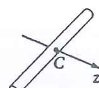


Figura 1

$$I_{zz}^C = \frac{mL^2}{12} + \frac{mR^2}{4} = \frac{mL^2}{12}\left[1 + 3\left(\frac{R}{L}\right)^2\right]$$

$$= \frac{mL^2}{12}\left[1 + 3\left(\frac{1/8}{7}\right)^2\right]$$

$$\approx \frac{mL^2}{12}$$

en donde el segundo término es menor que el 0.1% del término $mL^2/12$. Para una moneda típica, con $R \approx \frac{15}{16}$ plg y $L \approx \frac{1}{16}$ plg, obtenemos (Fig. 2):

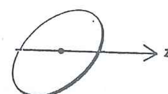


Figura 2

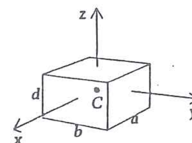
$$I_{zz}^C = \frac{mR^2}{4} + \frac{mL^2}{12} = \frac{mR^2}{4}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{R}\right)^2\right]$$

$$= \frac{mR^2}{4}\left[1 + \frac{(1/16)^2}{3(15/16)^2}\right]$$

$$\approx \frac{mR^2}{4}$$

Esta vez el término $mL^2/12$ es el despreciable; es menor que el 0.15 % del término $mR^2/4$. Sin embargo, se destaca que con respecto al *eje* de cualquier cilindro sólido homogéneo (disco o barra), el momento de inercia es $mR^2/2$.

Ejemplo 4.4



Sólido uniforme rectangular (paralelepípedo)

Solución

$$I_{zz}^C = \int_{-d/2}^{d/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2)\rho \, dx\, dy\, dz$$

La integración da:

$$I_{zz}^C = (\rho abd)\frac{a^2 + b^2}{12}$$

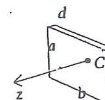
$$= \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

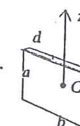
Ejemplo 4.5

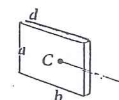
Caso especial del Ejemplo 4.4: Placa rectangular.

Solución

Si el sólido rectangular es una placa, o sea si tiene una dimensión mucho menor que las otras dos, entonces:







$$I_{zz}^C = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \qquad I_{zz}^C = \frac{m}{12}(b^2 + d^2) \approx \frac{mb^2}{12} \qquad I_{zz}^C = \frac{m}{12}(a^2 + d^2) \approx \frac{ma^2}{12}$$

El eje z correcto por utilizarse (normal al plano del movimiento) y, por consiguiente, cuál fórmula emplear, depende de cómo se establezca el movimiento plano del cuerpo.

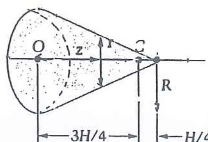
Ejemplo 4.6

Cono circular recto, macizo y homogéneo, respecto a su eje.

Solución

Aquí tenemos un límite variable ya que $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\ (z)$. Como C y O están sobre el mismo eje z,

$$I_{zz}^{C} = I_{zz}^{O} = \int (x^2 + y^2)\, dm = \int_{z=0}^{H} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\mathfrak{r}(z)} r^2 \rho r\, dr\, d\theta\, dz$$



Por triángulos semejantes,

$$\frac{\mathfrak{r}}{z} = \frac{R}{H} \Rightarrow \mathfrak{r} = \frac{Rz}{H} = \mathfrak{r}(z)$$

que da el radio variable en función de z. Entonces

$$I_{zz}^{C} = \int_{z=0}^{H} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left. \frac{\rho r^4}{4} \right]_0^{Rz/H} \rho\, d\theta\, dz = \int_{z=0}^{H} \left. \frac{\rho R^4 z^4}{4H^4}\, \theta \right]_0^{2\pi} dz$$

$$= \frac{\rho \pi R^4}{2H^4} \left. \frac{z^5}{5} \right]_0^{H} = \left(\frac{\rho \pi R^2 H}{3} \right) \frac{3R^2}{10} = \frac{3}{10} m R^2$$

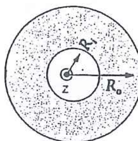
Ejemplo 4.7

Cilindro circular hueco y homogéneo, respecto a su eje.

Solución

$$I_{zz}^{C} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{0}^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} r^2 \rho r\, dr\, d\theta\, dz = \frac{\rho \pi (R_o^4 - R_i^4) L}{2}$$

$$= \underbrace{[\rho \pi (R_o^2 - R_i^2) L]}_{m} \frac{(R_o^2 + R_i^2)}{2} = \frac{m (R_o^2 + R_i^2)}{2}$$



El mismo resultado puede obtenerse restando el momento de inercia del hueco (H) del momento del cuerpo entero (W). La justificación de este procedimiento es que podemos integrar sobre una región más grande que la requerida siempre que restemos la integral sobre la parte que no debe incluirse:

$$I_{zz}^{C} = \frac{m_W R_o^2}{2} - \frac{m_H R_i^2}{2} = \frac{\rho \pi R_o^2 L R_o^2}{2} - \frac{\rho \pi R_i^2 L R_i^2}{2}$$

$$= \underbrace{\rho \pi (R_o^2 - R_i^2) L}_{m} \frac{(R_o^2 + R_i^2)}{2} = \frac{m (R_o^2 + R_i^2)}{2}$$

Nótese que si el espesor de la pared es pequeño, se tendrá un casco cilíndrico (o un aro, si la longitud es pequeña) para el cual $R_o \approx R_i$ *y entonces*

$$I_{zz}^{C} \approx \frac{m(2R^2)}{2} = mR^2$$

(Es obvio que si toda la masa está a la misma distancia R del eje z deberíamos obtener el valor mR^2.)

Ejemplo 4.8

Esfera maciza uniforme, respecto a cualquier diámetro.

Solución

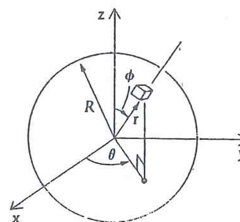
$$I_{zz}^{C} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

También:

$$I_{xx}^{C} = \int (y^2 + z^2)\, dm$$

e

$$I_{yy}^{C} = \int (z^2 + x^2)\, dm$$



Sumando:

$$\underbrace{I_{xx}^{C} + I_{yy}^{C} + I_{zz}^{C}}_{=\,3I \text{ ya que por simetría todos son iguales}} = \int 2\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2}\, dm$$

Entonces

$$3I = 2 \int r^2 \rho_0\, dV = 2\rho_0 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{R} r^2 \underbrace{(r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta)}_{dV \text{ en coordenadas esféricas}}$$

$$I = \frac{2}{3} \rho_0 \left. \frac{r^5}{5} \right]_0^{R} \left. (-\cos\phi) \right]_0^{\pi} \left. \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi \rho_0 R^5}{15}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 \right)}_{m} \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m R^2$$

Una manera más fácil de resolver el problema es usando coordenadas esféricas directamente:

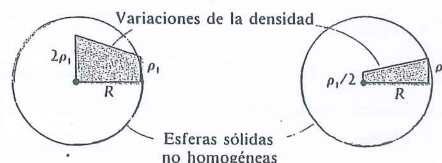
$$I_{zz}^{C} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R} \rho_0 (r \operatorname{sen}\phi)^2 \, dr (r \, d\phi)(r \operatorname{sen}\phi \, d\theta)$$

que proporciona el mismo resultado de $(2/5)mR^2$.

Ejemplo 4.9

En este ejemplo la densidad no es constante. Algunas veces la densidad de un cuerpo varía; si es así, debe permanecer dentro de la integral al calcular las propiedades de inercia. Un ejemplo es la Tierra; se sabe que la densidad del núcleo central de la Tierra es aproximadamente 4 veces la de la parte exterior de su corteza y que esta densidad central es casi doble que la del acero.

Imaginemos una esfera con la misma masa y radio que la del ejemplo anterior, pero con una densidad que varía linealmente y es dos veces mayor en $r = 0$ que en $r = R$. Encontraremos I respecto a cualquier diámetro. (Ver la figura anexa.)



Solución

La masa del cuerpo es

$$m = \int \rho \, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho r^2 \operatorname{sen}\phi \, dr \, d\phi \, d\theta$$

Si la densidad es ρ_1, en R, entonces

$$\rho = \frac{-\rho_1}{R} r + 2\rho_1$$

Sustituyendo e integrando con los mismos límites que antes y luego igualando la masa nueva a la anterior se obtiene:

$$\rho_1 = \tfrac{4}{5}\rho_0$$

Entonces para tener la misma masa que la esfera uniforme, la densidad varía de $(8/5)\rho_0$ a $(4/5)\rho_0$ disminuyendo hacia el exterior. Integrando para evaluar I,

$$3I = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 \rho(r)(r^2 \operatorname{sen}\phi \, dr \, d\phi \, d\theta)$$

lo cual da

$$I = \frac{28}{75} mR^2 = 0.373 mR^2 \qquad \text{(ligeramente menor que } \tfrac{2}{5} mR^2\text{)}$$

Alternativamente, si la densidad varía linealmente pero su valor es doble en la corteza que en el núcleo, entonces los resultados son (si m y R son los mismos que en el caso uniforme) (ver la figura anexa),

$$\rho_1 = \frac{8}{7}\rho_0 \quad \text{y} \quad I = \frac{44}{105} mR^2 = 0.419 mR^2 \qquad \text{(ligeramente mayor que } \tfrac{2}{5} mR^2\text{)}$$

Teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia

En muchas aplicaciones el cuerpo consiste en varios cuerpos componentes más pequeños con formas conocidas. En tales casos no hay necesidad afortunadamente de integrar para evaluar la inercia de cada parte con respecto a un eje común de interés, gracias al llamado **teorema de los ejes paralelos**. Si conocemos el momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de masa C de cualquier cuerpo $\mathcal{B}$, podemos determinarlo fácilmente respecto a cualquier otro eje paralelo al que pasa por C por medio de un simple cálculo. El teorema establece que el momento de inercia de la masa de $\mathcal{B}$ respecto a *cualquier* recta es el momento de inercia respecto a una línea paralela que pase por C más la masa de $\mathcal{B}$ multiplicada por la distancia al cuadrado entre los dos ejes:

$$I_{zz}^{P} = I_{zz}^{C} + md^2$$

Para demostrar este teorema consideremos los ejes coordenados cartesianos (x, y, x) y (x_1, y_1, z_1) que pasan por P y C con los ejes correspondientes paralelos, como se muestra en la Fig. 4.3. Entonces por definición:

$$I_{zz}^{C} = \int (x_1^2 + y_1^2)\, dm \qquad \text{y} \qquad I_{zz}^{P} = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

Sustituyendo se obtiene

$$x = x_1 + \bar{x} \qquad \text{y} \qquad y = y_1 + \bar{y}$$

$$\begin{aligned} I_{zz}^{P} &= \int [(x_1 + \bar{x})^2 + (y_1 + \bar{y})^2]\, dm \\ &= \int (x_1^2 + y_1^2)\, dm + (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)\int dm \\ &\quad + 2\bar{x}\int x_1\, dm + 2\bar{y}\int y_1\, dm \end{aligned} \tag{4.5}$$

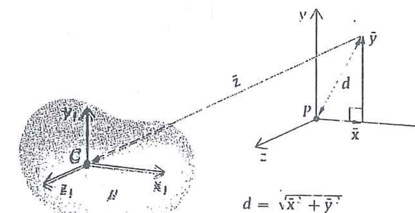


Figura 4.3

o bien

$$I^P_{zz} = I^C_{zz} + md^2 \quad (4.6)$$

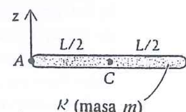
En donde $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = d^2$ es el cuadrado de la distancia entre los ejes z que pasan por C y P.

Pregunta 4.1 ¿Por qué son iguales a cero las dos últimas integrales en la Ec. (4.5)?

La Ec. (4.6) es el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia. Sin embargo, nótese que: *Sólo podemos transferir desde el centro de masa C y no de cualquier otro punto A para el que conozcamos I^A_{zz}.*

Ejemplo 4.10

Para la barra delgada uniforme $\mathcal{R}$ mostrada en el diagrama se quiere encontrar el momento de inercia I^A_{zz}, de la masa de $\mathcal{R}$ respecto a un eje lateral que pase por un extremo. (Este ejemplo será útil en aplicaciones a mecanismos pendulares en los que una barra se encuentra articulada en uno de sus extremos).



Solución

$$I^A_{zz} = I^C_{zz} + md^2 = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{mL^2}{3}}$$

A continuación consideramos un ejemplo del cálculo del momento de inercia de un cuerpo compuesto.

Ejemplo 4.11

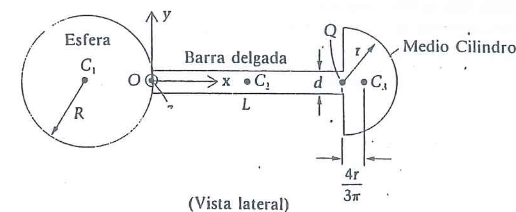
Determinar I^O_{zz} para el cuerpo mostrado en los diagramas. Las densidades ρ son constantes, por lo que las masas respectivas son:

$$m_{sph} = m_1 = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

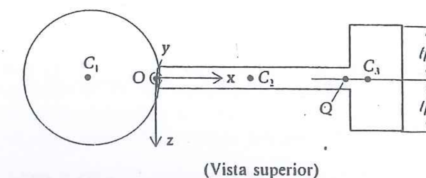
$$m_{bar} = m_2 = \rho\frac{\pi d^2 L}{4}$$

y

$$m_{cyl} = m_3 = \rho\frac{\pi r^2 \ell}{2}$$



(Vista lateral)



(Vista superior)

Solución

Observemos primero que $I^O_{zz} = I^{sf.}{}_{zz} + I^{br.}{}_{zz} + I^{ci.}{}_{zz}$, ya que la integral puede calcularse separadamente sobre cada cuerpo, siempre que se consideren todas las masas elementales del cuerpo total. Introduciendo los valores de cada integral obtenemos:

$$I^O_{zz} = \left(\frac{2}{5}m_1R^2 + m_1R^2\right) + \underbrace{\left[\frac{m_2L^2}{12} + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]}_{o\ bien\ m_2L^2/3}$$

$$+\left\{\left[\frac{m_3r^2}{2} - m_3\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2\right] + m_3\left(L + \frac{4r}{3\pi}\right)^2\right\}$$

en donde, para el medio cilindro:

$$I^{C_3}_{zz} = I^Q_{zz} - m_3\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = \frac{m_3r^2}{2} - m_3\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2$$

Nótese que no podemos transferir correctamente la inercia del medio cilindro de Q a O; esto debe hacerse desde el centro de masa C_3. Hay que *encontrar* primero $I^{C_3}_{zz}$ (puesto que ya conocemos el momento de inercia con respecto a Q) y sólo *entonces* podemos transferir hacia O.

Ejemplo 4.12

Una caja de madera vacía y cerrada tiene las dimensiones 5 × 3 × 2 pies y pesa 124 lb.

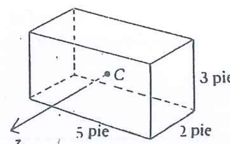
a. Encontrar su momento de inercia respecto a un eje que pase por C, paralelo a la dimensión 2 pie.

b. Si la caja se llena con un material homogéneo que pesa 240 lb. (excluyendo la caja), ¿Cuánto se incrementa el momento de inercia respecto al eje de la parte (a)?

Solución

a. Las masas de las varias porciones de la caja son proporcionales a sus áreas (los espesores y la densidad se suponen constantes):

Areas:	Pesos:
(1) 2 piezas (3 × 5) = 30 pie²	(1) $\frac{124\text{ lb}}{62\text{ pie}^2} \times 30\text{ pie}^2 = 60\text{ lb}$
(2) 2 piezas (2 × 3) = 12 pie²	(2) $\frac{124\text{ lb}}{62\text{ pie}^2} \times 12\text{ pie}^2 = 24\text{ lb}$
(3) 2 piezas (2 × 5) = 20 pie²	(3) $\frac{124\text{ lb}}{62\text{ pie}^2} \times 20\text{ pie}^2 = 40\text{ lb}$
Total = 62 pie²	



Considerando las contribuciones de los tres pares de lados y que $m = W/g$:

$$I_{zz}^C = I_{zz}^{C_1} + I_{zz}^{C_2} + I_{zz}^{C_3}$$

$$= \frac{1}{32.2}\left[\frac{2(30)(3^2 + 5^2)}{12} + 2(12)\left(\frac{3^2}{12} + 2.5^2\right) + 2(20)\left(\frac{5^2}{12} + 1.5^2\right)\right]$$

$$= 15.9\text{ slug}\cdot\text{pie}^2 \quad (\text{o lb-pie}\cdot\text{s}^2)$$

b. $I^C_{zz(\text{contenido})} = \dfrac{240(5^2 + 3^2)}{32.2(12)} = 21.1\text{ slug}\cdot\text{pie}^2$

Aunque la caja pesa sólo aproximadamente la mitad del contenido, la posición de su masa hace que su momento de inercia sea más de las tres cuartas partes del momento de inercia del contenido. El momento de inercia *total* es de 37.0 slug · pie².

Existe una distancia llamada **radio de giro** que se usa con frecuencia en relación con los momentos de inercia. El radio de giro de la masa de un cuerpo respecto a una recta z (que pase por el punto P) se denomina k_{zP}, o solo k_P si se sobreentiende que el eje es el z, y se define por la ecuación:

$$I_{zz}^P = mk_P^2 \tag{4.7}$$

La interpretación física de k_P puede ser como la distancia desde P en cualquier dirección perpendicular a z a la que una masa puntual, con la misma masa del cuerpo, tendrá el mismo momento de inercia resultante que el cuerpo tiene respecto al eje z. Por ejemplo, un cilindro macizo homógeneo tiene un radio de giro con respecto a su eje $R/\sqrt{2}$, ya que $I_{zz}^C = mk_C^2 = \frac{1}{2}mR^2$. Aquí se ve la utilidad de k_C, ya que independientemente de la masa del cilindro (y por consiguiente de su densidad), k_C será el mismo para todos los cilindros homógeneos de igual radio.

Nótese además que (usando el teorema de los ejes paralelos)

$$mk_P^2 = I_{zz}^P = I_{zz}^C + md^2 = m(k_C^2 + d^2)$$

y entonces

$$k_P^2 = k_C^2 + d^2 \tag{4.8}$$

De esta ecuación se ve que el radio de giro, así como el momento de inercia, adquiere un valor mínimo en C.

Productos de inercia

Veremos ahora las otras dos medidas de distribución de la masa que han aparecido en nuestro estudio del movimiento plano de un cuerpo rígido; estas son I_{yz}^P e I_{xz}^P, consideradas aquí respecto a ejes (x, y, z) a través de cualquier punto P.*

Nuestro primer paso será familiarizarnos con el significado de los productos de inercia, mostrando que desaparecen para dos grandes clases de simetrías de ocurrencia común. Dichas clases se definen por medio de las dos condiciones (ρ constante en ambos): (1) z es un eje de simetría y (2) xy es un plano de simetría. Examinemos por qué los dos productos de inercia I_{xz}^P e I_{yz}^P son nulos en estos casos. Recordemos que sus definiciones son:

$$I_{xz}^P = -\int xz\,dm \qquad I_{yz}^P = -\int yz\,dm \tag{4.9}$$

Clase 1: z es un eje de simetría. Para cada dV en (x, y, z) existe un dV correspondiente en $(-x, -y, z)$ y las contribuciones de esos dos elementos se cancelan en las dos integrales I_{xz}^P e I_{yz}^P. Puesto que *cada* punto de $\mathcal{B}$ tiene un "punto de cancelación" reflejado a través del eje z, I_{xz}^P e I_{yz}^P son nulas para esta clase de cuerpos (Fig. 4.4).

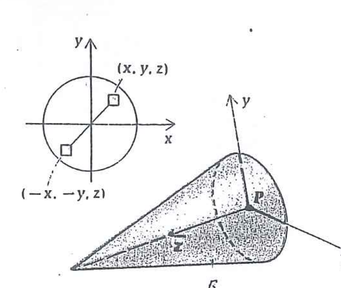


Figura 4.4

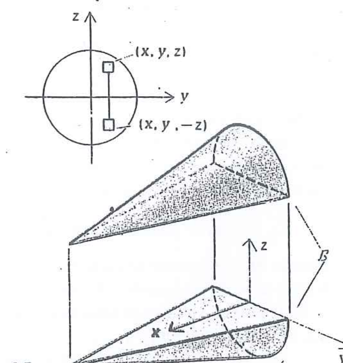


Figura 4.5

Clase 2: xy es un plano de simetría. En este caso cada diferencial de volumen dV en (x, y, z) tiene necesariamente una imagen en $(x, y, -z)$. Entonces las contribuciones de esos dos elementos se cancelan en ambas integrales, y tomadas sobre el total del cuerpo $\mathcal{B}$ hacen que I_{xz}^P e I_{yz}^P sean nulas (Fig. 4.5).

El hecho de que un cuerpo no pertenezca a alguna de las dos clases no significa que no pueda tener productos de inercia nulos.

*En el movimiento general (tridimensional) existen seis propiedades inerciales: tres momentos de inercia y tres productos de inercia.

Pregunta 4.2 Imagine un cuerpo rígido para el cual ambos productos de inercia son nulos, pero que no cae en ninguna de las dos clases mencionadas.

Así como para los momentos de inercia, existe también un teorema de transferencia para los productos de inercia. Para obtenerlo escribimos de acuerdo con la Fig. 4.3:

$$I_{xz}^{P} = -\int xz\, dm = -\int (x_1 + \bar{x})(z_1 + \bar{z})\, dm$$
$$= -\int x_1 z_1\, dm - \bar{x}\bar{z}\int dm - \bar{x}\int z_1\, dm - \bar{z}\int x_1\, dm$$

Los dos últimos términos desaparecen en virtud de la definición del centro de masa (por ejemplo, $\int z_1\, dm = m$ veces la distancia de C a C, que es cero). Entonces

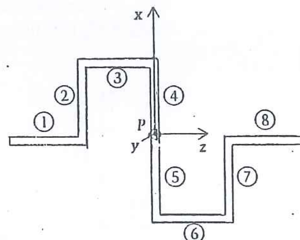
$$I_{xz}^{P} = I_{xz}^{C} - m\bar{x}\bar{z} \tag{4.10a}$$

Notemos que el factor de m en la Ec. (4.10a) es alternativamente el producto de las coordenadas x y z de P en un sistema de ejes con origen en C. Similarmente

$$I_{yz}^{P} = I_{yz}^{C} - m\bar{y}\bar{z} \tag{4.10b}$$

Ejemplo 4.13

Encontrar I_{xz}^{P} e I_{yz}^{P} para el cuerpo mostrado en el diagrama; está compuesto de ocho barras delgadas (varillas) uniformes idénticas, cada una de masa m y longitud l.



Solución

Se tiene $I_{yz}^{P} = 0$ ya que el xz es un plano de simetría. Recuerde que cuando esto ocurre son cero los dos productos de inercia que contienen (como subíndice) la coordenada normal al plano.* Con superíndices identificando a las distintas barras podemos escribir la siguiente expresión para el otro producto de inercia:

$$I_{xz}^{P} = I_{xz_P}^{①} + I_{xz_P}^{②} + I_{xz_P}^{③} + I_{xz_P}^{④} + I_{xz_P}^{⑤} + I_{xz_P}^{⑥} + I_{xz_P}^{⑦} + I_{xz_P}^{⑧}$$

Nótese que por simetría cada barra tiene I_{xz} nulo respecto a ejes a través de su *propio* centro de masa y paralelos a x y a z. Por ello los ocho términos anteriores consistirán solo en términos de transferencia en este problema.

Además puesto que $\bar{z}$ es cero para las barras 4 y 5 y $\bar{x}$ es cero para las barras 1 y 8, sólo cuatro barras contribuyen al I_{xz}^{P} total:

$$I_{xz}^{P} = I_{xz_P}^{②} + I_{xz_P}^{③} + I_{xz_P}^{⑥} + I_{xz_P}^{⑦}$$
$$= -m\left(\frac{\ell}{2}\right)(-\ell) - m(\ell)\left(-\frac{\ell}{2}\right) - m(-\ell)\left(\frac{\ell}{2}\right) - m\left(-\frac{\ell}{2}\right)\ell$$
$$= 4\left(\frac{m\ell^2}{2}\right) = 2m\ell^2$$

* Por tanto, I_{xy}^{P} es también cero en este ejemplo, pero I_{xy}^{P} no aparece en las ecuaciones del movimiento plano, como ya hemos visto.

Nótese que las masas "desbalanceadas" se encuentran en los cuadrantes segundo y cuarto; por ello el signo de I_{xz}^{P} es positivo, ya que su definición tiene un signo negativo fuera de la integral. Regresaremos a este ejemplo luego en el capítulo, y examinaremos las reacciones causadas por el valor no nulo de I_{xz}^{P} cuando el cuerpo gira sobre el eje z.

Problemas/ Sección 4.3

4.1 Un elipsoide de revolución se forma al girar una elipse alrededor del eje x, como se ve en la Fig. P4.1. Encuentre el momento de inercia de este cuerpo macizo con densidad igual a 15 slug/pie³, respecto al eje x.

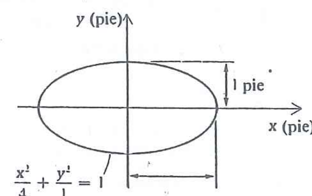


Figura P4.1

4.2 En la Fig. P4.2 el área limitada por los ejes x y y y la parábola $y^2 = 1 - x$ gira alrededor del eje x para formar un sólido de revolución. La densidad es $P = 1000\,(1 - x)^8$ kg/m³. Encuentre el momento de inercia de la masa entera respecto al eje x.

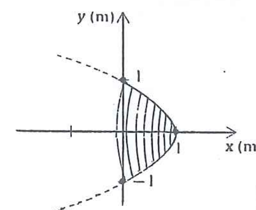


Figura P4.2

4.3 La barra delgada de la Fig. P4.3 tiene una densidad dada por:

$$\rho = \rho_1\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \rho_0$$

en donde ρ_0 y ρ_1 son constantes. La barra tiene longitud L. Encuentre su momento de inercia respecto a la línea definida por $x = 0$ y $y = L/2$.

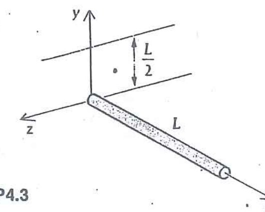


Figura P4.3

* **4.4** Determine I_{zz}^{C} para el prisma semielíptico mostrado en la Fig. P4.4 (densidad $= \rho$, longitud normal al plano de la página $= L$).

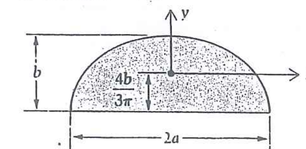


Figura P4.4

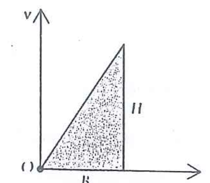


Figura P4.5 Densidad = ρ, espesor = t

4.5 El plano medio de una placa triangular uniforme se muestra en la Fig. P4.5. Calcule por integración:

a. I_{xx}^{O}
b. I_{yy}^{O}
c. I_{zz}^{O}
d. I_{xy}^{O}
e. I_{xz}^{O} y I_{yz}^{O}.

¿Cuales serían buenas aproximaciones si la placa fuese delgada?

* Los asteriscos señalan los problemas más difíciles.

4.6 Use los teoremas de los ejes paralelos y los resultados del problema anterior para evaluar para esa placa los momentos y los productos de inercia en el centro de masa.

4.7 Para una placa delgada uniforme con ejes xy (y origen O) en el plano medio, muestre que:

$$I_{zz}^{O} \approx I_{xx}^{O} + I_{yy}^{O}$$

Confirme esto con los resultados del problema 4.5 para el caso en que la placa sea delgada.

4.8 Calcule I_{xx}^{C} para una placa delgada uniforme en forma de sector circular, como se muestra en la Fig. P4.8.

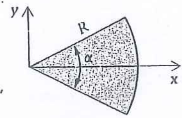


Figura P4.8

4.9 Calcule I_{yy}^{C} para la placa del problema anterior.

4.10 La superficie de un sólido de revolución se forma al girar la curva $y = x^2$ (0) alrededor del eje x (Fig. P4.10). La densidad del material varía de acuerdo con la ecuación $\rho = 20x$, en donde ρ está en kg/m^3 y x en metros. Encuentre I_{xx}^{O} y explique porqué su respuesta es también I_{xx}^{C}.

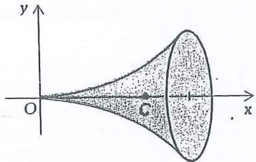


Figura P4.10

4.11 En el problema anterior encuentre I_{yy}^{O} e I_{yy}^{C}.

* **4.12** Vea la Fig. P4.12. (a) Demuestre que el momento de inercia (I_{xx}^{O} de un cono macizo homogéneo respecto a un eje lateral en la base es $I_{xx}^{O} = (m/20)(3R^2 + 2H^2)$. (b) Usando el teorema de los ejes paralelos, determine I_{xx}^{C}.

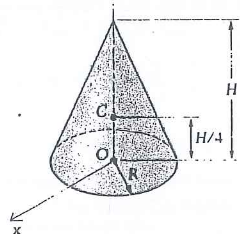


Figura P4.12

* **4.13** En el problema anterior determine I_{xx}^{O} para el cuerpo de la figura si la parte situada arriba de $z = H/2$ se suprime para formar un cono truncado.

4.14 El cuerpo en la Fig. P4.14 está compuesto de una barra delgada uniforme (m = 4 slug) y de una esfera uniforme (m = 5 slug). Encuentre I_{zz}^{C} para el cuerpo, en donde z es normal a la figura.

4.15 Dos barras, cada una con peso de 5 lb/pie, están soldadas entre sí, como muestra la Fig. P4.15 (a). Localice el centro de masa del cuerpo. (b) Calcule I_{zz}^{C}.

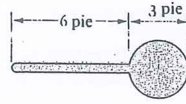


Figura P4.14

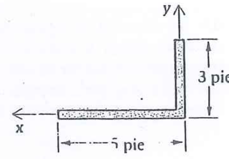


Figura P4.15

4.16 Calcule I_{xx} en el Problema 4.15.

4.17 Use el resultado del problema anterior junto con el teorema de los ejes paralelos para encontrar I_{xx}^{C}.

4.18 Determine I_{yy} en el problema 4.15.

4.19 Use el resultado del problema anterior junto con el teorema de los ejes paralelos para encontrar I_{yy}^{C}.

4.20 Determine el momento de inercia de la masa de $\mathcal{B}$ respecto al eje z_B si I_{zz}^{A} = 40 kg · m^2 (Fig. P4.20).

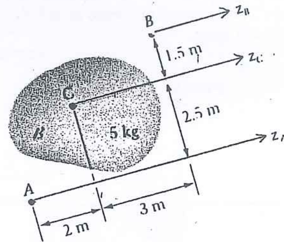


Figura P4.20

4.21 Determine el momento de inercia de un sólido hemisférico uniforme respecto al eje lateral x_C que pasa por su centro de masa (Fig. P4.21).

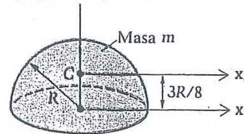


Figura P4.21

4.22 Determine I_{zz}^{C} para el anillo semicircular $\mathcal{B}$ de la Fig. P4.22. *Sugerencia:* Si la porción punteada estuviese presente, I_{zz}^{O} sería $(2m)R^2$; por simetría el anillo semicircular contribuye a este valor la mitad, de modo que para $\mathcal{B}$ se tiene ¿

$$I_{zz}^{O} = mR^2$$

Ahora use el teorema de los ejes paralelos para completar la solución sin integrar.

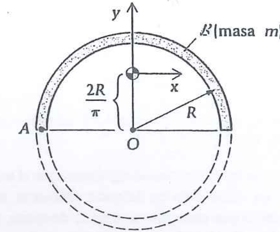


Figura P4.22

4.23 Una barra $\mathcal{R}$ de 1 m de longitud esta soldada en sus extremos a un disco $\mathcal{D}$ y a una esfera $\mathcal{S}$. (Fig. P4.23). Los cuerpos uniformes tienen las masas: $m_{\mathcal{R}}$ = 10 kg, $m_{\mathcal{D}}$ = 5 kg y $m_{\mathcal{S}}$ = 15 kg. Los radios de $\mathcal{D}$ y $\mathcal{S}$ son 0.3 m y 0.1 m, respectivamente. Determine I_{zz}.

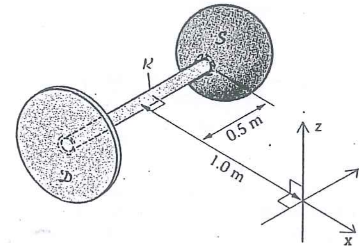
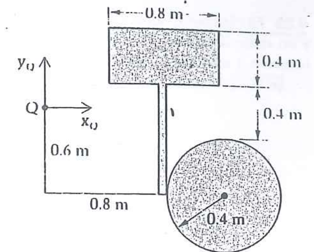


Figura P4.23

4.24 Los tres cuerpos mostrados en la Fig. P4.24, soldados para formar uno solo $\mathcal{B}$, tienen masas de 64 (placa rectangular), 56 (barra) y 48 (disco) kilogramos Encuentre el momento de inercia de $\mathcal{B}$ con respecto al eje z_Q.

4.25 En la Fig. P4.25, $\mathcal{S}$ es una esfera maciza, $\mathcal{C}$ es un cilindro macizo y $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son barras esbeltas. Las líneas centrales de $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ pasan por los centros de masa de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{C}$, respectivamente. Encuentre I_{zz}^{O} para el sistema formado por los cuatro cuerpos.

Figura P4.24



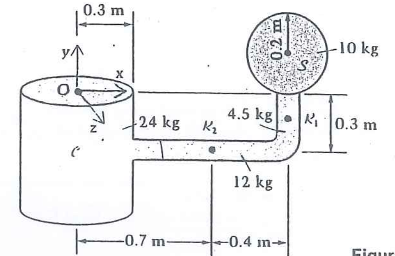


Figura P4.25

4.26 Evalúe I_{xx}^{C} (igual a I_{yy}^{C}) para una placa delgada (densidad ρ, espesor t) en forma de cuadrante de círculo (Fig. P4.26).

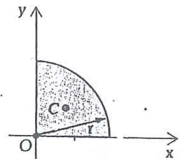


Figura P4.26

4.27 Determine los momentos de inercia del péndulo respecto a los ejes x, y, z (Fig. P4.27). (Los ejes x y y están en el plano del péndulo, $\mathcal{R}$ es una barra delgada y $\mathcal{D}$ es un disco semicircular; la densidad es constante.

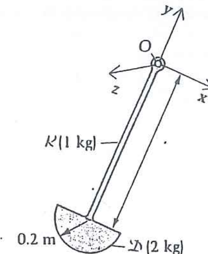


Figura P4.27

4.28 El cilindro $\mathcal{C}$ en la Fig. P4.28 tiene una masa de 6 kg. y un radio de 0.4 m. Demuestre que el momento de inercia respecto a un eje z_C normal a la página es de 0.48 kg · m² y que el correspondiente radio de giro es $k_C = 0.283$ m.

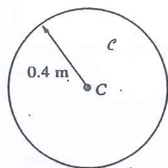


Figura P4.28

4.29 En el problema anterior demuestre que es posible hacer un agujero a través de $\mathcal{C}$ abajo del centro geométrico Q, cumpliéndose lo siguiente:

a. La masa restante es de 5.5 kg.
b. La distancia entre Q y el *nuevo* centro de masa C es de 0.02 m (Fig. P4.29).

Obtenga el radio r del agujero, la distancia d y el nuevo valor de k_C.

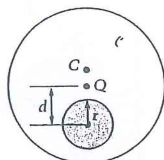


Figura P4.29

4.30 La antena $\mathcal{A}$ en la Fig. P4.30 tiene un momento de inercia I_C respecto a z_C y *los contrapesos* $\mathcal{C}$ *tienen un momento de inercia* I_g respecto a z_G. *Los puntos* C y G son los respectivos centros de masa de la antena y de los contrapesos. El propósito de éstos es situar en O el centro de la masa combinada para reducir esfuerzos. Así, $MD = md$, en donde despreciamos la masa de la barra correctora para este problema. Calcule los valores de M y D que minimicen el momento de inercia total I_O (I de $\mathcal{C}$ más I de $\mathcal{A}$, ambos respecto a O). Use $I_G = Mk_G^2$, donde k_G es una constante.

4.31 Encuentre el producto de inercia I_{xy}^{A} para el anillo del Problema 4.22.

4.32 Encuentre I_{xy}^{Q} para el cuerpo soldado $\mathcal{B}$ del Problema 4.24.

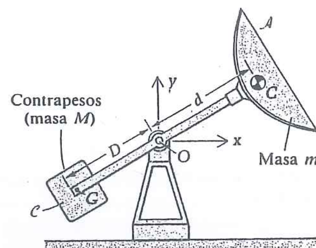


Figura P4.30

4.33 Determine I_{xy} para el Problema 4.23. El plano xy contiene los centros de $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}$, y $\mathcal{S}$.

* **4.34** Demuestre de las tres maneras siguientes que el momento de inercia de un casco esférico delgado uniforme, respecto a cualquier recta que pase por su centro de masa, es 2/3 mr^2 (Fig. P4.34). ¿Cuál de los tres métodos sería correcto si el cuerpo fuese hueco pero no delgado, o sea si $t \not\ll R$?

a. Con coordenadas esféricas:

$$I_{zz}^{C} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi} (r \operatorname{sen} \phi)^2 \rho t r^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$

en donde r es el radio promedio, $R - \frac{t}{2}$

b. Use: $I_{zz}^{C} = \frac{2}{5}\, m_{\text{ENTERO}} R^2 - \frac{2}{5}\, m_{\text{HUECO}} (R - t)^2$

c. Use: $I_{zz_{\text{esfera}}}^{C} = \frac{2}{5} mR^2 = \frac{2}{5}\rho\left(\frac{4}{3}\pi R^5\right)$

$$= \frac{8}{15}\rho\pi R^5.$$

Incremente R en ΔR y calcule el cambio ΔI_{zz}^{C} con ayuda del cálculo diferencial, con $\Delta R \ll R$. Note que este cambio *es* el momento de inercia del casco.

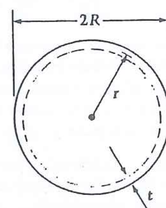


Figura P4.34

4.4 Segunda ley de Euler

En el Capítulo 2 desarrollamos varias formas de la Segunda Ley de Euler. Comenzaremos aquí con la forma asociada al centro de masa.

$$\Sigma \mathbf{M}_C = \dot{\mathbf{H}}_C \tag{2.42}$$

Introduciendo la Ec. (4.4) $\mathbf{H}_C$,

$$\Sigma \mathbf{M}_C = \frac{d}{dt}\mathbf{H}_C = \frac{d}{dt}(I_{xz}^{C}\omega\hat{\mathbf{i}} + I_{yz}^{C}\omega\hat{\mathbf{j}} + I_{zz}^{C}\omega\hat{\mathbf{k}}) \tag{4.11}$$

En este momento debemos tomar una decisión sobre como los ejes x, y de la Ec. (4.11) que tienen su origen en C, se permitirá que cambien relativamente al marco de referencia. Nótese que la dirección del eje z ha sido ya fijada perpendicularmente al marco de referencia. Si fijamos las direcciones de x, y relativas al marco inercial, entonces $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ (así como $\hat{\mathbf{k}}$) serán constantes con relación a ese marco, pero I_{xz}^{C} e I_{yz}^{C} serán en general dependientes del tiempo.

Pregunta 4.3 ¿Porqué no cambiará I_{zz}^{C} en este caso?

Una elección más conveniente es fijar los ejes x, y, z en el cuerpo y de esa manera los momentos y los productos de inercia son todos constantes. Sin embargo, $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ dependen del tiempo en relación al marco inercial $\mathcal{I}$ y sus derivadas (Ecs. 3.41 y 3.42) son

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} = (-\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{I}} + \cos\theta\hat{\mathbf{J}})\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{j}} \text{ o bien } \omega\hat{\mathbf{j}} \tag{4.12a}$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} = -(\cos\theta\hat{\mathbf{I}} + \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{J}})\dot{\theta} = -\dot{\theta}\hat{\mathbf{i}} \text{ o bien } -\omega\hat{\mathbf{i}} \tag{4.12b}$$

La Fig. 4.6 muestra los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ (fijos en $\mathcal{B}$) expresados en términos de $\hat{\mathbf{I}}$ y $\hat{\mathbf{I}}$ (fijos en el marco inercial $\mathcal{I}$):

$$\hat{\mathbf{i}} = 1(\cos\theta\hat{\mathbf{I}} + \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{J}})$$

$$\hat{\mathbf{j}} = 1(-\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{I}} + \cos\theta\hat{\mathbf{J}})$$

Por consiguiente, efectuando las derivaciones en la Ec. (4.11) tendremos:

$$\Sigma \mathbf{M}_C = I_{xz}^{C}\dot{\omega}\hat{\mathbf{i}} + I_{yz}^{C}\dot{\omega}\hat{\mathbf{j}} + I_{zz}^{C}\dot{\omega}\hat{\mathbf{k}} + I_{xz}^{C}\omega(\omega\hat{\mathbf{j}}) + I_{yz}^{C}\omega(-\omega\hat{\mathbf{i}})$$

o bien

$$\Sigma \mathbf{M}_C = (I_{xz}^{C}\alpha - I_{yz}^{C}\omega^2)\hat{\mathbf{i}} + (I_{yz}^{C}\alpha + I_{xz}^{C}\omega^2)\hat{\mathbf{j}} + I_{zz}^{C}\alpha\hat{\mathbf{k}} \tag{4.13}$$

Esta expresión equivale a tres ecuaciones escalares:

$$\Sigma M_{Cx} = I_{xz}^{C}\alpha - I_{yz}^{C}\omega^2 \tag{4.14a}$$

$$\Sigma M_{Cy} = I_{yz}^{C}\alpha + I_{xz}^{C}\omega^2 \tag{4.14b}$$

$$\Sigma M_{Cz} = I_{zz}^{C}\alpha \tag{4.14c}$$

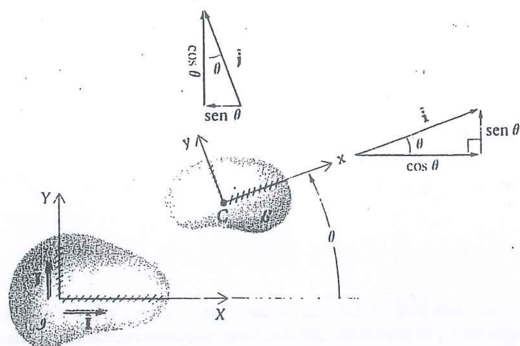


Figura 4.6

Las Ecs. (4.14 a,b), junto con $\Sigma F_z = 0$, dan información sobre la naturaleza de las reacciones necesarias para mantener el movimiento plano. Si I^C_{xz} e I^C_{yz} son ambos nulos*, entonces $\Sigma M_{Cx} = 0 = \Sigma M_{Cy}$, y el sistema de fuerzas externas (cargas más reacciones) tiene una resultante plana o planar. Entonces, con un sistema coplanar de cargas externas, las reacciones resultantes deben ser también coplanares. Esta es la base para "bidimensionalizar" el análisis de problemas en los que esos dos productos de inercia se anulan; trabajaremos primero con cuerpos simétricos para las cuales este es el caso. Posteriormente en esta sección examinaremos algunos problemas en los que I^C_{xz} e I^C_{yz} *no* son ambos cero. En todo caso el movimiento rotacional del cuerpo está regido por la simple ecuación de cinética

$$\Sigma M_{Cz} = I^C_{zz}\alpha \qquad (= I^C_{zz}\ddot{\theta}) \tag{4.14d}$$

Vemos que en tanto las fuerzas producen aceleraciones lineales, y la masa produce la "resistencia", los momentos de fuerza producen aceleraciones angulares, siendo la "resistencia" el momento de inercia. Nótese también que (sean o no I^C_{yz} e I^C_{xz} iguales a cero) el momento resultante de las fuerzas externas respecto al eje z que pasa por el centro de masa es $\Sigma M_C \cdot \hat{k}$ y se tiene que $= I^C_{zz}$. Entonces el momento resultante respecto a este eje es igual al momento de inercia respecto al eje multiplicado por la aceleración angular del cuerpo, independientemente de que los productos de inercia se anulen o no.

Si deseamos tomar momentos respecto a algún otro punto que no sea el centro de masa podemos usar la relación

$$\Sigma \mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_C + \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_C \tag{2.43}$$

en donde no hay ninguna restricción relativa a la posición del punto P. Entonces para un cuerpo rígido en movimiento plano tenemos al usar la Ec. (4.13):

$$\Sigma \mathbf{M}_P = (I^C_{xz}\alpha - I^C_{yz}\omega^2)\hat{\imath} + (I^C_{yz}\alpha + I^C_{xz}\omega^2)\hat{\jmath} + I^C_{zz}\alpha\hat{k} + \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_C \tag{4.15a}$$

* Cuando I^C_{xz} o I^C_{yz} no son cero, ΣM_{Cx} o bien ΣM_{Cy} deberán ser diferente es de cero para conservar el movimiento; estos términos están formados usualmente por fuerzas (como las reacciones en los apoyos) en diferentes posiciones a lo largo del eje z.

Siempre que los productos de inercia se anulan, la Ec. (4.15a) asume la forma más simple

$$\Sigma \mathbf{M}_P = I^C_{zz}\alpha\hat{k} + \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_C \tag{4.15b}$$

Nótsee que si P y C están en el mismo plano de movimiento, entonces $\mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_C$ es perpendicular al plano, o sea paralelo a $\hat{k}$.

Otra forma que es útil a veces implica las propiedades de inercia en algún punto diferente del centro de masa. Recuérdese que *si P es un punto del cuerpo rígido*

$$\mathbf{H}_P = \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{v}_P + I^P_{xz}\omega\hat{\imath} + I^P_{yz}\omega\hat{\jmath} + I^P_{zz}\omega\hat{k} \tag{4.3}$$

y para cualquier punto P, sabemos que

$$\mathbf{H}_P = \mathbf{H}_C + \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{v}_C \tag{2.38}$$

igualando esas dos expresiones para $\mathbf{H}_P$ y luego derivando respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{\mathbf{H}}_C + \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_C + \dot{\mathbf{r}}_{PC} \times m\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_{PC} \times m\mathbf{v}_P + \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_P + \frac{d}{dt}(I^P_{xz}\omega\hat{\imath} + I^P_{yz}\omega\hat{\jmath} + I^P_{zz}\omega\hat{k})$$

Usando la Ec. (2.43) podemos reemplazar por $\Sigma \mathbf{M}_P$ los primeros dos términos del lado izquierdo de esta ecuación y obtener

$$\Sigma \mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{r}}_{PC} \times m(\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_C) + \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_P + \frac{d}{dt}(I^P_{xz}\omega\hat{\imath} + I^P_{yz}\omega\hat{\jmath} + I^P_{zz}\omega\hat{k}) \tag{4.16}$$

El primer término del lado derecho de la Ec. (4.16) desaparece, ya que $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_C = -\dot{\mathbf{r}}_{PC}$, y el tercer término es de la misma forma que $\dot{\mathbf{H}}_C$, excepto que aquí las propiedades de inercia son con respecto a ejes con origen en P. Volviendo a los pasos entre las Ecs. (4.11) y (4.13) resulta

$$\Sigma \mathbf{M}_P = (I^P_{xz}\alpha - I^P_{yz}\omega^2)\hat{\imath} + (I^P_{yz}\alpha + I^P_{xz}\omega^2)\hat{\jmath} + I^P_{zz}\alpha\hat{k} + \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_P \tag{4.17}$$

Pregunta 4.4 ¿Por qué podemos decir, como se hizo antes, que $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_C = -\dot{\mathbf{r}}_{PC}$ y por qué ocasiona esto que se anule el primer término del lado derecho de la Ec. (4.16)?

Hay dos casos especiales particularmente importantes del movimiento plano: traslación y rotación alrededor de un eje fijo. Para la traslación, $\omega = \alpha = 0$, y la aceleración (lineal) de todo punto es la misma, digamos $\mathbf{a}$. La Ec. (4.15a) da entonces

$$\Sigma \mathbf{M}_C = \mathbf{0} \tag{4.18}$$

y

$$\Sigma \mathbf{M}_P = \mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a} \tag{4.19}$$

para *cualquier* punto P. En realidad es muy fácil mostrar directamente a partir de la Ec. (2.8) que lo anterior debe ser cierto para cualquier movimiento traslacional, sea este plano o no.

En el segundo caso el cuerpo tiene un eje fijo de rotación y si O es un punto sobre este eje, la Ec. (4.17) da

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (I^O_{xz}\alpha - I^O_{yz}\omega^2)\hat{\mathbf{i}} + (I^O_{yz}\alpha + I^O_{xz}\omega^2)\hat{\mathbf{j}} + I^O_{zz}\alpha\hat{\mathbf{k}} \tag{4.20}$$

De aquí podemos concluir que

$$\Sigma \mathbf{M}_{eje} = I^O_{zz}\alpha\hat{\mathbf{k}} \tag{4.21}$$

o bien

$$\Sigma M_{axis} = \Sigma \mathbf{M}_O \cdot \hat{\mathbf{k}} = I_{eje}\,\alpha$$

Pregunta 4.5 Ya que la Ec. (4.4) es válida para cualquier punto P con velocidad cero, ¿por qué no podemos usar ecuaciones como la (4.20) para el centro instantáneo Ⓘ de $\mathcal{B}$ cuando Ⓘ *no* es un pivote?

4.5 Problemas bidimensionales de movimiento plano

Limitaremos la atención en esta parte a una clase especial de problemas de movimientos planos de cuerpo rígido. Esta clase se define en los dos incisos siguientes;

1. $I^C_{xz} = I^C_{yz} = 0$ (generalmente, porque el cuerpo es simétrico respecto al plano del movimiento del centro de masa); y
2. Las cargas externas tienen resultantes con líneas de acción en el plano del movimiento del centro de masa.

Estas dos condiciones necesitan reacciones externas equipolentes a un sistema coplanar de fuerzas. En la mayoría de los problemas de esta sección, se verá que todas las reacciones *individuales* tienen líneas de acción en el plano del movimiento del centro de masa. Entonces las ecuaciones de momentos, $\Sigma M_{Cx} = 0$ y $\Sigma M_{Cy} = 0$ se satisfarán idénticamente y las Leyes de Euler se reducirán a las tres ecuaciones escalares:

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}_C \tag{4.22a}$$

$$\Sigma F_y = m\ddot{y}_C \tag{4.22b}$$

$$\Sigma M_{Cz} = I^C_{zz}\ddot{\theta} \tag{4.22c}$$

en donde x_C, y_C son las coordenadas del centro de masa en un sistema coordenado ortogonal fijo en un marco inercial.* Como no habrá confusión acerca del eje implicado, escribiremos la Ec. (4.22c) simplemente como $M_C = I_C$

$$\Sigma M_C = I_C\ddot{\theta} \quad \text{o bien} \quad \Sigma M_C = I_C\alpha \tag{4.23}$$

*Qué ecuaciones se usarán y las formas específicas que tomen, depende por supuesto del sistema coordenado que se use para describir el movimiento de C. Un sistema ortogonal es la elección natural para la mayor parte de los problemas de este capítulo; un sistema polar es, sin embargo, la elección natural para problemas de mecánica orbital (véase la Sección 8.3).

En vez de esto, pueden usarse cualquiera de las ecuaciones alternativas de momento de fuerza discutidas en la Sección precedente. Sin embargo, se advierte al estudiante que, al igual que en estática, una vez que la "ecuación de fuerza" y la "ecuación de momento" han sido utilizadas, ninguna información adicional (independiente) se obtendrá al tomar momentos respecto a puntos diferentes.

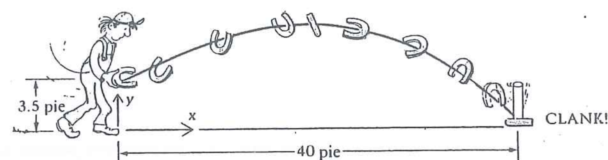
En algunos casos las Ecs. (4.22a—c) producen ecuaciones diferenciales que pueden ser fácilmente integradas y permiten predecir el futuro movimiento del cuerpo. Más comunes serán aquellos problemas en los que para un instante específico calcularemos fuerzas y aceleraciones; tales problemas son extensiones naturales de los de la estática, en los que todas las operaciones analíticas son de carácter algebraico. Para problemas de alguna de estas clases se recomienda seguir los siguientes pasos:

1. Trace un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo del problema
2. Defina un conjunto de vectores unitarios, o equivalentemente un sistema coordenado en términos del cual puedan expresarse las fuerzas y aceleraciones desconocidas.
3. Introduzca las Leyes de Euler; hay quien prefieren hacer esto en forma vectorial en términos de vectores unitarios definidos previamente, mientras que otros prefieren iniciar el análisis usando las tres ecuaciones en componentes escalares; por ejemplo, las Ecs. (4.22a-c).
4. Hay casos en que el número de incógnitas escalares excede el número de ecuaciones independientes (máximo de tres) y hay que buscar información suplementaria entonces. Esto puede implicar nada más que aplicar la ley de Coulomb, de la fricción pero a menudo la información suplementaria tendrá la forma de una *restricción cinemática*. Por ejemplo, para una rueda con su centro de masa en su centro geométrico, el rodamiento implica (con definiciones apropiadas de las variables) que $\ddot{x}_C = r\ddot{\theta}$. Si algún punto A tiene su movimiento restringido, entonces la restricción a su aceleración junto con $\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{AC} - \omega^2\mathbf{r}_{AC}$ pueden usarse para relacionar la aceleración del centro de masa y la aceleración del cuerpo (suponiendo que las velocidades, y también las ω, son conocidas). Por supuesto $\mathbf{a}_C$ y α son las variables cinemáticas que en forma natural aparecen en las Leyes de Euler.
5. Encuentre, resolviendo las ecuaciones, las fuerzas y aceleraciones desconocidas. Todos los problemas en este libro se refieren a "cuerpos rígidos dinámicamente determinados", por lo que esto siempre será posible. En los problemas que impliquen intervalos de tiempo y no sólo instantes específicos, integre las aceleraciones para obtener velocidades, y luego las velocidades para obtener las posiciones como funciones del tiempo.
6. Revise la consistencia dimensional de los resultados y, en el caso de respuestas numéricas revise que las unidades sean correctas. (Considere de preferencia las unidades SI.)

Los siguientes ejemplos están diseñados para ilustrar los tipos de problemas que el estudiante debe aprender a resolver.

Ejemplo 4.14

Un lanzador de herraduras avienta una con $\omega_i = 4.71$ ↺ rad/s en la posición mostrada. Si la herradura gira exactamente una vez en movimiento plano y da en el blanco, determinar la velocidad inicial del centro de masa de la herradura.



Solución

Se integran las Ecs. (4.22a—c):

$$\Sigma F_x = 0 = m\ddot{x}_C \qquad \Sigma F_y = -mg = m\ddot{y}_C \qquad \Sigma M_C = 0 = I_C\ddot{\theta}$$

$$\ddot{x}_C = 0 \qquad \ddot{y}_C = -g \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$\dot{x}_C = \dot{x}_i \qquad \dot{y}_C = -gt + \dot{y}_i \qquad \dot{\theta} = \omega_i = 4.71$$

(velocidad inicial de C en la dirección x) (velocidad inicial de C en la dirección y)

$$x_C = \dot{x}_i t + x_i^{\,0} \qquad y_C = \frac{-gt^2}{2} + \dot{y}_i t + y_i^{\,3.5} \qquad \theta = 4.71t + \theta_i^{\,0}$$

ya que $x_C = 0$ en $t = 0$; la herradura se suelta en $y_C = 3.5$ pie

Cuando la herradura llega al suelo, $\theta = 2\pi$, por lo que

$$2\pi = 4.71t_f \Rightarrow t_f = 1.33 \text{ s}$$

Por tanto

$$x_C = 40 = \dot{x}_i(1.33) \Rightarrow \dot{x}_i = 30.1 \text{ pie/s}$$

y

$$y_C = 0 = -\frac{32.2}{2}(1.33)^2 + \dot{y}_i(1.33) + 3.5 \Rightarrow \dot{y}_i = 18.8 \text{ pie/s}$$

La velocidad inicial del centro de masa de la herradura es entonces:

$$\mathbf{v}_i = 30.1\hat{\imath} + 18.8\hat{\jmath} \text{ pie/s}$$

Ejemplo 4.15

En anillo $\mathcal{R}$ en la Fig. 1 tiene una masa de 10 kg, un radio de 0.5 m. y está articulado al marco $\mathcal{F}$ de 30 kg en P. La fuerza Q empuja los cuerpos hacia arriba sobre el plano liso. Encontrar la fuerza Q máxima para la que el anillo dé vuelta respecto a $\mathcal{F}$.

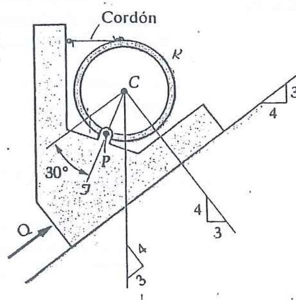


Figura 1

Solución

El anillo $\mathcal{R}$ se traslada paralelamente al plano, por lo que $\mathbf{a}_C = a\hat{\imath}$. Si usamos la Ec. (4.15) para sumar momentos respecto a P en el diagrama de cuerpo libre de $\mathcal{R}$ (Fig. 2), se eliminan las dos reacciones en P del pasador. Además para Q máxima, la tensión en la cuerda es nula. Entonces la única contribución a $\Sigma \mathbf{M}_P$ es la de la fuerza de gravedad en C. Se tiene por ello

$$\Sigma M_{Pz} = I_{zz}^C \alpha^{\,0 \text{ (pues } \mathcal{R} \text{ se traslada)}} + (\mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_C)_z$$

$$mg(R \operatorname{sen} 23.1°) = [R(\cos 30°\hat{\imath} - \operatorname{sen} 30°\hat{\jmath}) \times ma\hat{\imath}]_z$$

$$= mRa \operatorname{sen} 30°$$

por tanto

$$a = 2g \operatorname{sen} 23.1° = 7.70 \text{ m/s}^2 \tag{1}$$

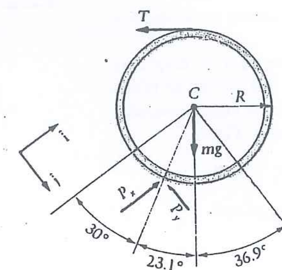


Figura 2

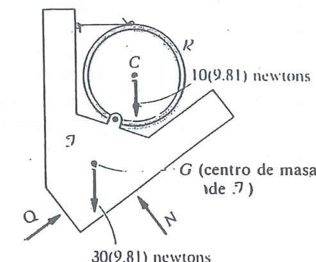


Figura 3

Ahora consideramos un diagrama de cuerpo libre del cuerpo compuesto por $\mathcal{F}$ y $\mathcal{R}$ (Fig. 3). Nótese que no hay fricción debajo del marco porque el plano es liso. Adviértase también que las aceleraciones de C, G y del centro de masa combinado* C_T son todas iguales a $a\hat{\imath}$, ya que los cuerpos se trasladan juntos en tanto que Q no exceda el valor $Q_{máx}$ que andamos buscando.

Por tanto podemos emplear

$$\Sigma F_x = m_T a \tag{2}$$

en donde m^T es la masa total. Así,

$$Q_{max} - 10(9.81)\tfrac{3}{5} - 30(9.81)\tfrac{3}{5} = (10 + 30)\text{kg}(7.71)\text{m/s}^2$$

y

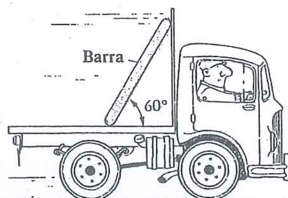
$$Q_{max} = 235 + 308 = 543 \text{ newtons}$$

Nótese que usando la Ec. (4.15) y luego el cuerpo compuesto, hemos evitado tener que encontrar las reacciones del pasador en P.

* Con localización a la cuarta parte de la distancia de G a C.

Ejemplo 4.16

El coeficiente de fricción en ambos extremos de una barra delgada uniforme es de 0.5. Hallar la aceleración máxima hacia adelante que el camión puede adquirir sin que la barra se mueva respecto a él.



Solución

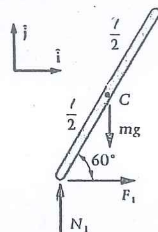
Una posibilidad es que el extremo superior se separe del cuerpo del camión. El diagrama de cuerpo libre muestra la situación cuando el extremo está a punto de separarse. Como la barra está en traslación

$$\Sigma M_C = 0$$

$$F_1 \frac{l}{2} \operatorname{sen} 60° - N_1 \frac{l}{2} \cos 60° = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} F_1 - \frac{1}{2} N_1 = 0$$

$$F_1 = N_1/\sqrt{3} = 0.577 N_1$$



Este grado de fricción no puede generarse porque $\mu = 0.5 < 0.577$. Por ello, el movimiento de la barra relativo al camión no se iniciará de esta manera.

La otra posibilidad, como se muestra en el segundo diagrama de cuerpo libre, es que la barra esté a punto de resbalar en su extremo inferior; esto debe ocurrir simultaneamente en las dos superficies. Las ecuaciones de movimiento son (con $\mathbf{a} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}}$):

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}$$

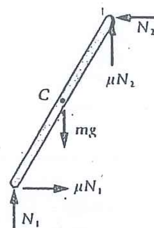
$$\mu N_1 - N_2 = m\ddot{x} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = m\ddot{y} = 0$$

$$N_1 + \mu N_2 - mg = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_C = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{l}{2}\right)\mu N_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)N_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)\mu N_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{l}{2}\right)N_2 = 0 \qquad (3)$$



Con $\mu = 0.5$, la Ec. (3) da

$$N_1 = 16.7 N_2$$

y de (2), $N_2 = 0.0581\, mg$ y

$$N_2 = 0.0581 mg$$

así como

$$N_1 = 0.971 mg$$

La Ec. (1) da entonces

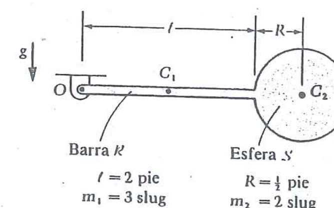
$$0.5(0.971 mg) - 0.0581 mg = m\ddot{x}$$

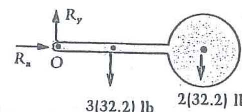
$$\ddot{x} = 0.427 g$$

que es igual a 13.8 pie/s² (para $g = 32.2$ pie/s²) o bien 4.19 m/s² (para $g = 9.81$ m/s²)

Ejemplo 4.17

La barra $\mathcal{R}$ y la esfera $\mathcal{S}$ están soldadas para formar un cuerpo rígido compuesto que está unido al techo en O por medio de un pasador liso. Encuentre la fuerza ejercida por el pasador sobre el cuerpo al soltar éste desde el reposo.





Solución

Como O es un pivote del cuerpo compuesto se puede escribir:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = I_O \alpha \hat{\mathbf{k}}$$

en donde

$$I_O = \frac{m_1 l^2}{3} + \left[\frac{2}{5} m_2 R^2 + m_2 (l + R)^2\right]$$

$$= \frac{3(2)^2}{3} + \left[\frac{2}{5} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2(2.5)^2\right]$$

$$= 4 + 12.7$$

$$= 16.7 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

por lo que, en la liberación,

$$-3(32.2)(1) - 2(32.2)(2.5) = 16.7\alpha$$

o bien

$$\alpha = -15.4 \text{ rad/s}^2$$

Para calcular la reacción del pasador usamos $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_C$, en donde necesitamos la posición del centro de masa C del cuerpo. La distancia de O a C es

$$d = \frac{3(1) + 2(2.5)}{3 + 2} = \frac{8}{5} = 1.6 \text{ pie}$$

En este instante

$$\mathbf{a}_C = (-15.4\hat{\mathbf{k}}) \times (1.6\hat{\mathbf{i}}) - \overset{0}{\cancel{\omega^2}}(1.6\hat{\mathbf{i}})$$

$$= -24.6\hat{\mathbf{j}} \text{ pie/s}^2$$

Por tanto

$$(R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath}) - 96.6\hat{\jmath} - 64.4\hat{\jmath} = 5(-24.6\hat{\jmath})$$

Se tendrán:

$$R_x = 0$$

$$R_y = 161 - 123 = 38 \text{ lb}$$

Existe un método alternativo que no requiere la localización explícita de C, porque

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C = m_1\mathbf{a}_{C_1} + m_2\mathbf{a}_{C_2}$$

o bien

$$(R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath}) - 96.6\hat{\jmath} - 64.4\hat{\jmath} = 3[(-15.4\hat{k}) \times \hat{\imath}] + 2[(-15.4\hat{k}) \times 2.5\hat{\imath}]$$

de lo cual

$$R_x = 0$$

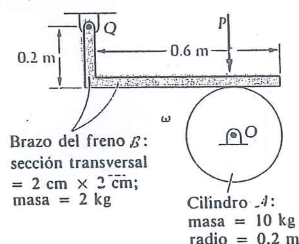
y

$$R_y = 161 - 46.2 - 77 = 38 \text{ lb}$$

igual que antes.

Ejemplo 4.18

Justamente después de que el brazo de frenado hace contacto con la parte superior del cilindro $\mathscr{A}$, este se encuentra girando a 1000 rpm ⥀. El coeficiente de fricción cinética entre $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ es $\mu = 0.3$. Hallar (a) cuánto tarda $\mathscr{A}$ en alcanzar el reposo bajo la acción de la fuerza constante $P = 40$ N; y (b) el valor de las reacciones en el pasador O ejercidas sobre $\mathscr{A}$.

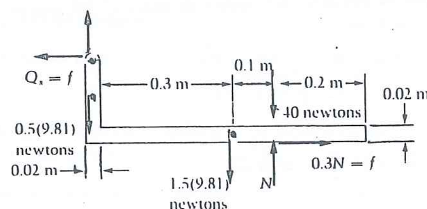


Brazo del freno $\mathscr{B}$: sección transversal = 2 cm × 2 cm; masa = 2 kg

Cilindro $\mathscr{A}$: masa = 10 kg radio = 0.2 m

Solución

Como el cuerpo $\mathscr{B}$ está en equilibrio, podemos encontrar la fuerza normal entre él y el cilindro por estática. La distribución del peso del brazo en sus partes horizontal y vertical es como se muestra en el diagrama. Nótese que el equilibrio requiere que $f = Q_x$, en donde $f = f_{máx} = \mu N$, ya que está teniendo lugar el resbalamiento.



Sumando momentos respecto a Q, tenemos

$$0.401N + 0.2(0.3N) - 40(0.401) - 1.5(9.81)(0.301) = 0$$

de donde se obtiene

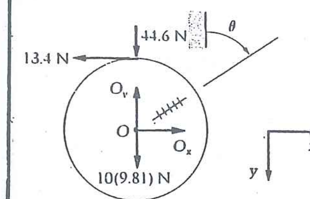
$$N = \frac{20.5}{0.461} = 44.6 \text{ Newtons}$$

y

$$\mu N = 0.3(44.6) = 13.4 \text{ Newtons}$$

Pregunta 4.6 ¿Sería diferente la fuerza normal N si ω fuese antihoraria?

El movimiento del cuerpo $\mathscr{A}$ es de rotación pura. Su diagrama de cuerpo libre se muestra en el diagrama anexo.



$$\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta}$$

$$-13.4(0.2) = \left[\frac{1}{2}\,10(0.2)^2\right]\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2.68}{0.20} = -13.4 \text{ rad/s}^2$$

Integrando obtenemos

$$\dot{\theta} = -13.4t + C_1$$

$$= -13.4t + 1000\left(\frac{2\pi}{60}\right)$$

en donde las condiciones iniciales de $\mathscr{A}$ permitieron evaluar la constante de integración C_1.

El cuerpo se detiene cuando $\dot{\theta} = 0$ en el tiempo t_s, que ahora estamos en posibilidad de calcular:

$$0 = -13.4t_s + 105$$

$$t_s = 7.84 \text{ s}$$

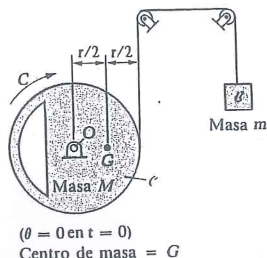
Nótese que el centro de masa $O = C$ de $\mathscr{A}$ está fijo en el marco inercial, por lo que las reacciones en el pasador se obtienen a partir de las ecuaciones del centro de masa:

$$\Sigma F_x = -13.4 + O_x = m\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow O_x = 13.4 \text{ newtons}$$

$$\Sigma F_y = +44.6 + 98.1 - O_y = m\ddot{y}_C = 0 \Rightarrow O_y = 143 \text{ newtons}$$

Ejemplo 4.19

¿Cómo debe variar en el tiempo el par aplicado C de la Fig. 1 para hacer girar la rueda no equilibrada (pero redonda) con velocidad angular constante ω_0 ↻? El momento de inercia de la masa de $\mathcal{C}$ con respecto a su eje de rotación es I_0, y el centro de masa está en G.



($\theta = 0$ en $t = 0$)
Centro de masa $= G$

Figura 1

Solución

Ya que $\Sigma M_O = I_O\alpha$ para el cuerpo $\mathcal{C}$,

$$-Tr + C + Mg\frac{r}{2}\cos\theta = I_O\ddot{\theta} \qquad (1)$$

Para el bloque $\mathcal{B}$ se puede escribir

$$T - mg = m\ddot{y}_B \qquad (2)$$

El punto Q de $\mathcal{C}$ localizado donde la cuerda deja el borde de la rueda, tiene la misma velocidad ($r\dot{\theta}\downarrow$) y la misma componente de aceleración tangencial ($r\ddot{\theta}\downarrow$) que la cuerda en ese punto. Como esta última se supone inextensible, tal aceleración tiene la misma magnitud que $\ddot{y}_B$. La cinemática da entonces la ecuación adicional:

$$\ddot{y}_B = r\ddot{\theta} \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2) resulta

$$T = mg + mr\ddot{\theta}$$

Sustituyendo T en la Ec. (1),

$$C = mgr - Mg\frac{r}{2}\cos\theta + (I_O + mr^2)\ddot{\theta}$$

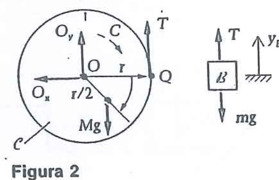


Figura 2

Como $\dot{\theta} = \omega_0 =$ constante, se tiene que $\theta = \omega_0 t$ y $\ddot{\theta} = 0$ por lo que $C = mgr -$ cos ${}_0 t$

$$C = mgr - \frac{Mgr}{2}\cos\omega_0 t$$

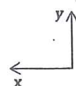
y el par requerido varía armónicamente.

Si no hay par C y el sistema se libera desde el reposo en la posición mostrada, las ecuaciones siguen siendo válidas, y con $C = 0$ se obtiene

$$(I_O + mr^2)\ddot{\theta} = Mg\frac{r}{2}\cos\theta - mgr$$

La aceleración angular inicial de $\mathcal{C}$ (con $\theta = 0$) es entonces

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{(Mgr/2) - mgr}{I_O + mr^2}$$



que es positiva (↻) si $M > 2m$.

Pregunta 4.7 ¿Qué pasa si $M < 2m$, y si $M = 2m$?

Es interesante escribir las ecuaciones de movimiento para la rueda en la siguiente forma:

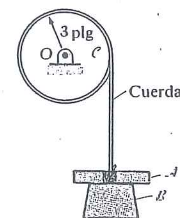
$$\Sigma F_x = O_x = M\ddot{x}_G \qquad (4)$$

$$\Sigma F_y = O_y + T - Mg = M\ddot{y}_G \qquad (5)$$

$$\Sigma M_G = O_y\frac{r}{2}\cos\theta - O_x\frac{r}{2}\operatorname{sen}\theta - T\left(r - \frac{r}{2}\cos\theta\right) = I_G\ddot{\theta} \qquad (6)$$

Las Ecs. (4) y (5) son útiles si se requieren las reacciones en el pasador,* pero la Ec. (6) es más compleja que $\Sigma M_O = I_O\alpha$ que usamos antes, ya que el cuerpo tiene una articulación. El estudiante debe tratar de eliminar O_x, O_y y T de la Ec. (6), usando las Ecs. (4) y (5) y la ecuación previa para $\mathcal{B}$ ($T = mg + mr\ddot{\theta}$) y demostrar que se obtiene el mismo resultado para $\ddot{\theta}$ (después de una cantidad mayor de trabajo que en el ejemplo). (La cinemática tiene también que emplearse para relacionar $\ddot{x}_G$ y $\ddot{y}_G$ con θ, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$).

Ejemplo 4.20



Una cuerda está enrollada alrededor del cilindro $\mathcal{C}$ de 10 lb. La cuerda pasa a través de un agujero en el disco horadado $\mathcal{A}$ de 5 lb, y está unida al bloque $\mathcal{B}$ de 15 lb. Cuando el sistema se libera desde el reposo con la cuerda tiesa en ese momento, ¿cuál es la reacción ejercida sobre $\mathcal{A}$ por $\mathcal{B}$?

Solución

Usando los diagramas de cuerpo libre mostrados, escribiremos las siguientes ecuaciones de movimiento de los distintos cuerpos:

$$\circlearrowright^{+} \quad \Sigma M_O = I_O\alpha$$

$$T\left(\frac{3}{12}\right) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(\frac{3}{12}\right)^2\right]\alpha$$

o bien

$$T = 0.0388\alpha \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = m\ddot{y}_B$$

$$15 - T + R = \frac{15}{32.2}\ddot{y}_B \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y = m\ddot{y}_A$$

$$5 - R = \frac{5}{32.2}\ddot{y}_A \qquad (3)$$

*Por ejemplo, los pasadores deben diseñarse con suficiente resistencia para admitir las fuerzas causadas por las aceleraciones.

Una restricción es que la componente vertical de $\mathbf{a}_Q$ (ver el primer diagrama de cuerpo libre) es la misma que la aceleración de los puntos de la porción recta de la cuerda y esas aceleraciones son $\ddot{y}_B$:

$$\ddot{y}_B = (\mathbf{a}_Q)_y = \frac{3}{12}\alpha \qquad (4)$$

Las aceleraciones de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ son también iguales. Sin tensión en la cuerda, serían $g\downarrow$; con la tensión presente, la aceleración de $\mathcal{B}$ es retardada, garantizando así el contacto continuo de los dos cuerpos. Por lo tanto:

$$\ddot{y}_A = \ddot{y}_B \qquad (5)$$

Sumando las Ecs. (1) y (2) y tomando en cuenta (4),

$$15 + R = \left[0.0388(4) + \frac{15}{32.2}\right]\ddot{y}_B$$

o bien

$$0.621\ddot{y}_B - R = 15 \qquad (6)$$

Las Ecs. (5) y (3) dan:

$$0.155\ddot{y}_B + R = 5 \qquad (7)$$

Sumando las Ecs. (6) y (7)

$$\ddot{y}_B = \frac{20}{0.776} = 25.8 \text{ pie/s}^2$$

por lo que, por (6),

$$R = -15 + 0.621(25.8) = 1.02 \text{ lb}$$

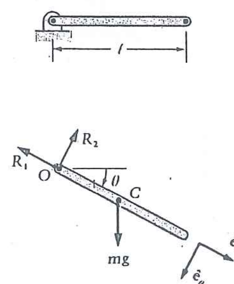
Note que la aceleración de $\mathcal{B}$ es menor que "g" (32.2 pie/s²) y que R es menor que el peso de $\mathcal{A}$, permitiéndole que caiga pero no libremente.

Ejemplo 4.21

La barra uniforme de masa m se libera desde el reposo en la posición horizontal indicada en la figura. Considere la fuerza ejercida por el pasador liso,

a. ¿Cómo varía la magnitud de la fuerza con el ángulo θ girado por la barra?

b. ¿Cuál es el valor máximo de esta magnitud?



Solución

En este problema ilustraremos el hecho de que algunas veces pueden usarse ventajosamente vectores unitarios no fijos al marco inercial.

Se tiene el diagrama de cuerpo libre. La magnitud de la fuerza que queremos analizar es

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$$

y obtendremos R_1 y R_2 de la ecuación $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_C$, en donde

$$\mathbf{a}_C = \overset{0}{\cancel{\mathbf{a}_O}} + \alpha\hat{\mathbf{k}} \times \overset{\frac{\ell}{2}\hat{\mathbf{e}}_r}{\cancel{\mathbf{r}_{OC}}} - \omega^2\mathbf{r}_{OC}$$

$$= \frac{\ell}{2}\alpha\hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{\ell}{2}\omega^2\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$= \frac{\ell}{2}\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2\hat{\mathbf{e}}_r$$

Pregunta 4.8 Recordando la Ec. (1.37) de la Sección 1.6, ¿dónde están los términos $\dot{r}$ y $\ddot{r}$?

Esta ecuación muestra que tendremos que expresar $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ como funciones de θ si R_1 y R_2 van a expresarse de esa manera. Escribimos la ecuación de momentos respecto al pivote O:

$$\Sigma M_O = I_O\alpha = I_O\ddot{\theta}$$

$$mg\frac{\ell}{2}\cos\theta = \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2\ell}\cos\theta$$

Esta ecuación da $\ddot{\theta}$ en función de θ; para obtener $\dot{\theta}$ en función de θ debemos integrar. Multiplicando por $\dot{\theta}$,

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{3g}{2\ell}\dot{\theta}\cos\theta$$

de donde

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{3g}{2\ell}\operatorname{sen}\theta + \cancelto{0,\ \text{ya que } \dot{\theta} = 0 \text{ cuando } \theta = 0}{C_1}$$

Por tanto

$$\mathbf{a}_C = \frac{\ell}{2}\left(\frac{3g}{2\ell}\cos\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{\ell}{2}\left(\frac{3g}{\ell}\operatorname{sen}\theta\right)\hat{\mathbf{e}}_r$$

$$= -\frac{3g}{2}\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{3g}{4}\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

Ahora

$$\Sigma F_r = ma_{Cr} \qquad\qquad \Sigma F_\theta = ma_{C\theta}$$

$$mg\,\mathrm{sen}\,\theta - R_1 = m\left(\frac{-3g}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \quad \text{y} \quad mg\cos\theta - R_2 = m\left(\frac{3g}{4}\cos\theta\right)$$

$$R_1 = \frac{5}{2}\,mg\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad\qquad R_2 = \frac{mg}{4}\cos\theta$$

Por lo tanto, la magnitud de la reacción del pasador, como función de θ es

$$R = \frac{mg}{4}\sqrt{\cos^2\theta + (10\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}$$

Usando cálculo diferencial, encontramos su máximo

$$\frac{dR}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{mg}{4}\,\frac{2\cos\theta(-\mathrm{sen}\,\theta) + 20\,\mathrm{sen}\,\theta(10\cos\theta)}{2\sqrt{\cos^2\theta + (10\,\mathrm{sen}\,\theta)^2}} = 0$$

de donde

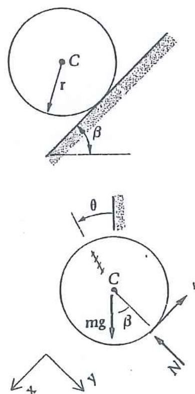
$$\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\,2\theta = 0$$

bien $\theta = 90°$ para la reacción máxima, que es

$$R_{\mathrm{MAX}} = \frac{mg}{4}\sqrt{\cos^2 90° + (10\,\mathrm{sen}\,90°)^2} = \frac{5}{2}\,mg\,.$$

Ejemplo 4.22

El cilindro (masa m, radio r) se deja en libertad sobre el plano inclinado mostrado en el diagrama. El coeficiente de fricción entre el cilindro y el plano es μ. Determinar el movimiento de C.



Solución

Igual que en estática, es conveniente trazar aquí un diagrama de cuerpo libre. Supondremos que el cilindro rueda (sin resbalar). En este caso la fuerza de fricción f es desconocida y tiene un valor que satisface las desigualdades

$$0 \leq f \leq f_{\mathrm{max}}$$

en donde $f_{m\acute{a}x} = \mu N$, como sabemos del estudio de la fricción en la estática. Emplearemos también una ecuación cinemática que refleje el rodamiento. Después de evaluar f determinamos si es menor que o igual a μN. Si no lo es, debemos tratar el problema *con* $f = \mu N$ y *sin* la ecuación cinemática de rodamiento.

Escogemos x, y, θ como se muestra en el diagrama ya que C se moverá hacia abajo a lo largo del plano y el cilindro girará en sentido antihorario. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}_C \Rightarrow mg\,\mathrm{sen}\,\beta - f = m\ddot{x}_C \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = m\ddot{y}_C \Rightarrow mg\cos\beta - N = m\ddot{y}_C = 0 \qquad (2)$$

(Nótese que cinemáticamente y_C es constante, por lo que $\ddot{y}_C = 0$)

$$\Sigma M_C = I_C\alpha \Rightarrow fr = \tfrac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} \qquad (3)$$

Podemos resolver (2) y obtener $N = mg\cos\beta$. Quedan dos ecuaciones con las tres incógnitas f, $\ddot{x}_C$ y $\ddot{\theta}$. Debemos por ello suplementar nuestras ecuaciones de movimiento con una condición cinemática (condición de rodamiento):

$$\ddot{x}_C = r\ddot{\theta} \qquad (4)$$

Resolviendo las Ecs. (1), (3) y (4) se obtiene

$$\ddot{x}_C = \tfrac{2}{3}g\,\mathrm{sen}\,\beta \qquad \ddot{\theta} = \frac{2g\,\mathrm{sen}\,\beta}{3r} \qquad f = \frac{mg\,\mathrm{sen}\,\beta}{3}$$

Integrando dos veces y notando que las constantes de integración desaparecen, obtenemos

$$x_C = \frac{gt^2}{3}\,\mathrm{sen}\,\beta \qquad \theta = \frac{gt^2}{3r}\,\mathrm{sen}\,\beta$$

y si

$$f \leq f_{\mathrm{max}} = \mu N$$

es decir, si

$$\frac{mg\,\mathrm{sen}\,\beta}{3} \leq \mu mg\cos\beta$$

o bien

$$\tan\beta \leq 3\mu$$

nuestra hipótesis y solución serán válidas y el cilindro rodará, como se supuso. Si por ejemplo $\mu = 0.5$ y $\beta = 30°$, entonces

$$\tan\beta = 0.577 \leq 3\mu = 1.5$$

tan y el cilindro rueda. Pero si $\mu = 0.2$ y $\beta = 60°$, entonces

$$\tan\beta = 1.73 \not\leq 3\mu = 0.6$$

y debemos comenzar otra vez con la solución del problema. En este caso

$$f = \mu N = \mu mg\cos\beta$$

ya que N es aún igual a $mg\cos\beta$. Como la Ec. (3) es aún válida

$$fr = \mu mgr\cos\beta = \tfrac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

o bien

$$\ddot{\theta} = \frac{2g\mu \cos \beta}{r}$$

Entonces, integrando dos veces obtenemos

$$\theta = \frac{\mu g t^2 \cos \beta}{r}$$

en donde las constantes de integración son cero ya que

$$mg \operatorname{sen} \beta - \mu mg \cos \beta = m\ddot{x}_C$$

o bien

$$\ddot{x}_C = g(\operatorname{sen} \beta - \mu \cos \beta)$$

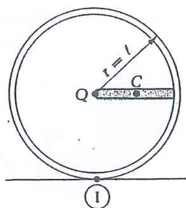
Por consiguiente

$$x_C = \frac{gt^2}{2}(\operatorname{sen} \beta - \mu \cos \beta)$$

Las soluciones para el movimiento ($x_C(t)$ y $\theta(t)$ son muy diferentes cuando el cilindro gira y resbala que cuando rueda. Nótese que si deseamos distinguir entre coeficientes de fricción estática y cinética (μ_s y μ_k), entonces la hipótesis de que el cilindro rueda será correcta si $\tan \beta \leq 3\mu_s$. Pero si $\tan \beta > 3\mu_s$ usaríamos entonces $f = \mu_k N$ en lo que resta de la solución, y la en las respuestas para x_C y μ debe escribirse como μ_k.

Ejemplo 4.23

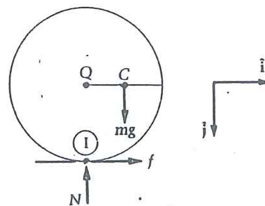
El cuerpo rígido $\mathcal{B}$ del diagrama consiste en una barra pesada de masa m soldada a un aro ligero; el radio del aro es igual a la longitud de la barra. Encuentre el coeficiente mínimo de fricción entre el aro y el suelo para el cual el cuerpo rodará al soltarlo desde el reposo en la posición dada.



Solución

El diagrama de cuerpo libre se muestra aquí junto con los vectores adoptados en el problema.

Pregunta 4.9 ¿Porqué es esta una buena elección de vectores básicos para este problema?



Nótese que la fuerza de gravedad resultante pasa por el centro de la barra ya que estamos despreciando el peso del aro.

A continuación escribimos las tres ecuaciones diferenciales del movimiento haciendo $\mathbf{a}_C = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}_C\hat{\mathbf{j}}$ y $\alpha = \alpha\hat{\mathbf{k}}$.

$$\Sigma F_x = m\ddot{x}_C \Rightarrow f = m\ddot{x}_C \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = m\ddot{y}_C \Rightarrow mg - N = m\ddot{y}_C \quad (2)$$

$$\Sigma M_C = I_C\alpha \Rightarrow \frac{N\ell}{2} - f\ell = \frac{m\ell^2}{12}\alpha \quad (3)$$

Estas ecuaciones contienen las incógnitas f, N, $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$ y α. De la cinemática obtenemos dos ecuaciones más. Sabemos que la aceleración del centro geométrico Q del aro es $\mathbf{a}_Q = r\alpha\hat{\mathbf{i}}$, por lo que

$$\mathbf{a}_C = \underbrace{\mathbf{a}_Q}_{a_Q\hat{\mathbf{i}} = r\alpha\hat{\mathbf{i}}} + \alpha\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{QC} - \overbrace{\omega^2}^{0}\mathbf{r}_{QC}$$

o bien

$$\ddot{x}_C\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}_C\hat{\mathbf{j}} = r\alpha\hat{\mathbf{i}} + \alpha\hat{\mathbf{k}} \times \left(\frac{\ell}{2}\hat{\mathbf{i}}\right)$$

Igualando los coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ encontramos

$$\ddot{x}_C = \ell\alpha \quad (4)$$

$$\ddot{y}_C = \frac{\ell\alpha}{2} \quad (5)$$

El lector puede verificar que (4) y (5) también se obtienen al relacionar $\mathbf{a}_C$ con $\mathbf{a}_{Ⓘ} = r\omega^2\uparrow$ expresión siempre válida para cualquier cuerpo redondo con rodamiento sobre una superficie fija plana. En este problema $\mathbf{a}_{Ⓘ}$ es cero al liberar el cuerpo, porque hasta que transcurre el tiempo, ω es aún cero.

Resolviendo las Ecs. (1) a (5) para evaluar las cinco incógnitas se obtienen los siguientes resultados:

$$f = \frac{3}{8}mg \qquad N = \frac{13}{16}mg \qquad \ddot{x}_C = \frac{3g}{8} \qquad \ddot{y}_C = \frac{3g}{16} \qquad \alpha = \frac{3g}{8\ell}$$

Para completar la solución debemos introducir el coeficiente de fricción μ. Sabemos que para cualquier fuerza de fricción f,

$$0 \leq f \leq f_{max} = \mu N$$

Por consiguiente, en nuestro problema

$$\frac{3}{8}mg \leq \mu \frac{13}{16}mg$$

de modo que

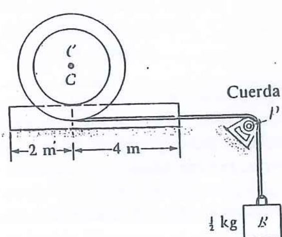
$$\mu \geq \frac{6}{13}$$

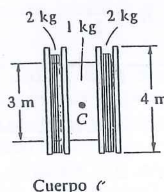
Esto significa que para que el cuerpo ruede se requiere un coeficiente de fricción de por lo menos ; este es entonces el valor mínimo deseado. Nótese en este problema que

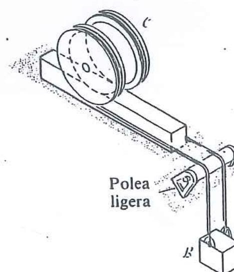
1. $N < mg$ como era de esperarse, porque de otra manera el centro de masa no podría empezar a moverse hacia abajo al rodar el cuerpo.
2. $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, α son todas positivas y por lo tanto están en las direcciones esperadas.

Ejemplo 4.24

Encontrar las aceleraciones de C y B (los centros de masa de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$) en el instante en que el sistema formado por el carrete $\mathcal{C}$ y el bloque $\mathcal{B}$ se liberan desde el reposo (ver el diagrama). Calcular también el tiempo que tarda el carrete en rodar fuera de la viga y determine que tanta cuerda se enrolla o desenrolla en ese tiempo (aclare qué es lo que sucede). Suponga suficiente fricción para impedir el resbalamiento.







Solución

Primero se trazan los diagramas de cuerpo libre y se escriben las ecuaciones de movimiento. En $\mathcal{C}$, ya que y tomando

$$\Sigma F_x = f - T = m\ddot{x}_C = 5\ddot{x}_C \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 49.1 - N = m\ddot{y}_C = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_C = 2T - 1.5f = I_C\alpha = 9.13\alpha \qquad (3)$$

en donde se introdujo el valor de I_C del cuerpo formado de tres cilindros:

$$I_C = 2\left[\frac{1}{2}2(2^2)\right] + \frac{1}{2}1(1.5^2) = 9.13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Sumando la Ec. (1) multiplicada por 1.5 a la Ec. (3), se elimina la fuerza de fricción:

$$0.5T = 7.5\ddot{x}_C + 9.13\alpha$$

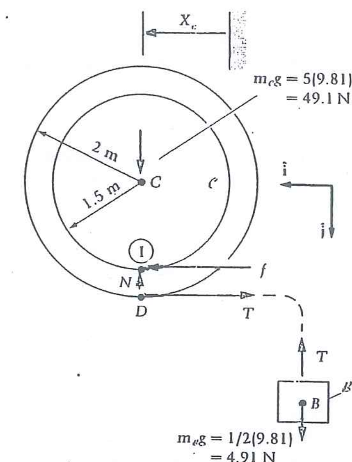
Como el carrete esta rodando, $\ddot{x}_C = r\alpha = 1.5\alpha$ por lo que

$$0.5T = 7.5(1.5\alpha) + 9.13\alpha = 20.4\alpha \qquad (4)$$

De la Ec. (2) obtenemos N = 49.1 N, y de las Ecs. (1) y (3) hemos obtenido la Ec. (4). Entonces tenemos ahora una ecuación, la (4), con dos incógnitas, T y α. Nos fijamos en el *otro* diagrama de cuerpo libre, el del cuerpo $\mathcal{B}$, y escribimos su ecuación de movimiento vertical. Nótese que la tensión en ambos lados de la pequeña polea $\mathcal{P}$ es aproximadamente la misma, porque si su masa es despreciable, entonces $I_{C_P} \approx 0$ y $\Sigma M_{C_P} = I_{C_P}\alpha \approx 0$. (Si su peso es nulo, no se requiere ningún momento para hacerla girar). Por lo tanto, con $\mathbf{a}_B = \ddot{y}_B\hat{\mathbf{j}}$,

$$\Sigma F_y = m_B\ddot{y}_B$$

$$4.91 - T = \tfrac{1}{2}\ddot{y}_B \qquad (5)$$



Las Ecs. (4) y (5) contienen ahora tres incógnitas; por medio de relaciones cinemáticas relacionamos $\ddot{y}_B$ y α. La aceleración (vertical) de B (o de cualquier otro punto de $\mathcal{B}$, ya que éste se halla en traslación) tiene la misma magnitud que la de cualquier punto de los tramos horizontales o verticales de la cuerda; además el punto de la misma que está justamente saliendo del cuerpo en su punto más bajo D, tiene la misma aceleración que la parte tangencial (horizontal) de $\mathbf{a}_D$:

$$\ddot{y}_B = (2 - 1.5)\alpha = 0.5\alpha \text{ m/s}^2 \qquad (6)$$

Sustituyendo (6) en (5) se obtiene

$$4.91 - T = \tfrac{1}{2}(0.5\alpha) = 0.25\alpha \qquad (7)$$

Igualando T (de la Ec. 4) a T (de la Ec. 7) podemos encontrar

$$40.8\alpha = 4.91 - 0.25\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4.91}{41.1} = 0.119 \text{ rad/s}^2$$

Tenemos entonces para las aceleraciones de B y C:

$$\ddot{y}_B = 0.5\alpha = 0.0595 \text{ m/s}^2$$

$$\ddot{x}_C = 1.5\alpha = 0.179 \text{ m/s}^2$$

Integrando obtenemos

$$\dot{x}_C = 0.179t + \cancel{C_1} \text{ m/s} \qquad \text{0, ya que } \dot{x}_C = 0 \text{ en } t = 0$$

$$x_C = 0.0895t^2 + \cancel{C_2} \text{ m} \qquad \text{0, ya que } x_C = 0 \text{ en } t = 0 \text{ (así escogida)}$$

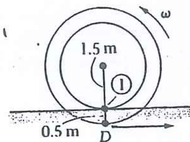
El cuerpo rodará hacia afuera (por la izquierda) del extremo de la viga cuando $x_C = 2$ m:

$$2 = 0.0895t_{\text{salida}}^2$$

$$t_{\text{salida}} = 4.73 \text{ s}$$

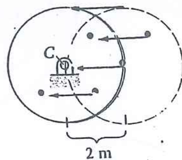
Al moverse el punto C hacia la izquierda, la cuerda se *desenrolla* conforme se mueven los cuerpos. Se puede ver esto de dos maneras:

Primera manera de verlo:



Los puntos D (en la base del cuerpo) se mueven sucesivamente hacia la derecha al girar el cuerpo C alrededor de ①. Esto significa que B cae en el espacio una distancia $0.5\,\theta = 0.5\,(2/1.5) = 2/3$ m. Además, cierta cantidad de cuerda se desenrolla de C igual al desplazamiento hacia la izquierda del lugar geométrico de los puntos de contacto que es de 2 m. Así, una longitud de cuerda 8/3 m que originalmente estaba enrollada alrededor de C se encuentra ahora en el espacio entre C y B.

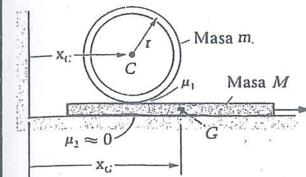
Segunda manera de verlo:



Primero deje que C *se traslade* 2 m hacia la izquierda. Esto *eleva* B en 2 m, pero no enrolla o desenrolla a la cuerda. Si ahora giramos C (⊃) alrededor de C hasta que el punto correcto esté sobre el plano*, el ángulo necesario para lograr esto es $\theta = 2/1.5 = 4/3$ rad. Esto ocasiona que salga una longitud de cuerda igual a $2\,\theta = 8/3$ m, y B cae también 8/3 m. El movimiento *neto* de B es por lo tanto $8/3 - 2 = 2/3$ m de caída, lo que se logra al desenrollarse 8/3 m de cuerda de C.

* "Punto correcto" significa el punto que estaría en contacto con el plano si el cuerpo hubiese *rodado* hacia la izquierda, como de hecho lo hace.

Ejemplo 4.25



La fuerza P se aplica a una placa que descansa sobre una superficie lisa. (Ver el diagrama.) Encuentre la máxima fuerza P para la que el tubo no resbalará sobre la placa.

Solución

En el tubo (Figura 1), con $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\hat{\mathbf{k}}$:

$$\Sigma F_x = f = m\ddot{x}_C \tag{1}$$

$$\Sigma F_y = N - mg = m\ddot{y}_C = 0 \Rightarrow N = mg \tag{2}$$

$$\Sigma M_C = fr = I_C\alpha = mr^2\alpha \tag{3}$$

(Note que $I_C = (m/2)(r_o^2 + r_i^2) \approx mr^2$ si $r_o \approx r_i$. Si el espesor $(r_o - r_i)$ no se da, suponga que es pequeño.)

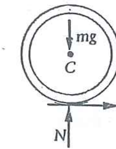


Figura 1

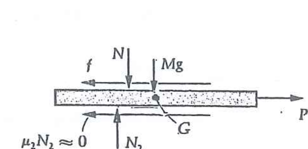


Figura 2

En la placa (Fig. 2) notamos que sólo la ecuación en x del movimiento es de alguna ayuda; $\Sigma F_y = m\ddot{y}_G = 0$ da $N_2 = N + Mg = (m + M)g$, como se esperaba, y como no se indican dimensiones no se pueden tomar momentos. (De todas maneras, la ecuación de momentos sólo dará la posición de N_2.) Por lo tanto,

$$\Sigma F_x = P - f = M\ddot{x}_G^* \tag{4}$$

y con las Ecs. (1) y (4), se obtiene

$$m\ddot{x}_C = mr\alpha \tag{5}$$

Eliminando f con las Ecs. (1) y (3), se obtiene

$$P = m\ddot{x}_C + M\ddot{x}_G \tag{6}$$

Nótese que si $m_T = m + M$ y C_T es el centro de masa del tubo más la placa, la Ec. (6) se podría haber escrito inmediatamente a partir de $\Sigma F_x = m_T\ddot{x}_{C_T}$ para el sistema compuesto. Aquí $\Sigma F_x = P$ y el segundo miembro se obtiene de las dos derivadas de la definición del centro de masa $(m_T x_{CT} = mx_C + Mx_G)$.

Con la ecuación cinemática hay que tener cuidado. Se trata de una situación de rodamiento pero debemos recordar que x_G y x_C se

miden necesariamente con relación a un marco inercial, supuesto aquí fijo en el suelo. Entonces es $\ddot{x}_C - \ddot{x}_G$ lo que está relacionado con α.[+] Para que no haya resbalamiento, $\dot{x}_C + r\omega = \dot{x}_G$, lo cual al derivarse da

$$\ddot{x}_C - \ddot{x}_G = -r\alpha \tag{7}$$

Sustituyendo de (5) en (7) se obtiene la relación entre las aceleraciones de los dos centros de masa:

$$2\ddot{x}_C = \ddot{x}_G \tag{8}$$

Entonces (6) y (8) pueden combinarse para dar

$$P = (m + 2M)\ddot{x}_C \tag{9}$$

y combinando (9) con (1) se obtiene la relación entre P y f:

$$P = \frac{m + 2M}{m} f \tag{10}$$

Ya que $f \leq \mu_1 N$ si no hay resbalamiento, (10) da:

$$\frac{m}{m + 2M} P \leq \mu_1 mg \Rightarrow P \leq (m + 2M)g\mu_1$$

Si P es mayor que $(m + 2M)g\,\mu_1$, el tubo resbalará sobre la placa.

Ejemplo 4.26

Una barra uniforme está soportada por dos cuerdas, como muestra la figura. Si la cuerda de la derecha se rompe repentinamente, determinar la tensión inicial en la cuerda de la izquierda AD. ("Inicial" significa antes de que la barra tenga tiempo para moverse y genere velocidades.)

Solución

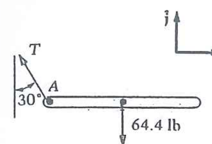
Las ecuaciones de movimiento, de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre mostrado son, con $\mathbf{a}_C = \ddot{x}_C\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}_C\hat{\mathbf{j}}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\hat{\mathbf{k}}$:

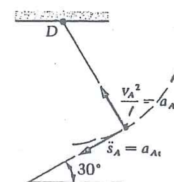
$$\Sigma F_x = -T\left(\frac{1}{2}\right) = m\ddot{x}_C = 2\ddot{x}_C \tag{1}$$

$$\Sigma F_y = -64.4 + T\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = m\ddot{y}_C = 2\ddot{y}_C \tag{2}$$

$$\Sigma M_C = -T\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1) = I_C\alpha = \frac{mL^2}{12}\alpha = \frac{2\alpha}{3} \tag{3}$$

* G se usa a veces para designar el centro de masa.
+ Esta diferencia es justamente la aceleración de C en el marco de referencia asociado a la placa en traslación.





Como las Ecs. (1) a (3) contienen cuatro incógnitas (T, $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$ y α) hay que buscar una ecuación cinemática adicional. El punto A está obligado a moverse (ver la figura) sobre una circunferencia de radio l alrededor de D, con las componentes de aceleración tangencial y normal mostradas (Sección 1.7). En el instante de interés $v_A = 0$ (nada se mueve aún).

Podemos relacionar esta $\mathbf{a}_A$ con $\mathbf{a}_C$:

$$\mathbf{a}_C = \ddot{x}_C\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}_C\hat{\mathbf{j}} = \underbrace{\mathbf{a}_A}_{\ddot{s}_A \angle 30°} + \underbrace{\alpha\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{AC}}_{\alpha\hat{\mathbf{j}}} - \omega^2\mathbf{r}_{AC} \tag{4}$$

($\mathbf{r}_{AC} = 1\hat{\mathbf{i}}$; $\omega^2\mathbf{r}_{AC}$: cero en $t = 0$)

Si multiplicamos escalarmente esta ecuación con un vector unitario en la dirección (60°) eliminaremos $\mathbf{a}_A$ (que es perpendicular a esta dirección). Esto es más sencillo que resolver las dos ecuaciones en las componentes $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. Tal vector unitario es

$$-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}}$$

por lo que

$$\ddot{x}_C\left(-\frac{1}{2}\right) + \ddot{y}_C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 + \alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

o bien

$$-\ddot{x}_C + \sqrt{3}\ddot{y}_C = \sqrt{3}\alpha \tag{5}$$

De las Ecs. (1), (2) y (3) se obtiene

$$\ddot{x}_C = -\frac{T}{4} \qquad \ddot{y}_C = -32.2 + T\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \qquad \alpha = \frac{-3\sqrt{3}T}{4}$$

Sustituyendo estos tres valores en (5) se obtiene:

$$+\frac{T}{4} + \sqrt{3}\left(-32.2 + \frac{\sqrt{3}T}{4}\right) = -\sqrt{3}\left(\frac{3\sqrt{3}T}{4}\right) = -\frac{9T}{4}$$

o bien

$$T = \frac{4}{13}(32.2)\sqrt{3} = 17.2 \text{ lb}$$

Nótese que antes de que la cuerda de la derecha se rompiera, la tensión en ella era, por estática:

$$\Sigma F_y = 0 = 2T_{(\text{est.})}\frac{\sqrt{3}}{2} - 64.4 \Rightarrow T_{(\text{est.})} = 37.2 \text{ lb}$$

Las fuerzas en cuerdas o cables inextensibles son capaces de cambiar de valor "instantáneamente", como es el caso en este ejemplo.

Pregunta 4.10 ¿Pueden las fuerzas en los *resortes* cambiar instantáneamente de valor?

Sustituyendo "hacia atrás" se obtienen los siguientes valores

$$\ddot{x}_C = \frac{17.2}{4} = -4.30 \text{ pie/s}^2$$

$$\ddot{y}_C = \frac{17.2\sqrt{3}}{4} - 32.2 = -24.8 \text{ pie/s}^2$$

El centro de masa comenzará a moverse hacia la izquierda y hacia abajo.

$$\alpha = \frac{-17.2\,(3\sqrt{3})}{4} = -22.3 \text{ rad/s}^2$$

El cuerpo empezará a girar en dirección horaria.

La aceleración de A se obtiene de la Ec. (4):

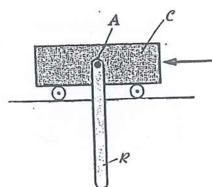
$$\mathbf{a}_A = -4.30\hat{\imath} - 24.8\hat{\jmath} + 22.3\hat{\jmath}$$

$$= -4.30\hat{\imath} - 2.5\hat{\jmath}$$

y como comprobación, $\mathbf{a}_A$, $\tan^{-1}\left(\frac{2.5}{4.3}\right)$ su dirección es, o sea 30°

Ejemplo 4.27

La barra uniforme $\mathcal{R}$ (longitud = 80 cm, masa = 20 kg) está unida al carro $\mathcal{C}$ por medio de un pasador liso. La fuerza P, aplicada a $\mathcal{C}$ con el sistema originalmente en reposo, genera en éste una aceleración de 3 ← m/s². Hallar la aceleración angular inicial de la barra.



Solución

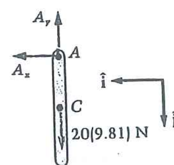
De acuerdo con la Ec. (4.15) podemos sumar momentos respecto a A de las fuerzas sobre $\mathcal{R}$ y evitar así tener que usar la ecuación $\Sigma F_x = m\ddot{x}_C$ en este caso. Considerando el cuerpo libre mostrado obtenemos

$$\Sigma M_A = I_C\alpha + (\mathbf{r}_{AC} \times m\mathbf{a}_C)_z \quad (1)$$

Notemos que $I_C = m\ell^2/12 = 20(0.8)^2/12 = 1.07$ kg · m²; $\mathbf{a}_C$ la obtenemos por cinemática.

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \alpha\hat{k} \times (0.4\hat{\jmath}) - \omega^2(0.4\hat{\jmath}) \quad (\omega = 0 \text{ en } t = 0)$$

$$\mathbf{a}_C = 3\hat{\imath} - 0.4\alpha\hat{\imath} = (3 - 0.4\alpha)\hat{\imath}$$



Sustituyendo en (1),

$$0 = 1.07\alpha + [0.4\hat{\jmath} \times 20(3 - 0.4\alpha)\hat{\imath}]_z$$

$$0 = (1.07 + 3.2)\alpha - 24$$

$$\alpha = 5.62 \text{ rad/s}^2$$

La barra empieza a moverse con una $\alpha = 5.62$ ↺ rad/s².

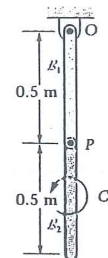
De manera más sencilla, nótese que según la Ec. (4.17):

$$\Sigma M_A = I_A\alpha + (\mathbf{r}_{AC} \times m\mathbf{a}_A)_z$$

$$0 = \frac{m\ell^2}{3}\alpha - \frac{\ell}{2}ma_A = \frac{20(0.8)^2}{3}\alpha - 0.4(20)3$$

$$\alpha = 5.62 \text{ rad/s}^2, \text{ como antes}$$

Ejemplo 4.28



Las dos barras delgadas uniformes $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, cada una de masa igual a 2 kg, están articuladas entre sí en P, y $\mathcal{B}_1$ está suspendida de un pasador en O. (Este arreglo se denomina *péndulo doble*). En $t = 0$ se aplica un par antihorario $C_O = 150$ N · m al elemento $\mathcal{B}_2$. Obtener las aceleraciones angulares de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, justo después de la aplicación del par y la fuerza ejercida sobre $\mathcal{B}_2$ en P.

Solución:

De acuerdo con los respectivos diagramas de cuerpo libre, las ecuaciones de movimiento de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son:

$$\Sigma F_x = O_x - P_x = 2\ddot{x}_C \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = O_y - P_y - 19.6 = 2\ddot{y}_C \quad (2)$$

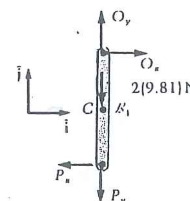
$$\Sigma M_O = -0.5P_x = \frac{2(0.5)^2}{3}\alpha_1 \quad (3)$$

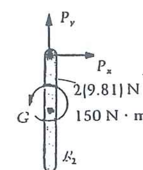
(Nótese en la Ec. (3) que O es un pivote de $\mathcal{B}_1$.)

$$\Sigma F_x = P_x = 2\ddot{x}_G \quad (4)$$

$$\Sigma F_y = P_y - 19.6 = 2\ddot{y}_G \quad (5)$$

$$\Sigma M_G = -P_x(0.25) + 150 = \frac{2(0.5)^2}{12}\alpha_2 \quad (6)$$





Tenemos hasta ahora seis ecuaciones con diez incógnitas: O_x, O_y, P_x, P_y, $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, α_1, $\ddot{x}_G$, $\ddot{y}_G$ y α_2. La cinemática da las ecuaciones adicionales que necesitamos:

$$\underbrace{\ddot{x}_C\hat{\imath} + \ddot{y}_C\hat{\jmath}}_{\mathbf{a}_C} = \cancel{\mathbf{a}_O}^{\,0} + \alpha_1\hat{k} \times \cancel{\mathbf{r}_{OC}}^{\,-0.25\hat{\jmath}} - \cancel{\omega_1^2}^{\,0 \text{ en } t = 0}\mathbf{r}_{OC}$$

Coeficientes de $\hat{\imath} \Rightarrow \ddot{x}_C = 0.25\alpha_1 \quad (7)$

Coeficientes de $\hat{\jmath} \Rightarrow \ddot{y}_C = 0 \quad (8)$

También,

$$\ddot{x}_G\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}_G\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{a}_P + \alpha_2\hat{\mathbf{k}} \times \overset{-0.25\hat{\mathbf{j}}}{\mathbf{r}_{PG}} - \overset{0 \text{ en } t=0}{\omega_2^2}\mathbf{r}_{PG}$$

Pero

$$\mathbf{a}_P = \overset{0}{\mathbf{a}_O} + \alpha_1\hat{\mathbf{k}} \times (-0.5\hat{\mathbf{j}}) - \overset{0}{\omega_1^2}(-0.5\hat{\mathbf{j}})$$
$$= 0.5\alpha\hat{\mathbf{i}}$$

Por tanto

$$\ddot{x}_G = 0.5\alpha_1 + 0.25\alpha_2 \qquad (9)$$

$$\ddot{y}_G = 0 \qquad (10)$$

La solución de esas ecuaciones es:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = -771\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = 2060\hat{\mathbf{k}} \text{ rad/s}^2 \quad \text{y}$$

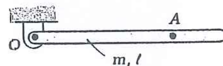
Fuerza sobre $\mathcal{B}_2$ en $P = P_x\hat{\mathbf{i}} + P_y\hat{\mathbf{j}} = 257\hat{\mathbf{i}} + 19.6\hat{\mathbf{j}}$ N

Los valores de las incógnitas restantes (además de $\ddot{y}_C = \ddot{y}_G = 0$) son:

$O_x = -129$ N, $O_y = 39.2$ N, $\ddot{x}_C = -193$ m/s², y $\ddot{x}_G = 129$ m/s².

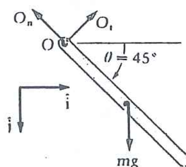
Ejemplo 4.29

La barra delgada sostenida por un pasador liso en O se suelta desde el reposo en la posición *mostrada*. Después de girar 45° ⊋, su rapidez angular es $\omega = \sqrt{(3g)/(\sqrt{2}\ell)}$. Hallar para ese instante la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento flexionante en el punto A, que se encuentra a del extremo libre de la barra. Se tiene que ℓ es la longitud de la barra.)



Solución

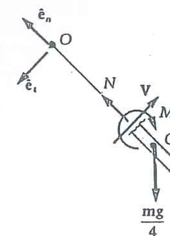
Primero encontramos la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\hat{\mathbf{k}}$:



$$\Sigma M_O = I_O\alpha$$

$$\frac{mg}{\sqrt{2}}\frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{3}m\ell^2\right)\alpha$$

$$\alpha = \frac{3g}{2\sqrt{2}\ell}$$



Luego escribimos las ecuaciones de movimiento para el diagrama de cuerpo libre de la cuarta parte inferior de la barra:

$$\Sigma F_t = ma_{C't}$$

$$\frac{mg}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} - V = \frac{m}{4}\left(\frac{7}{8}\ell\alpha\right) = \frac{7}{32}m\ell\left(\frac{3g}{2\sqrt{2}\ell}\right)$$

de modo que

$$V = \frac{-5}{64\sqrt{2}}mg$$

Nótese que ω y α son las mismas que para toda la barra y que O es un pivote del "subcuerpo" prolongado o extendido.

$$\Sigma F_n = ma_{C'n}$$

$$N - \frac{mg}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{m}{4}\left(\frac{7}{8}\ell\omega^2\right) = \frac{7m\ell}{32}\frac{3g}{\sqrt{2}\ell} = \frac{21mg}{32\sqrt{2}}$$

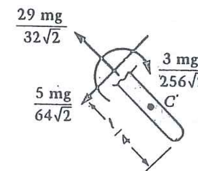
$$N = \frac{29mg}{32\sqrt{2}}$$

Finalmente, la "ecuación de momento para el movimiento" es

$$\Sigma M_{C'} = I_{C'}\alpha$$

$$M + V\left(\frac{\ell}{8}\right) = \left(\frac{\frac{m}{4}\left(\frac{\ell}{4}\right)^2}{12}\right)\left(\frac{3g}{2\sqrt{2}\ell}\right)$$

$$M = \frac{3}{256\sqrt{2}}mg\ell$$



Los tres resultados finales se indican gráficamente sobre la sección cortada que se presenta en el último croquis.

Problemas / Sección 4.5

4.35 ¿Para qué fuerza P es posible que la barra uniforme delgada (Fig. P4.35) se traslade a lo largo del piso liso en la posición mostrada? La barra tiene masa m y longitud ℓ.

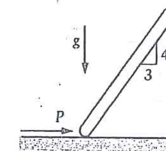


Figura P4.35

4.36 Un gabinete de 100 lb que puede rodar sobre ruedas pequeñas está bajo la acción de una fuerza de 40 lb, como muestra la Fig. P4.36. Despreciando la fricción, encuentre (a) la aceleración del gabinete y (b) las reacciones del suelo sobre las ruedas.

4.37 Repita el problema anterior para el caso en que la fuerza de 40 lb esté aplicada 1 pie *arriba* de C.

4.38 Encuentre el valor de F para el cual una de las ruedas de la puerta en la Fig. P4.38 se levanta del riel. ¿Cuál se levanta? Suponga fricción despreciable.

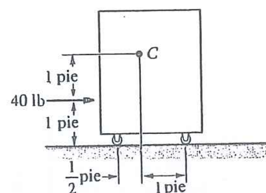


Figura P4.36

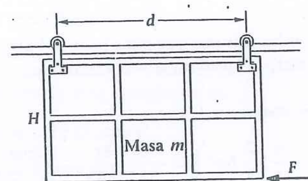


Figura P4.38

4.39 La fuerza P ocasiona el deslizamiento de la caja uniforme rectangular de peso W de la Fig. P4.39. Encuentre el intervalo de valores de H para el cual la caja, al deslizarse sobre el piso liso, no se volteará alrededor de la arista frontal ni de la trasera; suponga $P = W$.

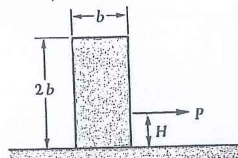


Figura P4.39

4.40 Repita el problema anterior considerando un coeficiente de fricción de 0.2.

4.41 Se transporta un gabinete de 400 lb sobre un camión, como se muestra en la Fig. P4.41. Suponiendo suficiente fricción para que el gabinete no resbale sobre el vehículo, ¿cuál es la aceleración máxima hacia adelante para la que el gabinete no se volcará?.

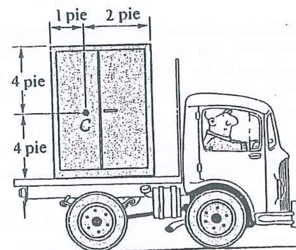


Figura P4.41

4.42 La barra uniforme $\mathcal{B}$ de la Fig. P4.42 pesa 60 lb y está articulada en A (y sostenida por el cable DB) al marco $\mathcal{F}$. Si se le da a éste marco una aceleración $a = 32.2$ pie/s^2, como se muestra, determine la tensión T en el cable y la fuerza ejercida por el pasador en A sobre la barra.

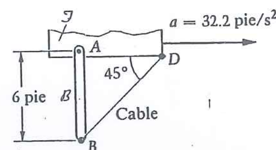


Figura P4.42

4.43 Las cuerdas en la Fig. P4.43 tienen una resistencia a la tensión de 12 N. El carro $\mathcal{C}$ tiene una masa de 35 kg; la barra $\mathcal{R}$ vertical articulada en A tiene una masa de 10 kg y una longitud de 1.2 m. Encuentre el valor máximo de P que puede ejercerse sin romper ninguna cuerda si (a) P actúa hacia la derecha y (b) si P actúa hacia la izquierda; desprecie la fricción y suponga una tensión despreciable en cada cuerda cuando el carro está en reposo.

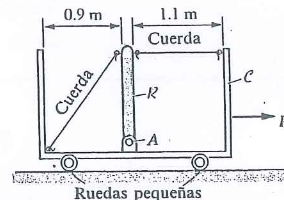


Figura P4.43

4.44 Una fuerza F alterna en dirección, desplaza al carro con movimiento horizontal rectilíneo definido por la ecuación $x = 2 \operatorname{sen} \pi t$, en donde x es el desplazamiento en pies y t el tiempo en segundos (Fig. P4.44). Una barra delgada homogénea, y rígida, de peso igual a 32.2 lb y longitud de 6 pie está soldada en B al carro y sobresale en posición vertical. Encuentre en magnitud y dirección, el momento flexionante que el carro ejerce sobre la barra en B cuando $t = 1/2$ s.

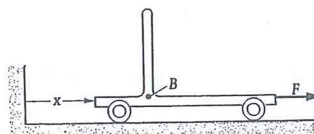


Figura P4.44

4.45 Una niña nota que algunas veces la pelota $\mathcal{M}$ no rueda hacia abajo sobre el plano inclinado de su juguete $\mathcal{T}$ cuando empuja a éste sobre el piso (Fig. P4.45), ¿Cuál es la aceleración mínima a_{min} de $\mathcal{T}$ que impide este rodamiento?

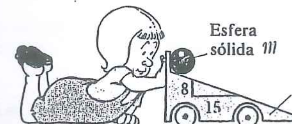


Figura P4.45

4.46 En el problema anterior suponga que la aceleración de $\mathcal{T}$ es de $2a_{min}$. ¿Cuál es la fuerza normal entre la superficie vertical lisa de $\mathcal{T}$ y la pelota? El peso de la pelota es de 0.06 lb.

4.47 Un cilindro sólido uniforme $\mathcal{C}$ (Fig. P4.47) es empujado sobre la superficie $\mathcal{B}$ por un brazo móvil $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{C}$ se *traslada* hacia la derecha con $\ddot{x}_C = g/10$, ¿cuál debe ser el coeficiente mínimo de fricción entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$? El coeficiente de fricción entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ es μ.

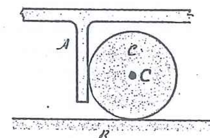


Figura P4.47

4.48 La fuerza P se aplica al carro $\mathcal{C}$ y crece paulatinamente desde cero, actuando siempre hacia la derecha (Fig. P4.48). El punto C es el centro de masa de $\mathcal{B}$. ¿Para qué valor de P no se moverán conjuntamente los cuerpos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$?

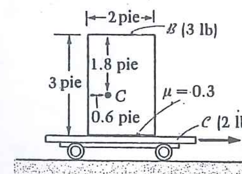


Figura P4.48

4.49 Un bloque no uniforme descansa sobre la plataforma de un carro, como se ve en la Fig. P4.49. Si el coeficiente de fricción entre en carro y el bloque es de 0.40, ¿para qué intervalo de aceleraciones del carro, el bloque no resbalará ni se volcará?

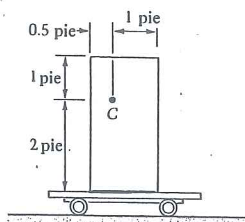
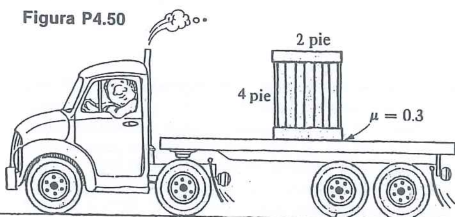


Figura P4.49

4.50 El camión en la Fig. P4.50 viaja a 45 mi/h. Encuentre la distancia mínima en que puede detenerse para que el cajón de 250 lb no resbale ni se voltee.

Figura P4.50



4.51 El vehículo monorriel en la Fig. P4.51 es impulsado por sus ruedas delanteras y corre hacia la derecha. Si el coeficiente de fricción entre ruedas y rieles es $\mu = 0.55$, determine la máxima aceleración posible del vehículo.

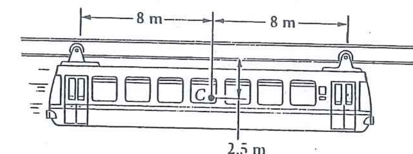


Figura P4.51

4.52 Ver la Fig. P4.52. (a) En términos de las dimensiones b, H, d y del coeficiente de fricción μ, encuentre la aceleración máxima posible del carro. Desprecie la inercia rotacional de las llantas. (b) ¿Cómo podrían ajustarse los cuatro parámetros b, H, d y μ para incrementar la aceleración?.

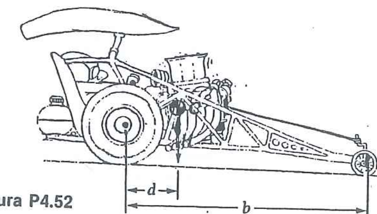


Figura P4.52

4.53 Repita el problema anterior para un carro con (a) tracción delantera y (b) tracción en las cuatro ruedas.

4.54 En una emergencia el conductor de un auto aplica los frenos; los frenos delanteros fallan y las ruedas traseras sí se traban. Encuentre el tiempo y la distancia requerida para detener el auto. Desprecie las masas de las ruedas y exprese los resultados en términos del coeficiente de fricción μ, la velocidad inicial v, la aceleración de la gravedad g y las dimensiones mostradas en la Fig. P4.54.

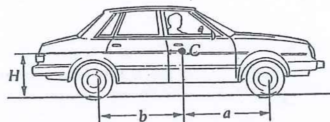


Figura P4.54

4.55 Una barra uniforme $\mathcal{A}$ de longitud L y peso W está conectada a las articulaciones lisas en E y D por los miembros ligeros $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ de longitud L. En la posición mostrada en la Fig. P4.55, $\mathcal{B}$ tiene una velocidad angular horaria de ω rad/s. Encuentre las fuerzas en los miembros $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, y determine la aceleración del centro C de la barra $\mathcal{A}$ en términos de las variables dadas.

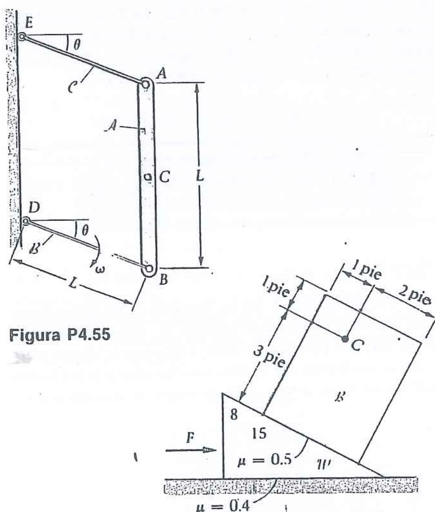


Figura P4.55

Figura P4.56

* 4.56 Encuentre el intervalo de aceleraciones de $\mathcal{W}$ que puede producir F *sin* que $\mathcal{B}$ se mueva *en absoluto* relativo a $\mathcal{W}$ (Fig. P4.56). Note cuidadosamente la posición del centro de masa de $\mathcal{B}$.

* 4.57 Una barra delgada homogénea pesa 64.4 lb y tiene 20 pie de longitud; está soportada como muestra la Fig. P4.57. Las barras $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son de masa despreciable y tienen pasadores sin fricción en cada extremo. El sistema se libera desde el reposo en $\theta = 0$.

a. Obtenga expresiones para la velocidad angular y la aceleración angular de las barras $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en función de θ.

b. Obtenga expresiones para la fuerza axial en las barras $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_1$ en función de θ.

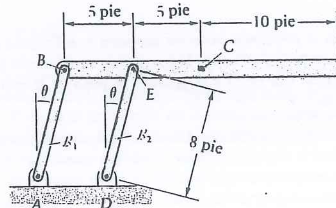


Figura P4.57

4.58 En el Ejemplo 4.29 note que el pivote O es también un punto del "subcuerpo" usado en ese ejemplo. Así, para tal cuerpo, $\Sigma M_O = I_O\alpha$. Calcule separadamente ΣM_O e $I_O\alpha$ para el subcuerpo y muestre que sus valores son iguales.

4.59 Un cuerpo $\mathcal{B}$ pesa 805 lb., tiene un radio de giro respecto a su eje z_C de 0.8 pie (Fig. P4.59) y está articulado en su centro de masa. Un par horario de magnitud e^t lb · pie se aplica a $\mathcal{B}$ en $t = O$. Encuentre el ángulo que $\mathcal{B}$ ha girado en el intervalo $0 \leq t \leq 3$ segundos.

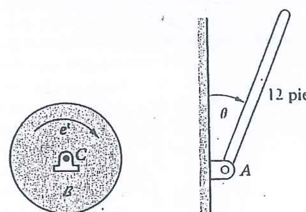


Figura P4.59 Figura P4.60

4.60 La barra delgada homogénea en la Fig. P4.60 es de 12 pie de longitud y pesa 5 lb; está conectada a un soporte en A por una articulación herrumbrosa. Debido a la fricción en la articulación, ésta ejerce un par de 9 lb · pie sobre la barra al girar ésta. Si la barra se libera desde el reposo en $\theta = 30°$, encuentre: (a) la aceleración angular de la barra cuando $\theta = 30°$, 60° y 90°; (b) el ángulo θ en el que la aceleración angular de la barra es cero.

* 4.61 La barra delgada homogénea en la Fig. P4.61 está soportada por una cuerda en A y un pasador horizontal en B. Se corta la cuerda. Determine en ese instante, la localización del pasador B que dará la máxima aceleración angular inicial a la barra.

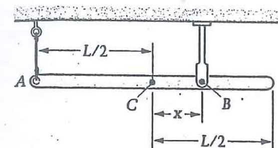


Figura P4.61

4.62 Los cuerpos de peso W_1 y W_2 en la Fig. P4.62 están unidos por una cuerda inextensible que pasa sobre una polea. La polea pesa W y su masa está concentrada en el borde de radio R. Demuestre que si el sistema se libera y la cuerda no resbala sobre la polea, la magnitud de la aceleración de W_1 y W_2 es

$$\left|\frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2 + W}g\right|$$

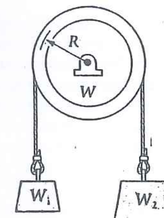


Figura P4.62

4.63 Encuentre la aceleración angular del cilindro $\mathcal{C}$ en la Fig. P4.63. La cuerda pasa sobre él sin resbalar y está unida a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como se muestra.

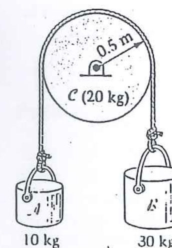


Figura P4.63

4.64 El cuerpo $\mathcal{C}$ es una polea formada por los cilindros $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ que están rígidamente conectados entre sí (Fig. P4.64). El cuerpo compuesto $\mathcal{C}$ está articulado, sin fricción, al suelo a través de su eje de simetría (que pasa por su centro de masa). Las cuerdas enrolladas alrededor de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{D}$ están unidas a los cuerpos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente. Si el sistema se libera del reposo, ¿cuál será la aceleración angular de $\mathcal{C}$?

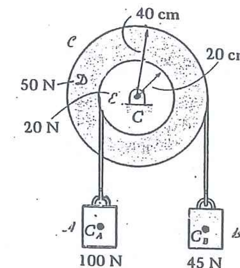


Figura P4.64

4.65 La transmisión de cadena en la Fig. P4.65 puede considerarse formada por dos discos de igual densidad y espesor. La rueda catarina mayor tiene una masa de 2 kg y un radio de 0.2 m. Si el par se aplica partiendo del reposo en $t = 0$, encuentre la rapidez angular de la rueda pequeña en $t = 10$ s. *Sugerencia:* ¿Con qué mecanismo semejante trabaja un dentista?.

* 4.66 El cilindro $\mathcal{C}$ en la Fig. P4.66 con cuatro agujeros gira a 200 rpm inicialmente. Se coloca en la posición mostrada un cilindro $\mathcal{D}$ uniforme de 100 lb y la fricción produce un momento de frenado que detendrá a $\mathcal{C}$. El coeficiente de fricción μ es $\frac{1}{3}$ y antes de que se hicieran los agujeros, el cuerpo uniforme $\mathcal{C}$ pesaba 200 lb. Para cualquier sentido de rotación de $\mathcal{C}$ resulta un frenaje rápido; calcule el tiempo de frenado.

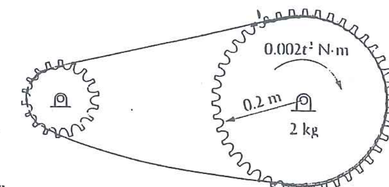


Figura P4.65

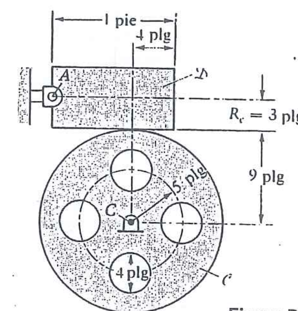


Figura P4.66

4.67 Una rueda de carreta que gira en sentido antihorario se lanza a un rincón y entra en contacto con la pared y el piso (Fig. P4.67).

a. Demuestre con un diagrama de cuerpo libre que la rueda no puede trepar sobre el muro.

b. Demuestre con un diagrama de cuerpo libre que la rueda tampoco puede moverse hacia la derecha sobre el piso.

c. Por consiguiente, la rueda permanece en el rincón. Trátela como un anillo de masa m y radio R, con coeficiente de fricción μ en ambas superficies de contacto. Determine cuánto tarda la rueda en detenerse y calcule cuántos radianes ha girado hasta ese punto desde el primer contacto con las superficies.

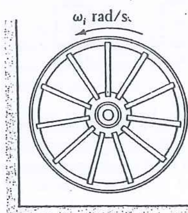


Figura P4.67

4.68 El cilindro en la Fig. P4.68 tiene una masa de 30 kg y gira alrededor de un eje normal a la articulación en O. En el instante mostrado, $\omega = 5$ rad/s y $\dot{\omega} = 10$ rad/s^2. Encuentre la fuerza P que actúa sobre el cilindro y determine las reacciones ejercidas por el pasador en la articulación en O, todo en el instante mostrado.

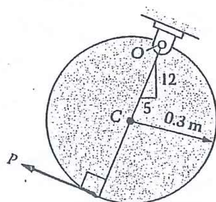


Figura P4.68

4.69 La Fig. P4.69 muestra una escena de "El Foso y el Péndulo" de Edgar Allen Poe. Calcule la reacción del pasador sobre la barra si el péndulo se detiene instantáneamente en posición horizontal.

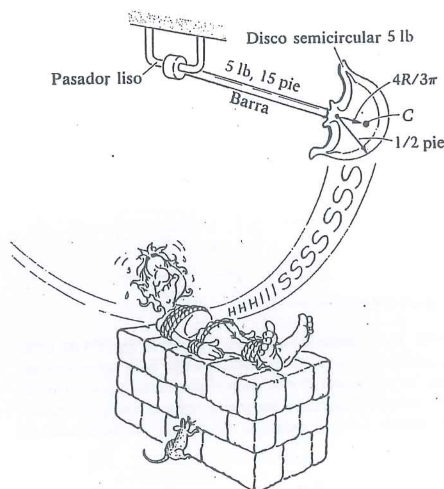


Figura P4.69

4.70 El cuerpo $\mathcal{B}$ es una barra delgada doblada en forma de un cuarto de circunferencia (Fig. P4.70). Encuentre las tensiones en las cuerdas OA y OB cuando el sistema se libera desde el reposo.

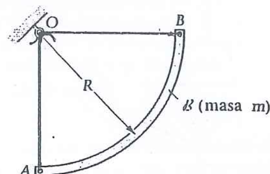


Figura P4.70

4.71 La partícula P de 32.2 lb descansa sobre el tronco de 128.8 lb, como muestra la Fig. P4.71. Si la cuerda en B se rompe repentinamente, encuentre la aceleración inicial de la partícula y la fuerza ejercida sobre ella por el tronco.

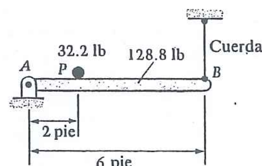


Figura P4.71

* **4.72** La barra delgada uniforme de peso W y longitud L en la Fig. P4.72 se libera desde el reposo en $\theta = 0$ y pivotea sobre su extremo a escuadra alrededor de la esquina O.

a. Si la barra resbala en $\theta = 30°$, calcule el coeficiente de fricción estática μ_s.

b. Si el extremo de la barra tiene una muesca de modo que la misma no pueda resbalar, calcule el ángulo θ para el cual cesa el contacto entre la barra y la esquina. *Sugerencia*: Escriba la ecuación de momento del movimiento respecto al pivote O, multiplíquela por $\dot{\theta}$ e integre, obteniendo $\dot{\theta}$ en función de θ. Use esta relación junto con la ecuación $\Sigma \mathbf{F} \doteq m\mathbf{a}_C$ en su forma escalar en la dirección $\hat{\mathbf{e}}_n$.

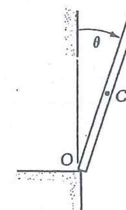


Figura P4.72

* **4.73** Un gimnasta con 6 pie de estatura se lanza hacia una red efectuando un salto mortal después de permanecer rígido y erguido en el borde de una plataforma y luego dejándose caer pivoteando en sus pies; pierde contacto (sin resbalar) con la plataforma cuando la reacción de esta sobre sus pies se vuelve nula; mantiene su rigidez durante la caída. Demuestre que cae de plano sobre su espalda si la altura de la plataforma sobre la red es de aproximadamente 43 pies.

4.74 Una esfera uniforme (radio r, masa m) rueda sobre el plano mostrado en la Fig. P4.74. Si la esfera se libera desde el reposo en $t = 0$, cuando $x = L$, encuentre $x(t)$.

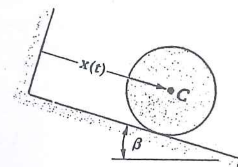


Figura P4.74

4.75 Estela Esfera, Cecilia Cilindro, Haraldo Aro y Ruperto Rueda tienen cada uno masa m y radio R. Los rayos y la llanta de Ruperto son muy ligeros comparados con su eje. (Fig. P4.75). Van a efectuar una carrera rodando hacia abajo en un plano rugoso. Dé (a) el orden en que terminarán la carrera y (b) los tiempos requeridos de cada uno.

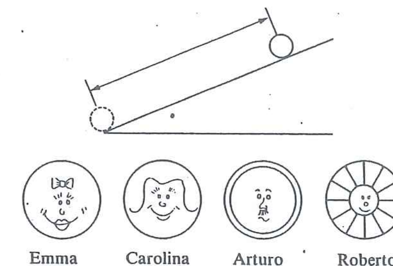


Figura P4.75

4.76 En el problema anterior, Ruperto y Cecilia están conectados por una barra de masa despreciable y sueltan desde el reposo sobre el mismo plano (Fig. P4.76). Determine la fuerza en la barra.

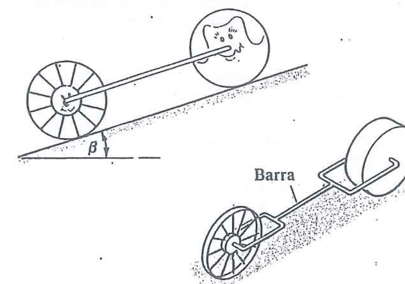


Figura P4.76

4.77 Repita el problema anterior, pero suponga que Ruperto y Cecilia se cambian de lugar.

4.78 La cuerda de la Fig. P4.78 está enrollada alrededor del cilindro que se suelta del reposo y rueda en el plano inclinado a 60° que se muestra. Calcule la velocidad y posición de C en función del tiempo t.

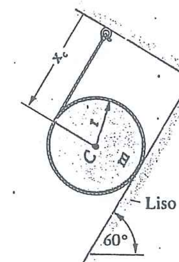


Figura P4.78

4.79 Un cuerpo simétrico $\mathcal{B}$ tiene masa m y radio R; una cuerda está enrollada alrededor de él, como muestra la Fig. P4.79. Calcule la aceleración hacia abajo del centro C si $\mathcal{B}$ es (a) un cilindro, (b) una esfera (con una pequeña ranura para acomodar la cuerda) y (c) un anillo delgado. *Sugerencia*: Analice el problema una sola vez con un radio de giro k_C; luego introduzca los tres valores $R/\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{2}{5}}R$ y 1 R para k_C.

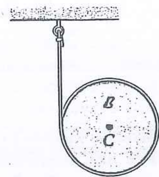


Figura P4.79

4.80 Suponga que se dispone de suficiente fricción para impedir que resbale el cilindro en la Fig. P4.80.

a. Demuestre que
   (i) $\mathcal{A}$ rueda hacia la derecha si $\theta < \cos^{-1}(r/R)$
   (ii) $\mathcal{A}$ rueda hacia la izquierda si $\theta > \cos^{-1}(r/R)$
   (iii) $\mathcal{A}$ está en equilibrio si $\theta = \cos^{-1}(r/R)$ (y se trasladará si P crece suficientemente para vencer la fricción)
b. Calcule $\ddot{x}_C$ y α si $r = 0.2$ m, $R = 0.4$ m, $P = 20$ N, $mg = 40$ N y $\theta = 45°$

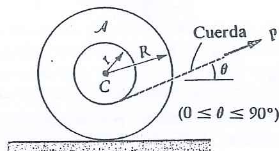


Figura P4.80

4.81 Un carrete homogéneo de peso W rueda sobre un plano inclinado; una tensión en la cuerda de $4W$ actúa hacia arriba del plano como, muestra la Fig. P4.81. Si I_C está dado aproximadamente por $WR^2/2g$, determine la aceleración de C. Suponga fricción ilimitada.

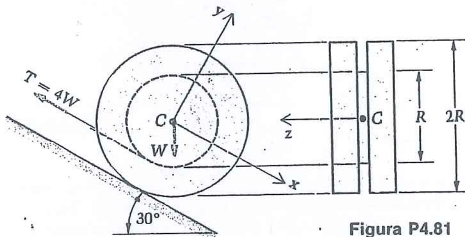


Figura P4.81

4.82 La fuerza T es suficientemente pequeña y el coeficiente de fricción suficientemente grande para que ambas ruedas en la Fig. P4.82 rueden sobre el plano.

a. Dé razones por las que una rueda rodará hacia la izquierda y la otra hacia la derecha.
b. Encuentre la relación de r a R para la cual las aceleraciones de C son iguales en magnitud.

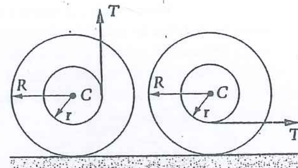


Figura P4.82

4.83 La esfera uniforme en la Fig. P4.83, de masa m y radio r, está en reposo cuando actúa sobre ella un par de momento M_0. Si no hay resbalamiento, encuentre la aceleración del centro de la esfera.

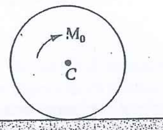


Figura P4.83

4.84 Un cilindro que gira con rapidez horaria angular ω_0 rad/s se coloca sobre un plano inclinado (Fig. P4.84). Demuestre que el centro del cilindro empezará a moverse hacia arriba del plano si μ $\tan\beta$ ¿Por qué no depende este resultado del tamaño de ω_0 ?

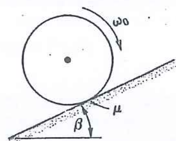


Figura P4.84

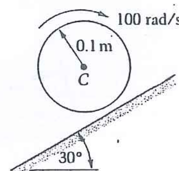


Figura P4.85

4.85 El cilindro de peso W y radio r mostrado en la Fig. P4.85 tiene una velocidad angular horaria de 100 rad/s. Se le coloca sobre el plano inclinado rugoso. Si su centro C permanece momentáneamente en reposo, determine el coeficiente de fricción. Encuentre cuánto tiempo permanece en reposo el centro C.

4.86 La bola de boliche en la Fig. P4.86 se lanza con $v_C = 22$ pie/s y $\omega = 0$, medidas estas al tocar ella el suelo. Si el coeficiente de fricción entre la bola y el suelo es de 0.3, encuentre la distancia recorrida por el centro de la bola antes de que cese el resbalamiento.

Figura P4.86

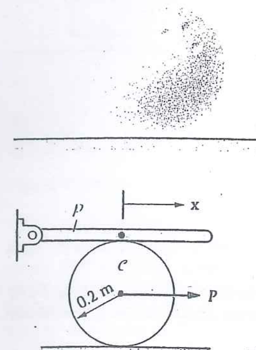


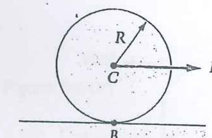
Figura P4.87

* 4.87 La fuerza $P = 60$ N se aplica como muestra la Fig. P4.87 al cilindro $\mathcal{C}$ de 10 kg, originalmente en reposo, bajo el centro de masa de la placa $\mathcal{P}$ rectangular delgada de 5 kg. El coeficiente de fricción entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$ es 0.5 y el plano bajo $\mathcal{C}$ es liso. Determine: (a) la aceleración inicial de C; (b) el valor de x cuando $\mathcal{C}$ está resbalando sobre ambas superficies. La longitud de $\mathcal{P}$ es de 2 m.

4.88 La fuerza constante F_0 se aplica al cilindro inicialmente en reposo como muestra la Fig. P4.88. Demuestre de las dos maneras siguientes que el cilindro resbalará si

$$\frac{F_0}{mg} > 3\mu$$

a. Suponga rodamiento y obtenga la desigualdad a partir de $f > \mu N$ después de encontrar f y N.
b. Suponga resbalamiento; integre $\ddot{x}_C$ y $\ddot{\theta}$ para obtener $\dot{x}_C$ y $\dot{\theta}$, y calcule la velocidad del punto de contacto B; si ésta es hacia la derecha (o sea, positiva) lo anterior es consistente con $f = \mu N$ hacia la izquierda y se tendrá resbalamiento.



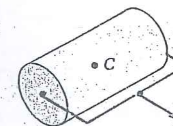
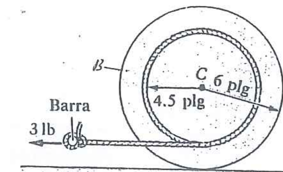


Figura P4.88

4.89 Se montan dos tambores de radio igual a 4.5 plg, uno en cada extremo de un cilindro de 6 plg de radio, para formar un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ de 40 lb, con radio de giro $k_{ZC} = 5$ plg (Fig. P4.89). Se enrollan cuerdas alrededor de los tambores y se unen a una barra horizontal sobre la que se aplica una fuerza de 3 lb. Si $\mathcal{B}$ rueda partiendo del reposo, determine (a) el número de pulgadas de cuerda enrollada o desenrollada (aclare cuál es el caso) en 3 s, y (b) el coeficiente de fricción mínimo necesario para que se tenga rodamiento.



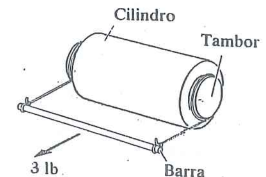


Figura P4.89

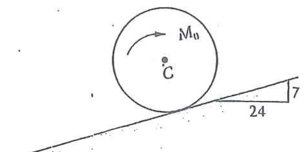


Figura P4.90

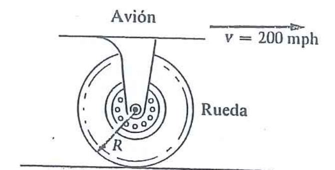


Figura P4.91

* 4.90 Encuentre el intervalo de valores posibles del par de momento M_0 para el que el cilindro de la Fig. P4.90 no resbalará en ninguna dirección cuando se suelte desde el reposo sobre el plano inclinado. La masa es de 15 kg, el radio es de 0.2 m y el coeficiente de fricción μ es igual a 0.2

4.91 Un avión aterriza en una pista plana a 200 mi/h. (Ver la Fig. P4.91). Al principio, antes de que las ruedas toquen la pista, éstas no giran. Después de tocar la pista, resbalarán cierta distancia y luego rodarán libremente. Si durante el resbalamiento el avión tiene una velocidad constante de 200 mi/h y la fuerza normal entre la rueda y la pista es de 10 veces el peso de la rueda, encuentre la longitud que ésta resbala. (El coeficiente de fricción es de 1/2; el radio de giro de la rueda es 3/4 de su radio.)

* 4.92 Un aro de "hula" $\mathcal{H}$ (masa m, radio r) se lanza hacia adelante con una rotación inversa (hacia atrás); $v_C = v_0$ hacia la derecha, y $\omega = \omega_0$, antihoraria. (Ver la Fig. P4.92.)

a. ¿Cuánto tiempo y qué tan lejos se mueve el centro de masa antes de que $\mathcal{H}$ deje de resbalar?
b. Encuentre la relación entre v_0 y ω_0 tal que cuando $\mathcal{H}$ deje de resbalar: (i) ruede hacia la derecha, (ii) ruede hacia la izquierda, (iii) se detenga.

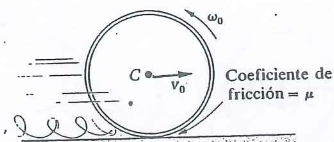


Figura P4.92

4.93 El cable flexible y resistente mostrado en la Fig. P4.93 está enrollado alrededor de un eje ligero unido al cilindro $\mathcal{C}$ de 130 lb. Encuentre la aceleración angular de $\mathcal{C}$ al soltarlo desde el reposo. Note que es imposible para la rueda rodar hacia abajo en el plano (sin resbalar); para que fuese ello posible la cuerda tendría que romperse.

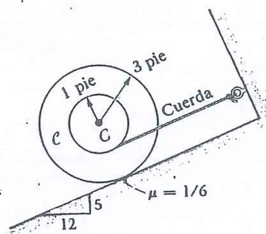


Figura P4.93

4.94 Repita el problema anterior con $\mu = 0.25$

4.95 En la Fig. P4.95 encuentre qué tan lejos C viaja sobre el plano inclinado en 5 s, si el cilindro $\mathcal{C}$ de 20 kg es soltado desde el reposo.

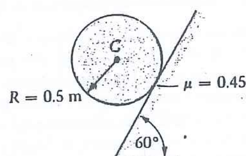


Figura P4.95

4.96 El cuerpo $\mathcal{C}$ de 50 lb en la Fig. P4.96 puede considerarse como un cilindro sólido de 2 pie de radio. El coeficiente de fricción entre $\mathcal{C}$ y el plano es $\mu = 0.2$ y una fuerza $P = 10$ lb se aplica verticalmente a una cuerda enrollada alrededor del eje. Encuentre la posición del centro C a los 10 s después de iniciado el movimiento a partir del reposo.

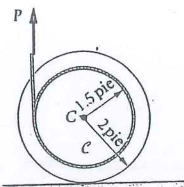


Figura P4.96

4.97 Si la ranura (para la cuerda) en el cilindro de la Fig. P4.97 (masa de 10 kg) tiene un efecto despreciable en I_C, determine:

a. El máximo valor de θ para el cual no ocurrirá movimiento hacia abajo en el plano.
b. El tiempo requerido para que C se mueva 3 m hacia abajo si $\theta = 60°$.

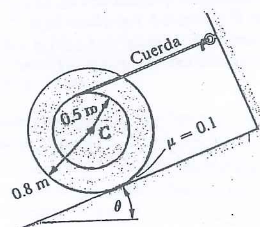


Figura P4.97

4.98 La rueda en la Fig. P4.98 tiene una masa de 10 kg y un radio de giro respecto a z_C (normal a la página) de 0.3 m. Determine la aceleración de C y encuentre qué tan lejos se desplaza C en 5 s si parte del reposo.

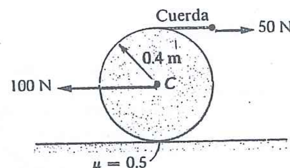


Figura P4.98

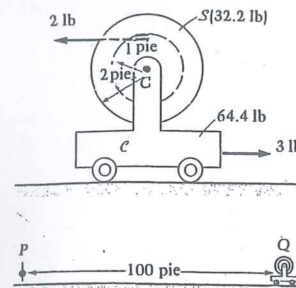


Figura P4.99

4.99 Una cuerda ligera de 100 pie se enrolla alrededor del carrete $\mathcal{S}$ de 32.2 lb que se encuentra articulado en C al carro $\mathcal{C}$ (Fig. P4.99). El radio de giro de $\mathcal{S}$ con respecto a un eje normal a la figura en C es de 1.3 pie. El carro (sin $\mathcal{S}$) pesa 64.4 lb. Las ruedas de $\mathcal{C}$ son pequeñas y ligeras, de modo que la fricción bajo ellas es despreciable. Las fuerzas de 2 y 3 libras se aplican al sistema en reposo. Si al terminar de desenrollarse, el extremo de la cuerda se encuentra entre los puntos P y Q, ¿dónde debería haber estado estacionado originalmente $\mathcal{C}$ a lo largo de PQ?.

4.100 Un niño hala una vieja rueda con una fuerza de 5 lb por medio de una cuerda unida al eje de la rueda (Fig. P4.100). El coeficiente de fricción entre la rueda y el suelo es $\mu = 0.2$. Encuentre I_C para la rueda y determine la posición de C después de 3 s.

4.101 Dos cables están enrollados alrededor del eje del carrete de 10 kg mostrado en la Fig. P4.101, que tiene un radio de giro de 500 mm con respecto a su eje. Se aplica una fuerza constante de 40 N al cable superior como se muestra. Encuentre la posición del centro de masa 5 s después del reposo si (a) $\mu = 0.2$, (b) $\mu = 0.5$

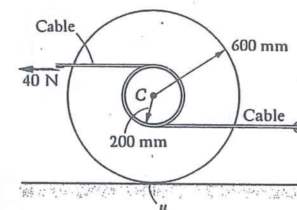


Figura P4.101

4.102 Una esfera de radio 0.5 pie y peso de 16.1 lb se lanza sobre un plano horizontal (Fig. P4.102). Su centro tiene velocidad incial v_0 en $t = 0$ y la esfera tiene velocidad angular inicial ω_0, como se muestra. Si el coeficiente de fricción entre la esfera y el plano es de 0.15, grafique la distancia x_C recorrida en función del tiempo t hasta $t = 3$ s, para los casos siguientes:

a. $v_0 = 10$ pie/s; $\omega_0 = 100$ rad/s
b. $v_0 = 10$ pie/s; $\omega_0 = 50$ rad/s
c. $v_0 = 10$ pie/s; $\omega_0 = 30$ rad/s

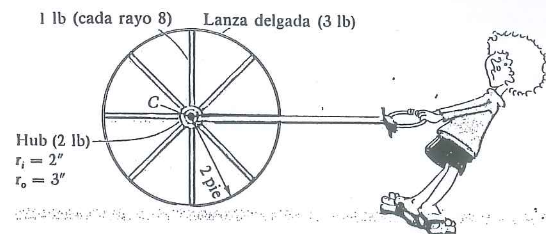


Figura P4.100

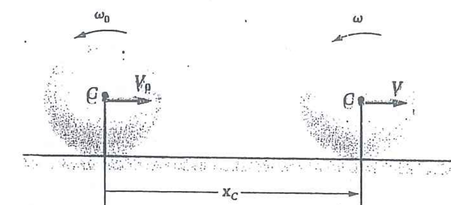


Figura P4.102

* 4.103 El cilindro mostrado en la Fig. P4.103 está hecho de dos mitades de densidades diferentes. La mitad izquierda es de acero con $\rho_1 = 15.2$ slug/pie^3; la mitad derecha es de madera con $\rho_2 = 1.31$ slug/pie^3. El centro de masa de cada mitad está localizado a $4r/3\pi$ del centro geométrico Q. Encuentre la aceleración de Q cuando el cilindro se libera desde el reposo. Suponga suficiente fricción para impedir el resbalamiento. *Sugerencia*: Use la Ec (4.17) con Q como punto P.

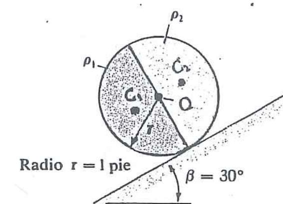


Figura P4.103

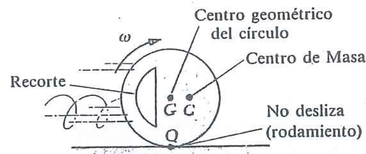


Figura P4.104a

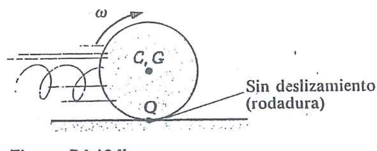


Figura P4.104b

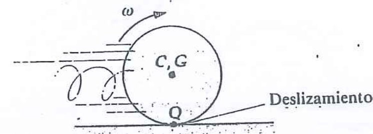


Figura P4.104c

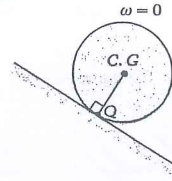


Figura P4.104d

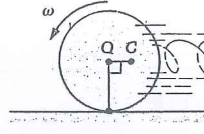


Figura P4.104e

4.104 (a) Use la Ec (4.17) para catalogar las restricciones sobre el punto P para las que podemos escribir correctamente $\Sigma M_P = I_P\alpha$. Muestre que sólo hay tres casos y que la forma "centro de masa" es uno de ellos mientras que la forma "eje de rotación fijo" es sólo un caso especial de uno de los otros dos. (b) Note que el centro instantáneo de velocidad nula (I) *no* es un punto P para el que $\Sigma M_P = I_P\alpha$. (c) Finalmente, determine en cuál de los problemas de la Fig. P4.104 es cierto que $\Sigma M_Q = I_Q\alpha$.

4.105 El cuerpo $\mathcal{C}$ de 32.2 lb en la Fig. P4.105 es un carrete con radio de giro $k_C = 6$ plg respecto de su eje. Hay cuerdas enrolladas alrededor de las periferias; una está unida al techo, las otras al bloque $\mathcal{B}$ de 48.3 lb. Encuentre las aceleraciones de los centros C (de $\mathcal{C}$) y B (de $\mathcal{B}$).

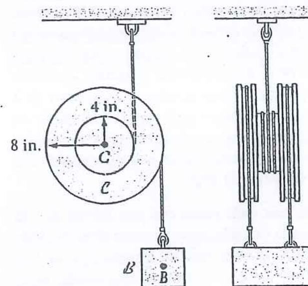


Figura P4.105

4.106 La rueda $\mathcal{C}$ está formada por el disco macizo $\mathcal{A}$, del la llanta $\mathcal{R}$ y cuatro rayos $\mathcal{S}$. Las masas y los radios están dados en la Fig. P4.106 y en la tabla.

a. Calcule I_{zz}^C de la rueda
b. El coeficiente de fricción entre $\mathcal{C}$ y el plano es $\mu = 0.3$. Si se enrolla una cuerda alrededor del disco y se fija al cuerpo $\mathcal{B}$ de 50 kg., determine la aceleración del centro de masa C de $\mathcal{C}$.

Parte	Masa (kg)
Disco $\mathcal{A}$	20
Rayos $\mathcal{S}$	5 (c/u)
Llanta $\mathcal{R}$	10

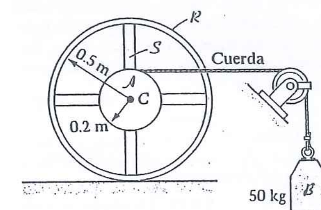


Figura P4.106

4.107 El radio de giro de la rueda de 20 kg en la Fig. P4.107 con respecto a su eje es de 0.3 m. El movimiento comienza desde el reposo. Encuentre la aceleración del centro de masa C y determine cuánto se desplaza C en 5 s.

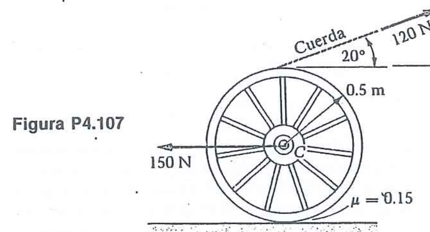


Figura P4.107

4.108 Una cuerda está enrollada alrededor del cubo del carrete mostrado en la Fig. P4.108. Se indican cuatro direcciones de la cuerda. Para la dirección que dará el desplazamiento mayor de C en 3 s, calcule ese desplazamiento. Suponga suficiente fricción para impedir el resbalamiento. El carrete tiene una masa de 12 kg y un radio de giro respecto a z_C de 0.6 m. Cada fuerza es de 10 N y el carrete parte del reposo.

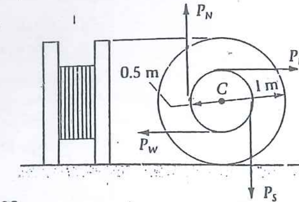


Figura P4.108

4.109 El cilindro $\mathcal{C}$ en la Fig. P4.109 tiene una masa de 4 slug y el efecto del cubo en su momento de inercia es despreciable. Está conectado por medio de una cuerda al bloque $\mathcal{B}$ de masa igual a 1 slug. La masa de la polea es despreciable. El coeficiente de fricción entre $\mathcal{C}$ y el plano es $\mu = 0.5$. Los radios de $\mathcal{C}$ están dados en la figura. Si el sistema se suelta desde el reposo, determine el tiempo que transcurrirá antes de que $\mathcal{B}$ toque el piso.

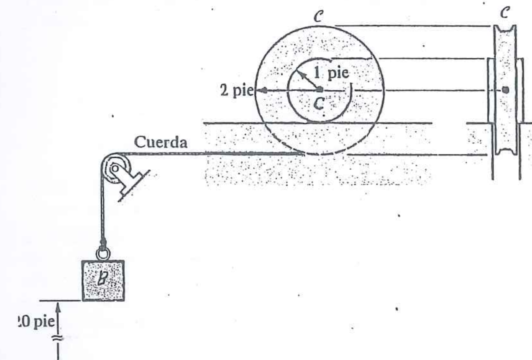


Figura P4.109

4.110 Encuentre cuánto tiempo tarda $\mathcal{A}$ en rodar fuera del plano de la Fig. P4.110; suponga suficiente fricción para impedir el resbalamiento. El sistema se suelta desde el reposo.

4.111 Los discos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ pesan cada uno 64.4 lb y están rígidamente unidos en sus centros a la flecha ligera $\mathcal{S}$ (Fig. P4.111). Un cilindro $\mathcal{C}$ de 96.6 lb tiene un agujero a lo largo de su eje a través del cual pasa $\mathcal{S}$. Se aplica una fuerza de 20 lb horizontalmente a una cuerda inextensible enrollada alrededor de $\mathcal{C}$. Si la fricción entre $\mathcal{S}$ y $\mathcal{C}$ es despreciable y si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ ruedan sobre el plano, encuentre:

a. La aceleración angular del cilindro
b. La aceleración angular de los discos
c. El coeficiente de fricción mínimo entre discos y plano para que no haya resbalamiento.

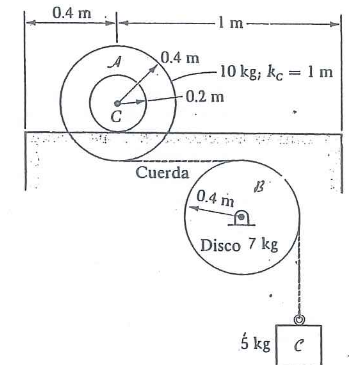


Figura P4.110

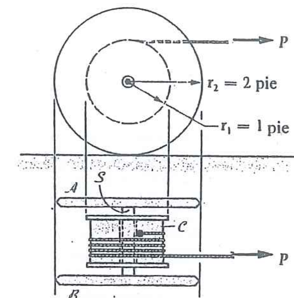


Figura P4.111

4.112 Repita el problema anterior, pero esta vez suponga que la cuerda está enrollada de modo que sale por la parte *inferior* de $\mathcal{C}$.

4.113 Las dos ruedas son cilindros idénticos de 16.1 lb con ejes lisos en sus centros (Fig. P4.113). El carro pesa 32.2 lb y tiene su centro de masa en C. Los cilindros no resbalan sobre el plano inclinado. Encuentre la aceleración del punto Q.

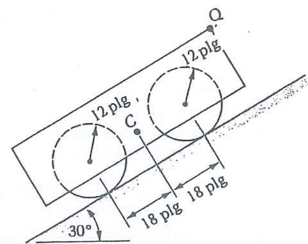


Figura P4.113

* **4.114** El cilindro $\mathcal{C}$ en la Fig. P4.114 pesa 100 lb; rueda sobre el plano y está articulado en su centro C a la barra $\mathcal{R}$ de 10 lb. Si v_C es inicialmente de 10 pie/s hacia la izquierda, y si el coeficiente de fricción cinética entre el plano y cada cuerpo es $\mu = 0.4$, determine cuánto tiempo tardará el sistema en alcanzar el reposo.

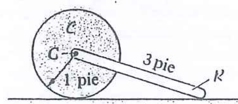


Figura P4.114

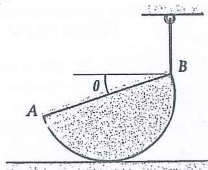


Figura P4.115

* **4.115** Un medio cilindro uniforme de radio r y masa m se mantiene en la posición mostrada en la Fig. P4.115 por medio de la cuerda unida a B. Encuentre la reacción del piso justamente después de cortar la cuerda. Se dispone de suficiente fricción para impedir el resbalamiento.

* **4.116** En la Fig. P4.116 se aplica la fuerza P a la cuerda en $t = 0$, cuando el cilindro de 25 N está en reposo. Encuentre la posición del centro de masa cuando $t = 6$ s.

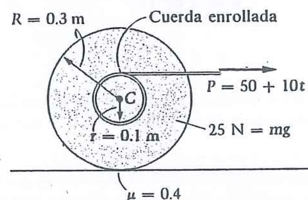


Figura P4.116

* **4.117** El medio cilindro en la Fig. P4.117a se libera desde el reposo y se tiene suficiente fricción para impedir que resbale durante el movimiento resultante (Fig. P4.117b).

a. Encuentre I_{zz}^{C}.
b. Escriba las tres ecuaciones diferenciales del movimiento del cuerpo (válidas para cualquier ángulo θ)
c. Encuentre las dos ecuaciones que relacionan $\ddot{x}_C$ y $\ddot{y}_C$ con $\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$ y θ.
d. Elimine f, N, $\ddot{x}_C$ y $\ddot{y}_C$ y obtenga una ecuación diferencial en la variable $\theta\,(t)$. ¡Note la complejidad de la ecuación!

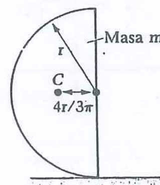


Figura P4.117a

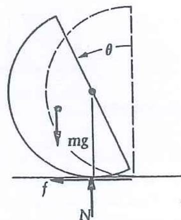


Figura P4.117b

4.118 El carro de 15 lb mostrado en la Fig. P4.118 está soportado por dos rodillos uniformes con peso cada uno de 10 lb y radio de 3 plg. Los rodillos ruedan sobre el piso y sobre el carro. Determine la aceleración del carro cuando se le aplica la fuerza de 5 lb.

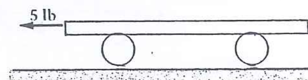


Figura P4.118

4.119 El tronco homogéneo de 128.8 lb mostrado en la Fig. P4.119 se coloca sobre dos rodillos cilíndricos homogéneos, cada uno con peso de 32.2 lb. El sistema se libera desde el reposo. Determine la aceleración inicial del tronco si no ocurre resbalamiento. ¿Es ésta la aceleración también posteriormente?

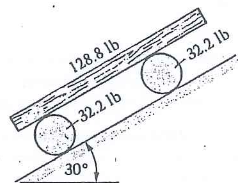


Figura P4.119

4.120 El cuerpo $\mathcal{P}$ en la Fig. P4.120 es una placa rígida de masa M que descansa sobre n cilindros, cada uno de masa m y radio R. La fuerza F es constante y comienza a mover el sistema desde la posición mostrada. Si no hay resbalamiento en ninguna superficie, encuentre: (a) la aceleración de la placa y (b) su posición x_C en función de M, m, F, n, y del tiempo t.

4.121 La puerta rectangular de un vagón de ferrocarril tiene masa m (Fig. P4.121); es de ancho uniforme igual a 2ℓ y tiene sus bisagras en el lado de la puerta más cercano a la locomotora. Inicialmente la puerta forma un ángulo β con el tren, que empieza a moverse hacia adelante a partir del reposo con una aceleración constante a_0. Encuentre la componente de la reacción resultante inicial horizontal que la bisagra ejerce sobre la puerta.

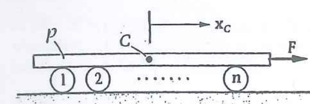


Figura P4.120

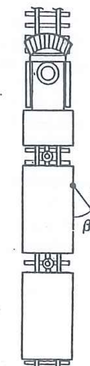


Figura P4.121

4.122 El cilindro homogéneo $\mathcal{C}$ en la Fig. P4.122 está en reposo sobre la banda transportadora cuando ésta empieza a moverse hacia la derecha con una aceleración constante de 3 pie/s^2. Si el cilindro rueda sobre la banda, encuentre el tiempo que tarda el cilindro en alcanzar el extremo A.

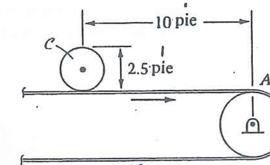


Figura P4.122

4.123 El tubo en la Fig. P4.123 tiene una masa de 500 kg y descansa sobre la plataforma del camión. El coeficiente de fricción entre el tubo y la plataforma es $\mu = 0.4$. El camión empieza a moverse partiendo del reposo con una aceleración constante a_0.

a. ¿Cuán grande puede ser a_0 para que el tubo no resbale en ningún momento?
b. Para el valor encontrado de a_0 en (a), ¿cuánto se ha desplazado el camión cuando el tubo rueda fuera de la plataforma?

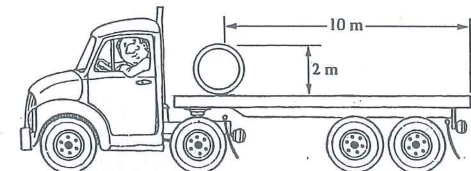


Figura P4.123

4.124 La esfera uniforme (masa = 1 slug, radio = 1 pie) y la losa (masa = 2 slug) mostradas en la Fig. P4.124 están en reposo antes de que se aplique repentinamente la fuerza P = 24 lb a la segunda. El coeficiente de fricción entre la esfera y la losa y entre la losa y el plano horizontal es de 0.2 (a) ¿Resbala la esfera sobre la losa? (b) ¿Cuál es la aceleración del centro de la esfera?

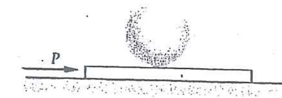


Figura P4.124

4.125 El cilindro homogéneo $\mathcal{C}$ en la Fig. P4.125 pesa 64.4 lb. La aceleración del carro $\mathcal{D}$, de 96.6 lb de peso, es de 10 pie/s^2 hacia la derecha.

a. Determine la aceleración del centro C del cilindro y la fuerza de fricción ejercida sobre $\mathcal{C}$ por $\mathcal{D}$ si no se presenta resbalamiento.
b. ¿Qué tan grande debe ser el coeficiente de fricción μ para que ocurra esto así?

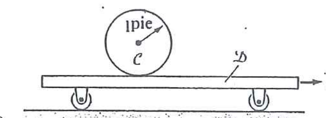


Figura P4.125

4.126 El cilindro homogéneo $\mathscr{A}$ en la Fig. P4.126 pesa 64.4 lb y rueda sobre el camión $\mathscr{B}$ de 96.6 lb de peso. La masa de los rodillos del camión puede despreciarse. Encuentre la fuerza P necesaria para que C no se mueva relativamente al plano inclinado.

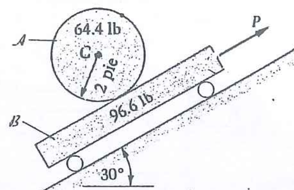


Figura P4.126

4.127 El sistema mostrado en la Fig. P4.127 está inicialmente en reposo. Se le aplica una fuerza P que varía según la expresión $P = 7t^2$, en donde P está en newtons y t en segundos. Si el coeficiente de fricción entre el cilindro y el carro es $\mu = 0.5$, encuentre cuánto tiempo transcurre antes de que el cilindro empiece a resbalar sobre el carro.

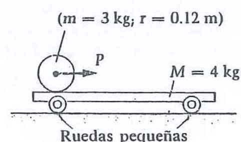


Figura P4.127

4.128 En el problema anterior, determine cuánto tiempo transcurre (desde $t = 0$) antes de que el cilindro salga de la superficie del carro. Inicialmente el centro del cilindro está a 2 m del extremo derecho del carro.

4.129 Una barra delgada homogénea $\mathscr{B}$ con peso de 193 lb, tiene una velocidad angular horaria de 2 rad/s y una aceleración angular horaria de 8 rad/s^2, cuando se encuentra en la posición mostrada en la Fig. P4.129. La pared en B es lisa; el coeficiente de fricción en A es de 0.10. Calcule las reacciones en A y B sobre $\mathscr{B}$ en esta posición. *Sugerencia:* La fuerza P puede ser calculada.

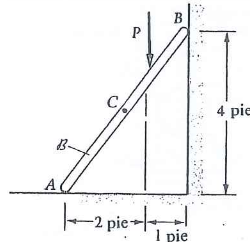


Figura P4.129

4.130 Después de soltarse desde una posición ligeramente desplazada de la vertical, la barra de la Fig. P4.130 permanecerá en contacto con el piso durante su caída. Describa la trayectoria de C y encuentre la reacción sobre el piso justo antes de que la barra adquiera la posición horizontal.

4.131 La barra delgada uniforme de masa m y longitud L se suelta desde el reposo en la posición mostrada en la Fig. P4.131. Calcule la fuerza ejercida por el piso liso en este instante.

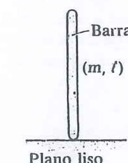


Figura P4.130

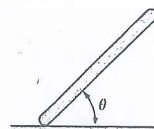


Figura P4.131

4.132 Una barra delgada AB de longitud ℓ y masa m se suelta desde el reposo en la posición mostrada en la Fig. P4.132. El punto A de la barra está en contacto con una superficie cuyo coeficiente de fricción es μ.

a. Determine el mínimo valor de μ (o sea, $\mu = \mu_{mín}$) requerido para impedir que el extremo A resbale al soltar la barra.
b. Encuentre la aceleración del centro de masa de la barra inmediatamente después de soltarla para $\mu \geq \mu_{mín}$ y para $\mu < \mu_{mín}$.

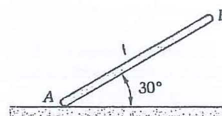


Figura P4.132

4.133 La esfera de 30 kg y la barra de 15 kg en la Fig. P4.133 están soldadas entre sí formando un cuerpo rígido único. Determine la aceleración angular del cuerpo inmediatamente después de que se corta la cuerda de la derecha.

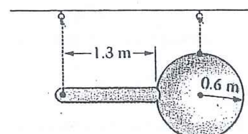


Figura P4.133

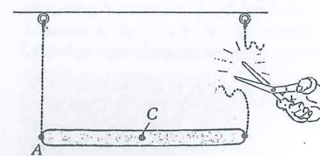


Figura P4.134

4.134 Si la cuerda de la derecha en la Fig. P4.134 se corta, encuentre la tensión inicial en la cuerda de la izquierda. La barra tiene masa m y longitud L.

4.135 Repita el problema anterior reemplazando la barra por una placa rectangular suspendida de sus dos esquinas superiores. El ancho (entre cuerdas) es B y la altura es H.

4.136 Una barra delgada uniforme de 10 pie de longitud y peso de 90 lb está soportada por alambres fijados en sus extremos (Fig. P4.136). Halle la tensión en el alambre de la derecha justo después de cortar el alambre de la izquierda. Suponga alambres inextensibles.

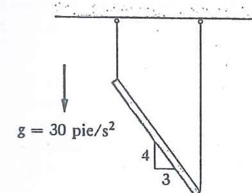


Figura P4.136

4.137 El disco mostrado en la Fig. P4.137 tiene masa m y radio r. Muestre que en el instante en que se corta la cuerda de la derecha la tensión en la otra cuerda cambia a $\frac{2}{5}\ mg$ y la aceleración del centro de masa es entonces de $\frac{3}{5}g\downarrow$.

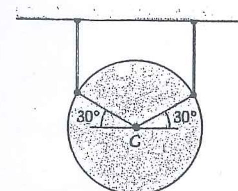
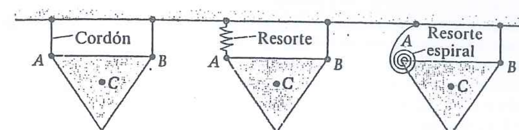


Figura P4.137



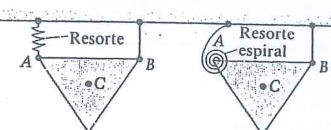
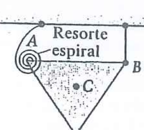



Figura P4.139 Figura P4.140 Figura P4.141

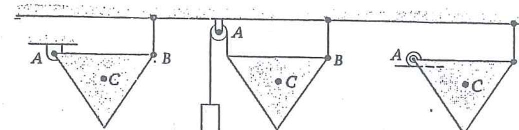




Figura P4.142

Contrapeso (la polea es ligera)

Figura P4.143 Figura P4.144

4.138 Una barra uniforme $\mathscr{R}$ está soportada por dos cuerdas como muestra la Fig. P4.138. Si se rompe repentinamente la cuerda de la derecha, determine la tensión inicial en la cuerda AD. ("Inicial" significa antes de que la barra tenga tiempo para moverse y haya tenido tiempo para generar cualquier velocidad.)

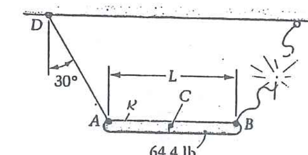


Figura P4.138

4.139—4.144 Las seis placas triangulares equiláteras (Figs. P4.139—P4.144) están sostenidas en su esquina superior derecha B por una cuerda; cada una tiene una condición de soporte diferente en la esquina izquierda A. Encuentre, en cada caso, a_C y α en el instante en que se corta la cuerda en B. La longitud de cada lado es s.

4.145 La barra uniforme de 10 lb en la Fig. P4.145 está suspendida de dos cables inextensibles. En el instante mostrado, cuando cada punto de la barra tiene una velocidad de $10\hat{\imath}$ pie/s, el cable derecho se rompe. Calcule la fuerza en el cable izquierdo inmediatamente después de la ruptura.

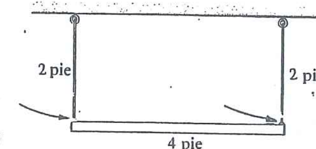


Figura P4.145

4.146 Una barra delgada $\mathcal{B}$ de 64.4 lb de peso está unida por cables sin masa a un pivote fijo A, como muestra la Fig. P4.146. El sistema oscila alrededor de A como si fuera un péndulo. En $\theta = 0$, la velocidad angular es de 2 ↺ rad/s, cuando el cable AD se rompe. Encuentre la tensión en el cable AB en este instante.

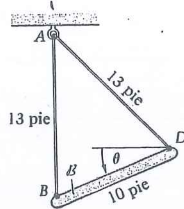


Figura P4.146

* **4.147** Una viga de longitud L y peso W por unidad de longitud está soportada por dos cables en A y en B (Fig. P4.147). Si se rompe el cable en B, encuentre la fuerza cortante V y el momento flexionante M en la sección xx, justamente después de la ruptura. *Sugerencia*: Las leyes de Euler se aplican a cada parte del cuerpo.

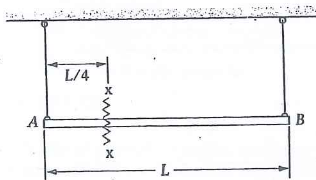


Figura P4.147

* **4.148** Vea la Fig. P4.148. Suponga que existe suficiente fricción para impedir el resbalamiento entre $\mathcal{C}$ y el plano. Obtenga las aceleraciones angulares de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{R}$ justamente después de que se aplica la fuerza P a los cuerpos en reposo; éstos están conectados por un pasador liso.

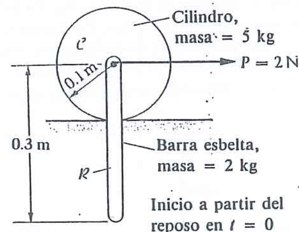


Figura P4.148

* **4.149** Las barras $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ tienen cada una masa m (Fig. P4.149). Encuentre las reacciones en O y en A sobre $\mathcal{B}_1$ al liberar el sistema desde el reposo en la posición horizontal indicada.

* **4.150** Dos barras uniformes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se sueltan desde el reposo en la posición mostrada en la Fig. P4.150. Cada barra es de 2 pie de longitud y pesa 10 lb. Determine la aceleración angular de cada barra y las reacciones en A y D inmediatamente después de que se sueltan. Los rodillos son ligeros y los pasadores lisos.

4.151 Se aplica una par constante T_0 ↺ a la manivela $\mathcal{C}$ del mecanismo planetario mostrado en la Fig. P4.151. Los ejes de los engranes idénticos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{P}$ son verticales y los extremos de la manivela están articulados a los centros de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{P}$. Determine la aceleración angular de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{S}$ está fijo en el marco inercial de referencia. Trate los engranes como discos uniformes. El plano de la página es horizontal.

* **4.152** El cilindro $\mathcal{A}$ en la Fig. P4.152 rueda hacia abajo sobre una cuña que pude resbalar sin fricción sobre un piso liso. Demuestre que la aceleración de la cuña $\mathcal{D}$ es constante y está dada por la ecuación

$$a_G = \frac{m_1 g \operatorname{sen} 2\beta}{3(m_1 + m_2) - 2m_1 \cos^2 \beta}$$

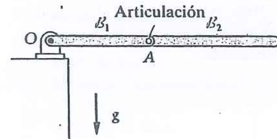


Figura P4.149

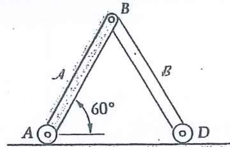


Figura P4.150

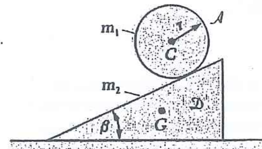


Figura P4.151

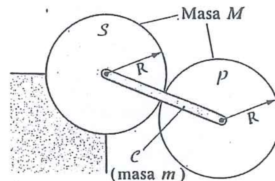


Figura P4.152

Problemas Ampliados

4.153 La barra de masa m mostrada en la Fig. P4.153, inicialmente en reposo en $\theta = 0$, es perturbada ligeramente y comienza a resbalar sobre una pared y un piso liso. Formule la ecuación diferencial del movimiento de la barra. Integre la ecuación y halle el ángulo θ en el que se pierde contacto con la pared. *Sugerencias*: Verifique primero las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\Sigma F_x = N_T = m\ddot{x}_C \tag{1}$$

$$\Sigma F_y = N_B - mg = m\ddot{y}_C \tag{2}$$

$$\Sigma M_C = N_B \frac{\ell}{2} \operatorname{sen}\theta - N_T \frac{\ell}{2} \cos\theta = \frac{m\ell^2}{12}\ddot{\theta} \tag{3}$$

Observe que hay más incógnitas que ecuaciones. Aplique cinemática para relacionar $\mathbf{a}_C$ con $\mathbf{a}_B$ y use la "componente $\hat{\mathbf{j}}$" de esa ecuación para obtener una cuarta ecuación que contenga a $\ddot{y}_C$. Luego relacione $\mathbf{a}_C$ con $\mathbf{a}_T$ y obtenga una quinta ecuación que contenga $\ddot{x}_C$. De las cinco ecuaciones elimine $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C\, N_T$ y N_B obteniendo la siguiente ecuación diferencial que rige a θ:

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2\ell} \operatorname{sen}\theta \tag{4}$$

Multiplique (4) por $\dot{\theta}$ e integre, usando $\ddot{\theta}\dot{\theta} = d/(dt)(\dot{\theta}^2/2)$. Aplique la condición inicial $\dot{\theta} = 0$ en $\theta = 0$ para evaluar la constante de integración; se tendrá ahora $\dot{\theta}$ en función de θ. Luego, con N_T en función de θ, haga $N_T = 0$ en (1) para encontrar el ángulo en el que se pierde el contacto. La respuesta debe ser $\cos^{-1}(\frac{2}{3})$

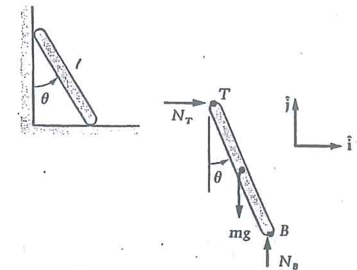


Figura P4.153

4.154 Los discos $\mathcal{B}_3$ y $\mathcal{B}_4$ pesan cada uno 64.4 lb y están conectados rígidamente a la barra eje ligera $\mathcal{B}_5$ que une sus centros (Fig. P4.154). Un cilindro $\mathcal{B}_1$ de 96.6 lb de peso tiene un agujero a lo largo de su eje a través del cual pasa $\mathcal{B}_5$. Sea $\mathcal{B}_2$ el cuerpo rígido compuesto de $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_4$ y $\mathcal{B}_5$.

Con el cuerpo $\mathcal{B}_2$ fijo sobre el plano, se le imparte al cilindro una rotación con velocidad angular de 8 ⇄ rad/s y luego se suelta el sistema. Suponga que parte de la reacción entre el eje y la pared del agujero cilíndrico en el cilindro es un par de fricción proporcional a la diferencia entre las velocidades angulares con constante de proporcionalidad igual a k. El par de fricción que actúa sobre el eje ocasiona que $\mathcal{B}_2$ ruede hacia la derecha; el par opuesto que actúa sobre $\mathcal{B}_1$ retardará su rapidez angular. Con el paso del tiempo, los cuerpos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ se moverán conjuntamente. Demuestre esto y determine la velocidad angular "terminal" común de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Hay suficiente fricción entre $\mathcal{B}_2$ y el piso para impedir el resbalamiento.

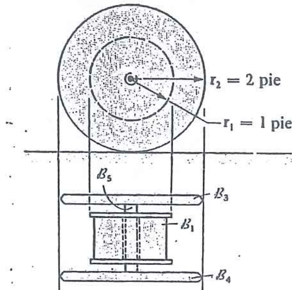


Figura P4.154

4.6 Rotación de cuerpos desbalanceados (o inequilibrados)

Cuando un cuerpo rígido montado sobre cojinetes es obligado a girar por medio de un momento respecto al eje de los cojinetes, se dice que está *balanceado* o *equilibrado dinámicamente* (respecto a rotaciones alrededor de ese eje), si las reacciones externas ejercidas por los cojinetes sobre el cuerpo son lo único que se requiere para soportar el peso del cuerpo. Las reacciones en los cojinetes, cuando se tiene un *desbalanceo*, producen vibraciones y desgaste en piezas rotatorias, y para evitar ésto es por lo que se equilibran o balancean las ruedas de los automóviles.

Hay dos causas que desequilibran a un cuerpo en rotación. La primera es que el centro de masa se localiza (una distancia "d") fuera del eje de rotación. Al girar el cuerpo, habrá entonces fuerzas en los cojinetes iguales a ma_C. Estas fuerzas cambian constantemente en dirección (respecto al marco inicial) si es que no en magnitud también.

Pregunta 4.11 ¿Qué ocasionaría el cambio en magnitud?

Mover el centro de masa hacia el eje de rotación por agregando o quitando masa se denomina *balance* y/o *estático*. Se llama así porque sólo entonces, con un eje horizontal de rotación, permanecerá el cuerpo en equilibrio al girarlo a cualquier posición y soltarlo.

La segunda causa de desbalance es la presencia de productos de inercia, I_{xz}^P y/o I_{yz}^P, *no* nulos, en donde z es el eje de rotación y P es un punto sobre ese eje. También podemos en este caso añadir o quitar material para forzar a que sea cero el valor de los productos. Cuando se hace ésto, además de asegurar que C se encontrará sobre el eje, se dice que el cuerpo está dinámicamente balanceado (y por supuesto estáticamente también). A continuación desarrollaremos las ecuaciones pertinentes para lograr ésto.

El cuerpo $\mathcal{B}$ en la Fig. 4.7 está montado sobre cojinetes de bolas en D y E. Se tiene que T es un par externamente aplicado respecto al eje de rotación z. Digamos que T es el par impulsor menos cualesquiera momentos resistentes debidos a la fricción en los cojinetes o al aire. Notemos que los ejes x y y están fijos también en $\mathcal{B}$ y que $(\bar{x}, \bar{y}, a)$ son las coordenadas de C en este sistema.

En un cuerpo desbalanceado que gira alrededor de un eje horizontal, las reacciones en los cojinetes requeridas para soportar el peso del cuerpo (cuando no está rotando) pueden simplemente sumarse a las reacciones dinámicas que se generarían si no hubiese gravedad. Por ello, en aras de la sencillez omitiremos los efectos de la gravitación en el análisis.

Consideremos el diagrama de cuerpo libre en la Fig. 4.8 en donde las componentes de reacción en los cojinetes se referirán a los ejes fijos en el cuerpo (x, y, z).

La ecuación $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C$ da las ecuaciones de componentes

$$D_x + E_x = m(-\omega^2\bar{x} - \alpha\bar{y}) \tag{4.24a}$$

$$D_y + E_y = m(-\omega^2\bar{y} + \alpha\bar{x}) \tag{4.24b}$$

$$D_z = 0 \tag{4.24c}$$

Figura 4.7

Figura 4.8

Usando la segunda Ley de Euler en la siguiente forma

$$\Sigma\mathbf{M}_D = (I_{xz}^D\alpha - I_{yz}^D\omega^2)\hat{\mathbf{i}} + (I_{yz}^D\alpha + I_{xz}^D\omega^2)\hat{\mathbf{j}} + I_{zz}^D\alpha\hat{\mathbf{k}} \tag{4.20}$$

obtenemos las ecuaciones de componentes

$$-(a + b)E_y = I_{xz}^D\alpha - I_{yz}^D\omega^2 \tag{4.25a}$$

$$(a + b)E_x = I_{yz}^D\alpha + I_{xz}^D\omega^2 \tag{4.25b}$$

$$T = I_{zz}^D\alpha \tag{4.25c}$$

Observemos que si se conocen ω, α y las propiedades geométricas y de inercia del cuerpo, se podrán obtener las reacciones D_x, D_y, E_x y E_y resolviendo las Ecs. (4.24 a,b). Ilustraremos con un ejemplo tal procedimiento antes de explicar como balancear dinámicamente un cuerpo.

Ejemplo 4.30

Un cuerpo tiene masa $m = 2$ slug y su centro de masa esta fuera del eje a una distancia $d = 1/64$ plg en el plano xz, de modo que $\bar{x} = 0.0156$ plg y $\bar{y} = 0$. Sus productos de inercia son $I_{xz}^C = I_{yz}^C = 0.000380$ slug · pie². Si el cuerpo Tira hasta alcanzar una rapidez angular constante de 3000 rpm, ¿cuáles serán las reacciones dinámicas en los cojinetes D y E?

Solución

Por el teorema de los ejes paralelos,

$$I_{xz}^D = 0.000380 - 2\left(\frac{.0156}{12}\right)(1) = -0.00222 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

$$I_{yz}^D = 0.000380 - 2(0)(1) = 0.000380 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

Además,

$$\alpha = 0 \quad \text{y} \quad \omega = 3000(2\pi)/60 = 100\pi \text{ rad/s}$$

Entonces con las Ecs. (4.24) y (4.25) obtenemos

$$E_y = \frac{0.000380}{2.2}(100\pi)^2 = 17.0 \text{ lb}$$

$$D_y = 0 - E_y = -17.0 \text{ lb}$$

$$E_x = -\frac{0.00222(100\pi)^2}{2.2} = -99.6 \text{ lb}$$

y

$$D_x = -2\left(\frac{.0156}{12}\right)(100\pi)^2 + 99.6 = -.157 \text{ lb}$$

Ahora, volviendo a las Ecs. (4.24a,b) y (4.25a,b) podemos ver que para el cuerpo giratorio (ω y α no son ambas cero) las reacciones en los cojinetes desaparecerán si (¡y sólo si!) $\overline{x} = \overline{y} = 0$ e $I_{xz}^D = I_{yz}^D = 0$. Si C está sobre el eje de rotación (o sea si $\overline{x} = \overline{y} = 0$, el teorema de los ejes paralelos, Ec. (4.10), dice que:

$$I_{xz}^C = I_{xz}^D$$

y también

$$I_{yz}^C = I_{yz}^D$$

Una segunda aplicación del teorema da para este caso,

$$I_{xz}^P = I_{xz}^C = I_{xz}^D$$

$$I_{yz}^P = I_{yz}^C = I_{yz}^D$$

en donde P es *cualquier* punto sobre el eje de rotación.

Si $I_{xz}^P = I_{yz}^P = 0$, entonces z es un *eje principal de inercia* en P; esto se verá con mayor detalle en el Capítulo 7. Sucede que cuando tal es el caso, $I_{x'z}^P = 0$ en donde x' denota *cualquier* dirección (perpendicular a z). El lector debe reflexionar sobre la relación que existe entre $I_{xz}^D = I_{yz}^D = 0$ y $E_x = E_y = 0$ para concluir que $I_{x'z}^D = 0$

Entonces resumiendo podemos decir que las reacciones en los cojinetes desaparecen y que, en consecuencia, el cuerpo está balanceado si y sólo si el eje de rotación es un eje principal de inercia que contiene al centro de masa del cuerpo.

Veamos que se puede hacer para corregir el desbalance. Supongamos que se conocen los valores de m, $\overline{x}$, $\overline{y}$, I_{xz}^P e I_{yz}^P para un cuerpo, en donde P, sobre el eje de rotación, es el origen de coordenadas. Podemos, por ejemplo, determinar las coordenadas (x_A, y_A), (x_B, y_B) y las masas (m_A y m_B) de un par de contra-peso que cuando son colocados en dos "planos correctivos" A (en $z = z_A$) y B (en $z = z_B$) garanticen que la barra eje está balanceada dinámicamente. Todo lo que tenemos que hacer es (a) obligar al centro de masa C^* del sistema combinado (m más m_A y m_B) a encontrarse sobre el eje de la barra y (b) obligar a los productos de inercia del sistema combinado a que se anulen:

Coordenada x de $C^* = 0$:	$m_Ax_A + m_Bx_B + m\overline{x} = 0$	(4.26a)
Coordenada y de $C^* = 0$:	$m_Ay_A + m_By_B + m\overline{y} = 0$	(4.26b)
$^*I_{xz}^P = 0$:	$-m_Ax_Az_A - m_Bx_Bz_B + I_{xz}^P = 0$	(4.26c)
$^*I_{yz}^P = 0$:	$-m_Ay_Az_A - m_By_Bz_B + I_{yz}^P = 0$	(4.26d)

Nótese que se supone que los "contrapesos correctivos" son pequeños y pueden entonces tratarse como partículas.

Estas cuatro ecuaciones (4.26) pueden resolverse para evaluar las cantidades m_Ax_A, m_Bx_B, m_Ay_A y m_Bx_B. Se tiene así libertad para seleccionar dos de las seis cantidades m_A, m_B, x_A, x_B, y_A y y_B siempre que no exista otra condición que las relacione; ejemplo de tal restricción, sería el caso de que los contrapesos tuvieran que colocarse sobre un círculo de radio dado (como los "plomos" que se fijan en el aro (o *rim*) de una llanta de automóvil). En este caso tendríamos adicionalmente que:

$$x_A^2 + y_A^2 = R_A^2 \quad \text{y} \quad x_B^2 + y_B^2 = R_B^2$$

y ahora se tienen seis ecuaciones son seis incógnitas. Ilustraremos el uso de esas ecuaciones en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.31

En el Ejemplo 4.30 supongamos que hay que balancear el cuerpo añadiendo contrapesos en dos planos correctivos situados a la mitad de la distancia entre C y los dos cojinetes; los contrapesos deben colocarse, cada uno, sobre un círculo de radio igual a 0.5 pie. Hallar las masas y las coordenadas de los contrapesos.

Solución

Teníamos: $m = 2$ slug, $\overline{x} = 1/64$ plg, $\overline{y} = 0$ e $I_{xz}^C = I_{yz}^C = 0.000380$ slug · pie². Si escogemos que P tenga la misma posición axial que C, entonces $z_A = -0.5$ pie, $z_B = 0.6$ pie y $\overline{z} = 0$. También $I_{xz}^P = I_{xz}^C - 0 = 0.000380$ slug · pie² e $I_{yz}^P = I_{yz}^C - 0 = 0.000380$ slug · pie², y además,

$$(4.26a) \Rightarrow m_Ax_A + m_Bx_B = -2\left(\frac{1}{64(12)}\right) = -0.00260$$

$$(4.26c) \Rightarrow m_Ax_A(-0.5) - m_Bx_B(0.6) = -0.000380$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos

$$m_Bx_B = -0.000836$$

$$m_Ax_A = -0.00176$$

Análogamente

$$(4.26b) \Rightarrow m_Ay_A + m_By_B = 0$$

$$(4.26d) \Rightarrow -m_Ay_A(-0.5) - m_By_B(0.6) = -0.000380$$

de donde obtenemos

$$m_By_B = 0.000345$$

$$m_Ay_A = -0.000345$$

Elevando al cuadrado y sumando,

$$m_B^2x_B^2 + m_B^2y_B^2 = 0.818 \times 10^{-6}$$

$$m_B^2\underbrace{(x_B^2 + y_B^2)}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0.818 \times 10^{-6}$$

$$m_B = 1.81 \times 10^{-3} \text{ slug}$$

El peso de B es entonces $W_B = 1.81 \times 10^{-3}$ (32.2) = 0.0582 lb (o sea 0.932 oz). Para las coordenadas,

$$x_B = \frac{-0.000836}{1.81 \times 10^{-3}} = -0.462 \text{ pie}$$

y

$$y_B = \frac{0.000345}{1.81 \times 10^{-3}} = 0.191 \text{ pie}$$

(La suma vectorial de éstas es $\sqrt{(0.462)^2 + (0.191)^2} = 0.500$ pie, lo que comprueba el resultado)

Ahora, para la masa y coordenadas de m_A en el plano A, tenemos elevando al cuadrado y sumando nuevamente:

$$\underbrace{m_A^2}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2}(x_A + y_A^2) = 3.22 \times 10^{-6}$$

$$m_A = 3.59 \times 10^{-3} \text{ slug}$$

Entonces el peso de A es $W_A = (3.29 \times 10^{-3})\,32.2 =$
son:

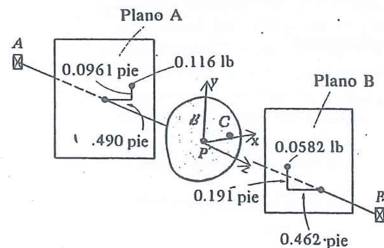
$$x_A = \frac{-0.00176}{3.59 \times 10^{-3}} = 0.490 \text{ pie}$$

$$y_A = \frac{-0.000345}{3.59 \times 10^{-3}} = 0.0961 \text{ pie}$$

Comprobando nuevamente:

$$\sqrt{x_A^2 + y_A^2} = 0.499 \text{ pie}$$

Los resultados anteriores se muestran en la siguiente



Problemas / Sección 4.6

4.155 Explique por qué la placa uniforme de la Fig. P4.155 está balanceada dinámicamente.

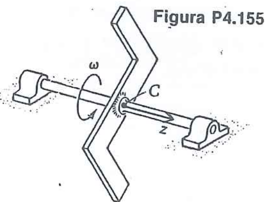


Figura P4.155

4.156 Una barra ligera de longitud ℓ, con masa M concentrada en su extremo, está soldada a una barra eje vertical que gira con ω constante (Fig. P4.156). Encuentre la fuerza y el momento ejercido por la barra dada sobre la barra eje. Incluya el efecto de la gravedad.

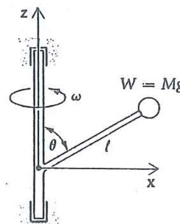


Figura P4.156

4.157 La barra eje en la Fig. P4.157 gira con velocidad angular constante de 10 rad/s. Si las barras son ligeras comparadas con los dos contrapesos, determine el momento flexionante ejercido sobre $\mathcal{S}_2$ (longitud $= 2\ell$) por $\mathcal{S}_1$ en el punto donde están soldados los brazos. Esboce la manera en que la barra eje se deformará bajo la acción de este par. Omita la gravedad.

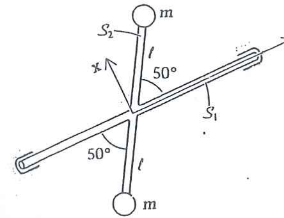


Figura P4.157

4.158 El disco circular en la Fig. P4.158 está montado con una excentricidad δ sobre la flecha.

a. Encuentre las reacciones dinámicas en los cojinetes A y B en términos de los parámetros del sistema mostrado en la figura.
b. Si $\delta = r/20$, obtenga el radio de un agujero (en términos de r) en Q que elimine esas reacciones en los cojinetes.

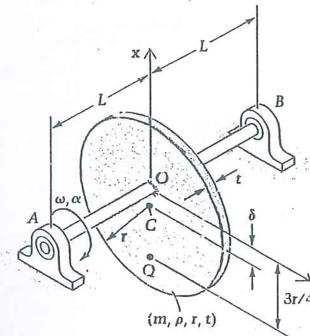


Figura P4.158

4.159 Dos discos delgados están montados sobre una barra eje en los cuartos de su claro, como se indica en la Fig. P4.159. Los discos tienen una excentricidad $\delta = 0.05$ plg en su montaje respecto a la barra eje. Determine las coordenadas x y y de dos pequeños contrapesos magnéticos de 4 oz (uno para cada disco) que sirven para balancear la barra eje al pegarlos a los discos. Desprecie el espesor de los últimos y considere a los contrapesos como partículas.

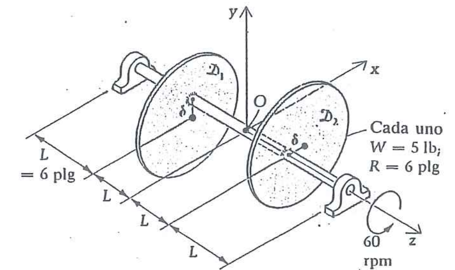


Figura P4.159

4.160 En la Fig. P4.160, $\mathcal{A}$ es el eje de una bicicleta montado en cojinetes separados una distancia $2d$. Las manivelas

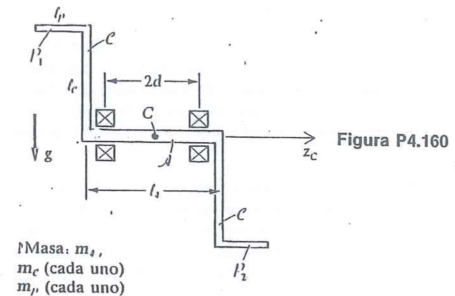


Figura P4.160

$\mathcal{C}$ están conectadas rígidamente al eje y también a los pedales P_1 y P_2. Si el cuerpo rígido que consiste del eje $\mathcal{A}$, las manivelas y los pedales giran libremente alrededor del eje z_C con velocidad angular constante $\mathcal{C}$, determine las fuerzas ejercidas sobre los cojinetes en la configuración dada.

4.161 Un cilindro macizo (masa m, radio r y longitud $\ell = 4r$) y una barra ligera están soldados según un ángulo ψ como se muestra en la Fig. P4.161. El onjunto rígido es hecho girar a ω_0 rad/s, y conserva luego esta velocidad. Calcule las reacciones dinámicas en los cojinetes después de $\omega = \omega_0$.

$$I_{xz} = (-6.5 \operatorname{sen} 2\psi)(mr^2/12)$$

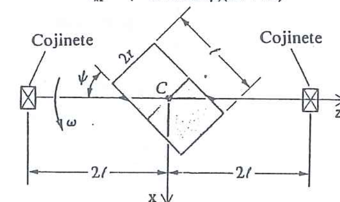


Figura P4.161

4.162 Repita el problema anterior si falta la mitad inferior (sombreada) del cilindro. (La masa es ahora $m/2$).

4.163 La barra eje en forma de S en la Fig. 4.163a consta de dos medios anillos (o porciones de perfil semicircular), cada uno de radio R y masa $m/2$. Determine las reacciones dinámicas en los cojinetes en el instante dado. *Sugerencia*: El centro de masa de un medio anillo está localizado como lo muestra la Fig. P4.163b.

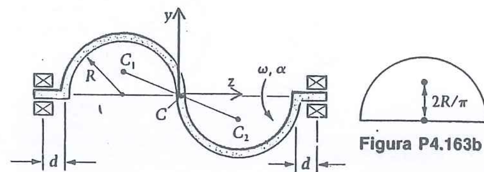


Figura P4.163a

Figura P4.163b

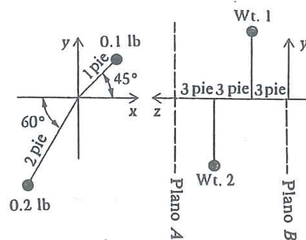


Figura P4.164

4.164 La barra eje en la Fig. P4.164 soporta los contrapesos excéntricos W_1 (0.1 lb) y W_2 (0.2 lb), como se muestra. Se desea añadir un contrapeso de 0.3 lb en el plano A y otro de 0.4 lb en el plano B para balancear la flecha dinámicamente. Determine las coordenadas x y y de los contrapesos propuestos.

4.165 El rotor $\mathcal{R}$ en la Fig. P4.165 tiene una masa de 2 slug y su centro de masa C tiene una excentricidad de 5 plg respecto a su barra eje como se muestra (x = 3 plg, y = 4 plg y z = 10 plg en el sistema coordenado fijo en el punto $\mathcal{R}$ de la barra eje). Los productos de inercia de respecto a los ejes en el centro de masa (x_C, y_C, z_C) son $I_{xz}^C = -\frac{5}{3}$ lb · plg · s^2 e $I_{yz}^C = -\frac{5}{6}$ lb · plg · s^2. Añadiendo una masa de 1/7 slug en cada uno de los dos planos de corrección $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, balancee el rotor. O sea, determine las coordenadas x y y de cada una de las dos masas añadidas, de manera que el centro de masa del sistema final esté sobre la flecha y que los productos de inercia desaparezcan.

4.166 Balancee la barra eje en la Fig. P4.166 añadiendo una masa de 0.003 slug en el plano A y una masa de 0.004 slug en el plano B.

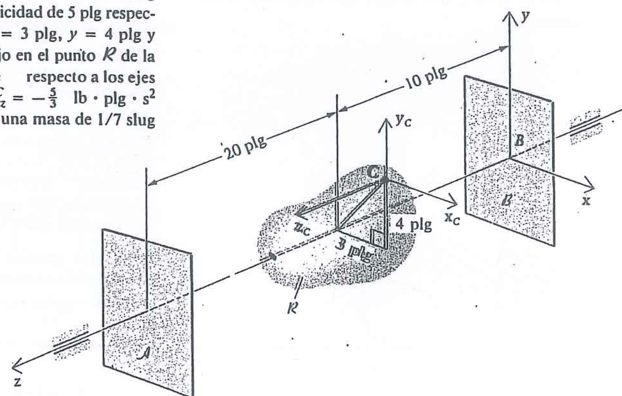


Figura P4.165

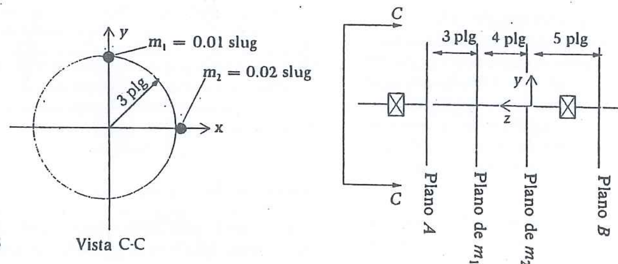
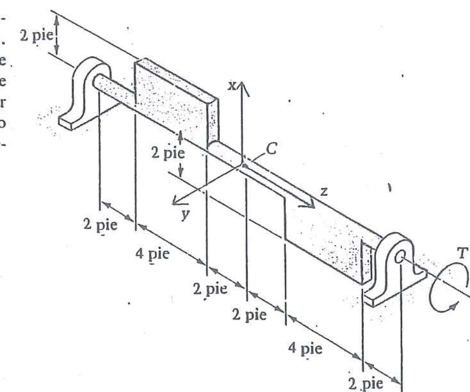


Figura P4.166

* **4.167** Dos placas, cada una con peso de 32.2 lb, están soldadas a una barra eje ligera, como se muestra en la Fig. P4.167. Un par T de 10 lb · pie se aplica respecto del eje z hasta que el conjunto gira con rapidez angular ω_0 y luego se suprime T. Si los cojinetes pueden resistir una fuerza perpendicular el eje no mayor de 320 lb, obtenga el valor máximo seguro de ω_0. Note que xz es el plano de las placas y las coordenadas (x, y, z) están fijas al conjunto.



Problemas para computadora / Capítulo 4

4.168 Un cilindro de masa m y radio R rueda hacia la izquierda y encuentra un hoyanco de longitud s, como muestra la Fig. P4.168. La velocidad angular cuando el centro de masa C está directamente sobre O es ω_i ↺. Interesa determinar las condiciones bajo las cuales no habrá resbalamiento en O mientras el cilindro pivotea antes de tocar el borde en A.

a. Demuestre que para que no haya deslizamiento en O, las ecuaciones de movimiento deben ser (Fig. P4.168b):

1. $mR\alpha = mg \operatorname{sen}\theta - f$
2. $mR\omega^2 = mg\cos\theta - N$
3. $mgR \operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2} mR^2\alpha$

en donde $a_{Ct} = R\alpha$ y $a_{Cn} = R\omega^2$ se han introducido.

b. Multiplique la Ec. (3) por $\dot{\theta}$ e integre, obteniendo así.

4. $mgR\,(1 - \cos\theta) = \frac{3}{4} mR^2\omega^2 - \frac{3}{4} mR^2\omega_i^2$

Halle f y N de esas ecuaciones y demuestre que la condición de no resbalamiento $f \leq \mu N$ requiere que

$$\operatorname{sen}\theta \leq \mu(7\cos\theta - 4 - 3R\omega_i^2/g)$$

Note que para una ω_i muy baja esto se cumple fácilmente si μ no es muy pequeña y s (y por tanto θ) no es muy grande. Pero, por ejemplo, si $\omega_i^2 = g/R$, entonces el cilindro resbalará sin importar el valor de μ porque la desigualdad no se puede satisfacer. Note también que si el cilindro no desliza justo antes del impacto, no ha resbalado antes en absoluto.

c. Luego utilice la Fig. P4.168c para calcular el ángulo θ para el cual el cilindro golpeará el borde izquierdo A del hoyanco, y muestre que ningún deslizamiento habrá ocurrido en algún instante durante el pivoteo si

$$\frac{s}{2R} \leq \mu\left(7\sqrt{1 - \left(\frac{s}{2R}\right)^2} - 4 - 3R\omega_i^2/g\right)$$

Por último use la computadora para generar datos y graficar los μ mínimos que se requieran para que no ocurra resbalamiento en O contra $R\omega_i^2/g$, para tres valores de $s/2R$: 0.1, 0.2 y 0.5. Trace las tres curvas en la misma gráfica.

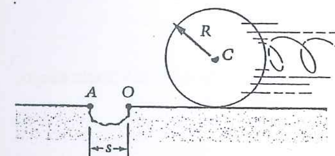


Figura P4.168a

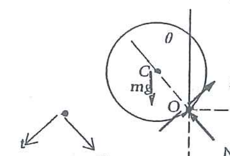


Figura P4.168b

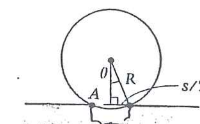
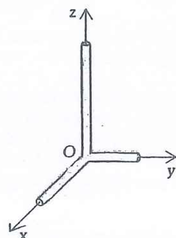


Figura P4.168c

Respuestas a las preguntas / Capítulo 4

P4.1 Cualquier integral como $\int_{\mathcal{B}} x\,dm$, donde x se mide desde un origen en, digamos Q, es igual a $m\bar{x}$; esta es la definición del centro de masa. Entonces si el origen es C, $\bar{x} = 0$ y $\int_{\mathcal{B}} x\,dm = 0$.

P4.2 Ambos productos de inercia son nulos para el cuerpo mostrado en el diagrama. Tres barras de cualquier longitud sobre los ejes (x, y, z) se unen en el origen para formar un cuerpo rígido. Ni el eje z ni el plano xy son de simetría y, sin embargo, I^O_{xz} e I^O_{yz} son nulos.



P4.3 Sea (x, y, z) un sistema coordenado fijo en el marco de referencia $\mathcal{I}$. El cuerpo al girar con respecto al marco $\mathcal{I}$, tendrá su masa distribuida diferentemente, en distintos tiempos, con respecto x y y. Pero en movimiento plano el eje z está fijo en dirección *tanto* en el cuerpo como en el espacio. Entonces, puesto que el cuadrado de la distancia desde el eje z es siempre r^2, independientemente de la orientación de x y y, vemos que I^C_{zz} no cambia al girar el cuerpo.

P4.4 Sean $\mathbf{r}_{OP}$ y $\mathbf{r}_{OC}$ los vectores de posición de P y C; derivando $\mathbf{r}_{OC} = \mathbf{r}_{OP} + \mathbf{r}_{PC}$ se obtiene $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_P + \dot{\mathbf{r}}_C$. El producto vectorial de vectores paralelos siempre se anula.

P4.5 Aunque $\mathbf{H}_O$ puede expresarse siempre como $I^O_{xz}\omega\hat{\mathbf{i}} + I^O_{yz}\omega\hat{\mathbf{j}} + I^O_{zz}\omega\hat{\mathbf{k}}$ cuando $\mathbf{v}_O$ es cero, su derivada es solo igual a $\Sigma\mathbf{M}_O$ en el caso de que $\mathbf{v}_O$ es *idénticamente* nula, en otras palabras, *cero en todo instante*.

P4.6 Sí, porque entonces la fuerza de fricción tendría la dirección opuesta y ΣM_Q daría un valor mayor para N. La fuerza normal N tendría entonces que equilibrar los momentos respecto a Q de P, f y del peso.

P4.7 Si $M = 2m$, entonces (cuando el par no está presente) $T = mg$ y $\ddot{\theta} = 0$ son soluciones del problema y *no* hay movimiento. Si $M < 2m$, el bloque se mueve *hacia abajo* y $\ddot{\theta}$ es negativa (↺).

P4.8 $r = \ell/2$ es aquí constante.

P4.9 Porque la aceleración inicial del centro de masa C será hacia la derecha y hacia abajo, y la aceleración angular inicial será en sentido horario (↻).

P4.10 No, la longitud debe cambiar y eso toma tiempo.

P4.11 Cambios en rapidez rotacional.

Cuestionario de repaso / Capítulo 4

¿Verdadero o falso?

Todas estas cuestiones se refieren a cuerpos rígidos en movimiento plano

1. La Segunda Ley de Euler permite estudiar el movimiento rotacional de los cuerpos rígidos.
2. Los momentos de inercia son siempre positivos, mientras que los productos de inercia pueden tener uno u otro signo.
3. La fórmula $m\ell^2/12$ da el valor exacto del momento de inercia de una barra delgada respecto a un eje lateral a través de su centro de masa.
4. La Segunda Ley de Euler, $\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$, es válida sólo en un marco inercial (o sea que los vectores de posición y velocidades inherentes en $\mathbf{H}_O$, el origen O y las derivadas respecto al tiempo, se toman todas en un marco inercial).
5. En $I^P_{zz} = I^C_{zz} + md^2$, la cantidad d es la distancia entre los puntos P y C (se tiene que C está en el plano de referencia, mientras que P es cualquier punto del cuerpo).
6. La Segunda Ley de Euler, $\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$, se aplica a cuerpos deformables, líquidos y gases así como a cuerpos rígidos.
7. Si ① representa el centro instántaneo de velocidad nula, entonces en general $M_{r①} \neq I_{①}\alpha$
8. Los productos de inercia no aparecen en las ecuaciones del movimiento plano.
9. $\Sigma\mathbf{M}_C = \dot{\mathbf{H}}_C$ es tan general como $\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ en donde O está fijo en un marco inercial.
10. En problemas de traslación, los momentos de las fuerzas y pares externos respecto a cualquier punto suman cero.
11. Suponga que compra un juego nuevo de llantas de automóvil y se balancean dinámicamente añadiendo contrapesos (o "plomos") en dos planos (en lados interiores y exteriores de los aros o *rims*). Los productos de inercia I_{xz} e I_{yz} se han eliminado, entonces lo que hubiese causado vibraciones y reacciones en los cojinetes si no se hubiera efectuado.
12. $\Sigma M_C = I_C\alpha$ se aplica a cuerpos deformables y a cuerpos rígidos si se encuentran en movimiento plano.
13. Para dos cuerpos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, la suma de las ecuaciones $\Sigma\mathbf{F} = m_i\mathbf{a}_{C_i}$ formuladas para cada uno será $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{Cf}$ para el cuerpo combinado.
14. Si los cuerpos de la Cuestión (13) giran uno respecto del otro no tiene sentido hablar de una ecuación combinada $\Sigma M_C = I_C\alpha$.

Respuestas: 1 V; 2 V; 3 F; 4 V; 5 F; 6 V; 7 V; 8 F; 9 V; 10 F; 11 V; 12 F; 13 V; 14 V.

Capítulo 5 Métodos especiales para el movimiento plano de cuerpos rígidos: Trabajo y energía cinética. Impulso y cantidad de movimiento.

5.1 Introducción

En este capítulo continuará el estudio de la cinética de los cuerpos rígidos en movimiento-plano, pero los métodos que emplearemos tienen que ver con soluciones especiales de las ecuaciones del Capítulo 4. Resulta que es posible efectuar ciertas integraciones especiales de esas ecuaciones en general, probando de paso tres principios que con frecuencia son útiles en la resolución de problemas cinéticos: (1) Principio del Trabajo y la Energía Cinética, (2), Principio del Impulso y la Cantidad de Movimiento y (3) Principio del Impulso Angular y la Cantidad de Movimiento Angular. Se verá que los tres principios no son más que primeras integrales de las ecuaciones diferenciales del movimiento (las que, como hemos visto, son ecuaciones de segundo orden en la variable tiempo). Los principios de este capítulo permiten entonces comenzar el trabajo de resolución a medio camino entre las aceleraciones y las posiciones. Quedan así implicadas en los principios las velocidades pero no las aceleraciones.

5.2 Principio del trabajo y la energía cinética. Energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano

Hay un Principio derivado de las ecuaciones de movimiento que nos ayudará a encontrar las incógnitas de interés en los problemas de cinética. En esta sección veremos que tal principio surge de primero deducir y luego derivar la energía cinética del cuerpo.

La **energía cinética**, que examinaremos en el Capítulo 2, se denota aquí con la letra T; para cualquier cuerpo o sistema de cuerpos, se define como la suma de $\frac{1}{2}$ (dm) v^2 sobre todos sus elementos de masa:

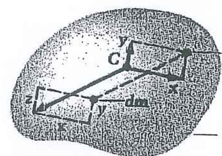
$$T = \frac{1}{2}\int (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\, dm \tag{5.1}$$

En esta sección necesitamos especializar la Definición (5.1) para un cuerpo rígido $\mathscr{B}$ en movimiento plano. Para este fin, relacionamos cinemáticamente la velocidad $\mathbf{v}$ de la masa diferencial con la velocidad del centro de masa C. Aprovechando el hecho de que $\mathbf{v}$ es en todo tiempo igual a la velocidad de su punto compañero en el plano de referencia que contiene a C (Fig. 5.1), podemos escribir

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \omega\hat{\mathbf{k}} \times (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}) = \mathbf{v}_C + \omega(-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}})$$

Notemos que los ejes x y y están fijos en $\mathscr{B}$ con su origen en C. Formando v^2, esto es, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ tendremos

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}_C\cdot\mathbf{v}_C + \omega^2(x^2+y^2) + 2\omega\mathbf{v}_C\cdot(x\hat{\mathbf{j}} - y\hat{\mathbf{i}}) \tag{5.2}$$



Punto compañero de dm en el plano del centro de masa C

Cuerpo $\mathscr{B}$ rígido en movimiento plano

Figura 5.1

Sustituyendo (5.2) en (5.1) resulta para la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{v}_C\cdot\mathbf{v}_C\int dm + \frac{\omega^2}{2}\int(x^2+y^2)\,dm + \omega(\mathbf{v}_C\cdot\hat{\mathbf{j}})\int x\,dm - \omega(\mathbf{v}_C\cdot\hat{\mathbf{i}})\int y\,dm$$

Pero el segundo término es la integral de momento de inercia, por lo que

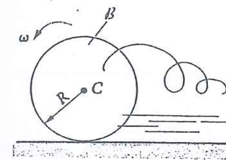
$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_{zz}^C\omega^2{}^* \tag{5.3}$$

en donde $\mathbf{v}_C\cdot\mathbf{v}_C = |\mathbf{v}_C|^2 = v_C^2$, o sea el cuadrado de la magnitud de la velocidad de C.

Pregunta 5.1 ¿Por qué se anulan los términos $\int x\,dm$ y $\int y\,dm$?

Notemos que la energía cinética (que es escalar) tiene dos *partes* identificables (no componentes): una que se refiere al movimiento del centro de masa C (que es $T_v = \frac{1}{2}mv_C^2$) y la otra al movimiento del cuerpo relativo a C (que es $T_\omega = \frac{1}{2}I_C\omega^2$). Esta clara división de T existe también en el movimiento general de los cuerpos rígidos (o sea en tres dimensiones), aunque entonces T_ω contiene más términos.

Ejemplo 5.1



Calcular la energía cinética de un cuerpo redondo $\mathscr{B}$ en rodamiento, con masa m, radio R y radio de giro con respecto al eje z_C igual a k_C. El centro de masa C (vea el diagrama) está en el centro geométrico.

Solución

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\underbrace{I_C}_{mk_C^2}\omega^2 = \frac{1}{2}m[(R\omega)^2 + k_C^2\omega^2]$$

$$= \frac{mR^2\omega^2}{2}\left[1 + \left(\frac{k_C}{R}\right)^2\right]$$

Note que si $\mathscr{B}$ es un cilindro macizo, entonces $k_C = R/\sqrt{2}$ y

$$T = \frac{mR^2\omega^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

En este caso, dos tercios de la energía cinética pertenecen al término traslacional $(\frac{1}{2}\ mv^2)_c$ de T.

Si $\mathscr{B}$ es aro, $I_C = mR^2$ y $k_C = R$, por lo que

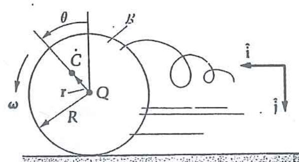
$$T = \frac{mR^2\omega^2}{2}(1 + 1)$$

y esta vez la energía cinética se reparte en partes iguales entre los términos traslacional y rotacional.

*En el resto del capítulo usaremos I_C en vez de I_{zz}^C.

Ejemplo 5.2

Repitamos el Ejemplo 5.1 para el caso en que el centro de masa esté desplazado una distancia r desde el centro geométrico Q del cuerpo rodante $\mathcal{B}$. (Vea el diagrama).



Solución

Para poder usar la ecuación de la energía cinética,

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

debemos calcular primero v_C^2:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_Q + \dot\theta \hat{\mathbf{k}} \times \underbrace{\mathbf{r}_{QC}}_{r\,\text{sen}\,\theta\hat{\imath} - r\cos\theta\hat{\jmath}}$$

$$= (R\dot\theta + r\dot\theta\cos\theta)\hat{\imath} + r\dot\theta\,\text{sen}\,\theta\hat{\jmath}$$

Por lo tanto,

$$v_C^2 = R^2\dot\theta^2 + r^2\dot\theta^2 + 2Rr\dot\theta^2\cos\theta$$

Substituyendo obtenemos

$$T = \frac{mR^2\dot\theta^2}{2}\left[1 + \frac{2r}{R}\cos\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{k_C}{R}\right)^2\right]$$

Nótese que si $r = 0$, la respuesta concordaría con la del Ejemplo 5.1.

Existe una manera alternativa de escribir la energía cinética T de un cuerpo rígido en movimiento plano que implica usar el centro instantáneo de velocidad nula Ⓘ (Fig. 5.2):

$$T = \overbrace{\frac{1}{2} m v_C^2}^{T_v} + \overbrace{\frac{1}{2} I_C \omega^2}^{T_\omega} = \frac{1}{2} m(d\omega)^2 + \frac{1}{2} I_C\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(I_C + md^2)\omega^2$$

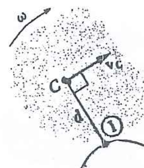


Figura 5.2

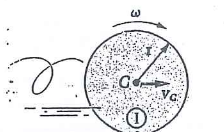


Figura 5.3

Usando el teorema de los ejes paralelos obtenemos:

$$T = \frac{1}{2} I_{Ⓘ}\omega^2 \tag{5.4}$$

Los términos traslacional (T_v) y rotacional (T_ω) que forman al escalar T se reducen a un solo término, $\frac{1}{2} I_{Ⓘ}\omega^2$ si trabajamos con Ⓘ en vez de con C.

Como ejemplo consideremos de nuevo un cilindro en rodamiento (vea la Figura 5.3):

$$T = T_v + T_\omega = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} m(r\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mr^2\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} mr^2\omega^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} mr^2\omega^2$$

Hemos visto que dos terceras partes de la energía cinética del cilindro están asociadas a la parte traslacional de T y una tercera parte a la parte rotacional. Ahora, si usamos Ⓘ obtenemos *toda* la T en un sólo término:

$$T = \frac{1}{2} I_{Ⓘ}\omega^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\underbrace{\frac{1}{2} mr^2}_{I_C} + \underbrace{mr^2}_{\text{término de transferencia}}\right]}_{I_{Ⓘ}}\omega^2 = \frac{3}{4} mr^2\omega^2 \qquad \text{(igual que antes)}$$

Como un segundo ejemplo del uso de la Ec. (5.4) consideremos la barra delgada que oscila alrededor del pivote en A, como muestra la Fig. 5.4. La energía cinética de β puede evaluarse de dos maneras:

$$T = \frac{1}{2} I_{Ⓘ}\omega^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} m\ell^2\right]\omega^2 = \frac{m\ell^2\omega^2}{6}$$

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C\omega^2 = \frac{1}{2} m\left(\frac{\ell}{2}\omega\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12} m\ell^2\right)\omega^2 = m\ell^2\omega^2\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) = \frac{m\ell^2\omega^2}{6}$$

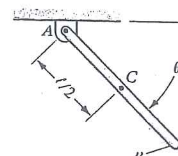


Figura 5.4

Deducción del Principio $W = \Delta T$. Trabajo y potencia en Sistemas de fuerzas y pares.

Volviendo ahora a la deducción del principio, calculamos primero la rapidez de variación (o derivada respecto al tiempo) de la energía cinética:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2} I_C\omega\hat{\mathbf{k}} \cdot \omega\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\underbrace{(\mathbf{a}_C \cdot \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{a}_C)}_{2\mathbf{a}_C \cdot \mathbf{v}_C} + \frac{1}{2} I_C\underbrace{(\alpha\hat{\mathbf{k}} \cdot \omega\hat{\mathbf{k}} + \omega\hat{\mathbf{k}} \cdot \alpha\hat{\mathbf{k}})}_{2\alpha\hat{\mathbf{k}} \cdot \omega\hat{\mathbf{k}}}$$

Por consiguiente

$$\frac{dT}{dt} = m\mathbf{a}_C \cdot \mathbf{v}_C + (I_C\alpha\hat{\mathbf{k}}) \cdot \omega\hat{\mathbf{k}} \tag{5.5}$$

Recordando que $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C$ y que la componente z de $\Sigma\mathbf{M}_C$ *es* $I_C\alpha$ para cuerpos rígidos en movimiento plano, podemos escribir

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_C + \Sigma\mathbf{M}_C \cdot \omega\hat{\mathbf{k}} \tag{5.6}$$

Pregunta 5.2 Como $\Sigma\mathbf{M}_C$ puede tener componentes x y y (Ec. 4.13), ¿por qué es posible sustituir el vector *total* $\Sigma\mathbf{M}_C$ *en vez de sólo la componente z*, o sea $I_C\omega\hat{\mathbf{k}}$, en la ecuación 5.5?

La siguiente meta es introducir en la ecuación las fuerzas y pares externos que actúan sobre el cuerpo $\mathcal{B}$ (Fig. 5.5). Nótense las abreviaciones $\mathbf{r}_{CP1} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_{CP2} = \mathbf{r}_2$, etc., de los vectores a los puntos de aplicación de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, etc. Suponemos que las acciones mecánicas externas sobre el cuerpo surgen de un sistema de fuerzas ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . . .) y pares con vectores momento ($\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, . . .), como se muestra en la Fig. 5.5. Sean además ($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, . . .) las velocidades de los puntos materiales (P_1, P_2, . . .) sobre los cuales actúan instantáneamente las fuerzas.

La resultante de las fuerzas externas es

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots \tag{5.7}$$

y el momento de las $\mathbf{F}_i'$ y $\mathbf{C}_j'$ respecto a C es

$$\Sigma\mathbf{M}_C = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \cdots \tag{5.8}$$

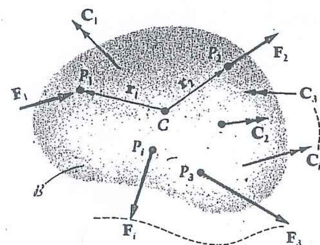


Figura 5.5

Sustituyendo las Ecuaciones (5.7) y (5.8) en (5.6) resulta

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) \cdot \mathbf{v}_C + (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots) \cdot \omega\hat{\mathbf{k}} \\ &\quad + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \cdots) \cdot \omega\hat{\mathbf{k}} \\ &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) \cdot \mathbf{v}_C + \omega\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots) \\ &\quad + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \cdots) \cdot \omega\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{5.9}$$

Como el punto y la cruz pueden intercambiarse sin alterar el valor de un triple producto escalar,

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots) \cdot \mathbf{v}_C + (\omega\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{F}_1 + (\omega\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{F}_2 \\ &\quad + \cdots + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \cdots) \cdot \omega\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{5.10}$$

Pero las velocidades de P_1 y C están relacionadas:

$$\mathbf{v}_{P_1} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_C + \omega\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_1$$

por lo que

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \cdots) \cdot \omega\hat{\mathbf{k}} \tag{5.11}$$

El segundo miembro de la Ec. (5.11) se denomina **potencia,** o **rapidez de variación de trabajos,** del sistema de fuerzas y pares externos que actúan sobre el cuerpo.

La potencia de una fuerza es su producto escalar con la velocidad (lineal) del punto sobre el que actúa; por otra parte, la potencia de un par es su producto escalar con la velocidad angular del cuerpo sobre el que ejerce su acción:

$$\text{Rapidez de variación del trabajo de una fuerza } \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \text{potencia de } \mathbf{F}_1 \tag{5.12}$$

$$\text{Rapidez de variación del trabajo de un par } \mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_1 \cdot \omega\hat{\mathbf{k}} = \text{potencia de } \mathbf{C}_1 \tag{5.13}$$

Entonces una forma del principio de esta sección es

$$\text{Potencia} = \frac{dT}{dt} \tag{5.14}$$

o bien

$$P = \dot{T}$$

Integrando, obtenemos otro principio*:

$$\int_{t_1}^{t_2} P\,dt = T(t_2) - T(t_1) = T_2 - T_1$$

o bien

$$W = \Delta T = \left(\frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{2} I_C\omega^2\right)\Big]_{t_1}^{t_2} \tag{5.15}$$

*Algunas veces se usa (t_i, t_f) en vez de (t_1, t_2) para denotar el intervalo de tiempo; los subíndices significan obviamente "inicial" y "final".

en donde la integral de la potencia se llama **trabajo** W de las fuerzas y pares externos. Es el trabajo efectuado por las $\mathbf{F}_i$ y los $\mathbf{C}_i$ sobre el cuerpo entre los tiempos t_1 y t_2. Tenemos entonces un principio que puede enunciarse de la siguiente manera:

Trabajo efectuado por fuerzas y pares externos sobre $\mathcal{B}$ = Incremento de la energía cinética de $\mathcal{B}$

Es esencial reconocer que nuestra deducción del principio del trabajo y de la energía cinética depende crucialmente de que el cuerpo sea rígido. El trabajo de fuerzas externas sobre un cuerpo deformable en general *no* es igual al cambio en su energía cinética. Tal es el caso también cuando el cuerpo "deformable" está compuesto de varias partes individualmente rígidas. Sin embargo, hay un número de circunstancias especiales, usualmente fáciles de reconocer, para las cuales el principio es válido para tal sistema de cuerpos rígidos. Daremos un ejemplo en que lo anterior es cierto. Supongamos que tenemos dos cuerpos rígidos, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ que forman un sistema y supongamos que los cuerpos están conectados por un pasador (o articulación) con fricción despreciable, como se ve en la Fig. 5.6.

Sea $\mathbf{F}$ la fuerza ejercida por $\mathcal{B}_1$ sobre $\mathcal{B}_2$ en el pasador y en consecuencia $-\mathbf{F}$ es la fuerza ejercida por $\mathcal{B}_2$ sobre $\mathcal{B}_1$. Además, sea:

$\mathbf{v}$ = velocidad común de los puntos de unión en los dos cuerpos

P_{E1} = potencia de las fuerzas que actúan en $\mathcal{B}_1$ y que son también externas al sistema.

P_{E2} = potencia de las fuerzas que actúan en $\mathcal{B}_2$ y que son también externas al sistema.

$T_{\mathcal{B}_1}$ = energía cinética de $\mathcal{B}_1$

$T_{\mathcal{B}_2}$ = energía cinética de $\mathcal{B}_2$

Si ahora aplicamos las Ecs. (5.11) y (5.14) a cada uno de los cuerpos, obtenemos

$$P_{E_1} + (-\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} = \frac{dT_{\mathcal{B}_1}}{dt}$$

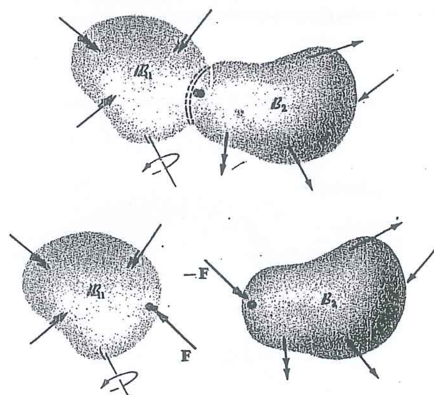


Figura 5.6

y

$$P_{E_2} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dT_{\mathcal{B}_2}}{dt}$$

que por sumar dan

$$P_{E_1} + P_{E_2} = \frac{d}{dt}(T_{\mathcal{B}_1} + T_{\mathcal{B}_2})$$

o bien

$$P = \frac{dT}{dt}$$

en donde P es la potencia de las fuerzas externas ejercidas sobre el sistema, y T es la energía cinética del propio sistema.

Con fricción en el pasador tendríamos también pares interactivos $\mathbf{C}$ y $-\mathbf{C}$, y la suma de sus potencias de trabajo sería

$$\mathbf{C} \cdot (\omega_{\mathcal{B}_2} - \omega_{\mathcal{B}_1})\hat{\mathbf{k}}$$

que en general *no* sería nula*. Esta rapidez de trabajo neta de los pares de fricción sería negativa lo que refleja el hecho que la fricción reduce la energía cinética del sistema. Podemos esperar que el principio del trabajo (de fuerzas externas) y de la energía cinética sea válido para un sistema de cuerpo rígidos, siempre que la interacción de los cuerpos no conduzca a la disipación de la energía mecánica por fricción ni a un almacenamiento de energía en un resorte. En caso de duda, debe segirse el procedimiento que hemos indicado, o sea aplicar la Ec. (5.14) a cada uno de los cuerpos, sumar las ecuaciones y ver si se cancelan las rapideces de trabajo de las fuerzas interactivas.

Cálculo del trabajo efectuado por diversos tipos de fuerzas y momentos

Antes de poner en uso la Ec. (5.15) es esencial mostrar como calcular el trabajo W realizado sobre $\mathcal{B}$ por un cierto número de tipos comunes de fuerzas y momentos.

Tipo 1: $\mathbf{F}_1$ es constante. En este caso, como en el Capítulo 2,

$$W = \int \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1\, dt = \mathbf{F}_1 \cdot \int \mathbf{v}_1\, dt \tag{5.16}$$

Tipo 2: $\mathbf{F}_1$ actúa sobre el mismo punto P_1 de $\mathcal{B}$ durante todo su movimiento[†]. En este caso

$$W = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\, dt = \int_{\mathbf{r}_i(t_i)}^{\mathbf{r}_f(t_f)} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_1 \tag{5.17}$$

en donde $\mathbf{r}_{OP1} = \mathbf{r}_1$ e i y f denotan inicial y final con relación a tiempos y posiciones. Es cierto, por supuesto, que la velocidad $\mathbf{v}_1$, que se combina con $\mathbf{F}_1$ para producir potencia, es en cada instante la derivada de *algún* vector de posición. Si la fuerza actúa sobre *distintos* puntos materiales de $\mathcal{B}$ en tiempos diferentes durante un movimiento (como la fricción de un freno), la integral de línea $\int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_{OP1}$ no tiene utilidad funcional y la integral general $\int \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1\, dt$ debe usarse entonces.

*"Desaparecería, por supuesto, si la fricción fuese lo suficientemente grande para impedir la rotación relativa tal que $\omega_{\mathcal{B}_1} = \omega_{\mathcal{B}_2}$; el sistema se comportaría entonces como un cuerpo rígido único.

† Lo que fue *necesariamente* el caso en el capítulo 2.

Tipo 3: $\mathbf{F}_1$ es debida a la gravedad. Este es un ejemplo de *ambos* tipos 1 *y* 2. Entonces si z es positiva hacia abajo obtenemos*

$$W = \int mg\hat{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{r}_{OC} = mg\hat{\mathbf{k}} \cdot \int d\mathbf{r}_{OC}$$

Expresando la diferencial del vector de posición en términos de coordenadas cartesianas rectangulares,

$$d\mathbf{r}_{OC} = dx_C\hat{\mathbf{i}} + dy_C\hat{\mathbf{j}} + dz_C\hat{\mathbf{k}}$$

y sustituyendo obtenemos un resultado sencillo para el trabajo de la gravedad:

$$W = mg \int_{z_{C_1}}^{z_{C_2}} dz_C = mg(z_{C_2} - z_{C_1}) = mgh \tag{5.18}$$

como vimos en el Capítulo 2. Nótese que la gravedad hace trabajo positivo si el cuerpo se mueve hacia abajo. (Cabe recordar que una fuerza realiza trabajo positivo si tiene componente en la dirección del movimiento del punto sobre el que actúa. Si no es así, efectuará trabajo negativo durante el movimiento de ese punto.)

Tipo 4: $\mathbf{F}_1$ es la fuerza normal ejercida en el punto de contacto sobre un cuerpo rígido que mantiene contacto con una superficie fija, esté el cuerpo rodando o resbalando. Nótese en la parte inferior de la Fig. 5.7 que la fuerza normal $\mathbf{F}_1$ es perpendicular a la velocidad de P. O sea,

$$W = \int \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_P\, dt = 0$$

Figura 5.7

Tipo 5: $\mathbf{F}_1$ es la fuerza de fricción ejercida en el punto de contacto cuando un cuerpo rígido rueda sobre una superficie fija (Fig. 5.8). Esta vez, la fuerza $\mathbf{F}_1$ (que puede o no ser cero) hace trabajo nulo porque siempre actúa sobre un punto de velocidad cero:

$$W = \int \mathbf{F}_1 \cdot \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_P}}\, dt = 0$$

$\mathbf{v}_P = 0$

Figura 5.8

Tipo 6: $\mathbf{F}_1$ es la fuerza en un resorte lineal conectado a los mismos dos puntos P y Q de los cuerpos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{R}$ durante un intervalo de sus movimientos (Fig. 5.9). Usamos la notación:

- k = módulo del resorte (cuando se multiplica por el alargamiento da la fuerza en el resorte lineal)
- ℓ_u = longitud sin alargamiento
- δ = alargamiento ($\delta < 0$ representa acortamiento)
- $\hat{\mathbf{u}}$ = vector unitario a lo largo del resorte dirigido hacia el cuerpo $\mathcal{B}$

Notemos primero que el trabajo del resorte S sobre el cuerpo $\mathcal{B}$ es

$$W_{S\,\text{en}\,\mathcal{B}} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_P\, dt = \int_{t_1}^{t_2} -k\delta\,\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_P\, dt$$

* El trabajo hecho por *cualquier* fuerza constante F que actúe siempre sobre el mismo punto cuyo vector de posición sea r es entonces: $\mathbf{F} \cdot [\mathbf{r}(t_f) - \mathbf{r}(t_i)]$.

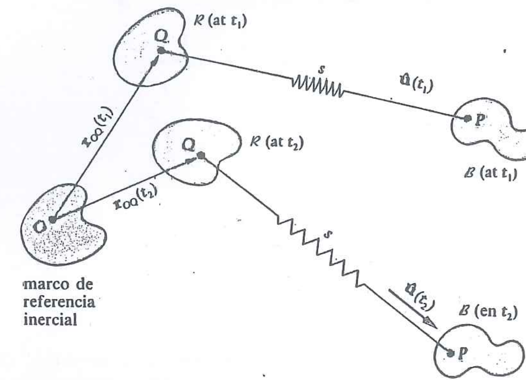


Figura 5.9

Aplicando

$$\mathbf{r}_{OP} = \mathbf{r}_{OQ} + (\ell_u + \delta)\hat{\mathbf{u}}$$

podemos derivar y obtener

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \dot{\delta}\hat{\mathbf{u}} + (\ell_u + \delta)\dot{\hat{\mathbf{u}}}$$

Por consiguiente, sustituyendo $\mathbf{v}_P$,

$$W_{s\,\text{en}\,\mathcal{B}} = \int_{t_1}^{t_2} -k\,\delta\hat{\mathbf{u}} \cdot [\mathbf{v}_Q + \dot{\delta}\hat{\mathbf{u}} + (\ell_u + \delta)\dot{\hat{\mathbf{u}}}]\, dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} k\,\delta\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_Q\, dt - k\int_{t_1}^{t_2} \delta\dot{\delta}\, dt - k\int_{t_1}^{t_2} \delta(\ell_u + \delta)\hat{\mathbf{u}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{u}}}\, dt$$

Como la derivada de un vector unitario es perpendicular al vector en cuestión, la última integral se anula y obtenemos:

$$W_{s\,\text{en}\,\mathcal{B}} = -W_{s\,\text{en}\,\mathcal{R}} - k\int_{\delta_1}^{\delta_2} \delta\, d\delta$$

Luego

$$W_{s\,\text{en}\,\mathcal{B}} + W_{s\,\text{en}\,\mathcal{R}} = W_{s\,\text{en sistema de}(\mathcal{B}+\mathcal{R})} = \frac{k}{2}(\delta_1^2 - \delta_2^2) \tag{5.19}$$

Si Q está fijo en el marco inercial de referencia, el trabajo de S sobre $\mathcal{B}$ únicamente está dado por el lado derecho de (5.19)*; sin embargo, si Q se mueve sólo podemos decir que el trabajo total sobre *ambos* cuerpos efectuado por S está dado por $(k/2)\,(\delta_1^2 - \delta_2^2)$.

*Su trabajo sobre $\mathcal{R}$ es entonces nulo.

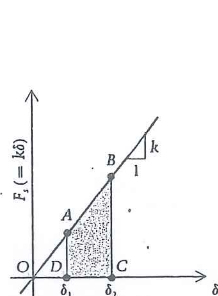
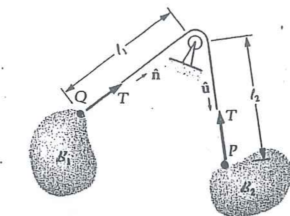


Figura 5.10



$$W_{\text{del cable sobre } \mathcal{B}_1} = \int T\hat{n} \cdot \mathbf{v}_Q dt$$

$$W_{\text{del cable sobre } \mathcal{B}_2} = \int (-T\hat{u}) \cdot \mathbf{v}_P dt$$

Figura 5.11

Observemos en el diagrama "fuerza del resorte contra alargamiento" (Fig. 5.10) que el trabajo efectuado por el resorte es, de hecho, el negativo del cambio en la energía E almacenada en él; al alargarse de δ_1 a δ_2,

$$F = (\text{área del triángulo } OCB) - (\text{área del triángulo } ODA)$$

$$= \frac{k}{2}(\delta_2^2 - \delta_1^2)$$

Tipo 7: Ahora consideramos el trabajo realizado por la fuerza en un cable inextensible unido a dos puntos P y Q de los cuerpos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ durante un intervalo de sus movimientos (Fig. 5.11). El cable en consideración puede pasar sobre una o más poleas ligeras sin fricción colocadas entre los cuerpos, pero se supone que permanece tenso durante todo el movimiento

El trabajo hecho por la tensión del cable sobre el sistema de $\mathcal{B}_1$ *más* $\mathcal{B}_2$ es cero, lo que se muestra a continuación:

Escribimos $\mathbf{v}_Q$ y $\mathbf{v}_P$ en términos de sus componentes paralela y perpendicular a la cuerdao cable:

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_{Q\parallel} + \mathbf{v}_{Q\perp}$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P\parallel} + \mathbf{v}_{P\perp}$$

Notando que las componentes perpendiculares $\mathbf{v}_{Q\perp}$ y $\mathbf{v}_{P\perp}$ tienen productos escalares nulos con $\hat{n}$ y $\hat{u}$, obtenemos para los trabajos de las tensiones:

$$W_{\text{del cable sobre } \mathcal{B}_1} = \int T\hat{n} \cdot \mathbf{v}_{Q\parallel}\, dt = \int T\hat{n} \cdot \frac{d\ell_1}{dt}(-\hat{n})\, dt$$

$$= \int -T\, d\ell_1$$

y

$$W_{\text{del cable sobre } \mathcal{B}_2} = \int (-T\hat{u}) \cdot \mathbf{v}_{P\parallel}\, dt = \int -T\hat{u} \cdot \frac{d\ell_2}{dt}\hat{u}\, dt$$

$$= \int -T\, d\ell_2$$

Pero debido a la inextensibilidad del cable, $d(\ell_1 + \ell_2) = 0$, por lo que $d\ell_2 = -d\ell_1$ y

$$W_{(\text{por el cable sobre } \mathcal{B}_2)} = \int T\, d\ell_1 = -W_{(\text{por el cable sobre } \mathcal{B}_1)}$$

de modo que

$$W_{(\text{por el cable sobre ambos cuerpos})} = 0$$

Tipo 8: Tenemos ahora un par C. En este caso, el trabajo del par en movimiento plano está dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} C\hat{\mathbf{k}} \cdot \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} C\dot{\theta}\, dt \quad \text{o} \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} C\, d\theta \end{aligned} \tag{5.20}$$

Si C es constante, el trabajo del par es

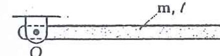
$$W = C(\theta_2 - \theta_1) \tag{5.21}$$

O sea, el trabajo de C es la magnitud del par por el ángulo que gira el cuerpo. Igual que con el trabajo de fuerzas, el trabajo de un par es positivo si "hace mover" en la dirección que actúa (o gira, en este caso).

Ejemplos resueltos por el Principio $W = \Delta T$

Estamos ahora en condiciones de resolver algunos problemas usando el Principio del Trabajo y la Energía Cinética. Siguen algunos ejemplos.

Ejemplo 5.3



Determinare la reacción del pasador en O cuando la barra uniforme ha descendido un ángulo de 45° desde el reposo.

Solución

Primero encontramos la rapidez angular ω_2 en la posición final (45°) usando el Principio del Trabajo y de Energía Cinética $W = \Delta T$

Si T_2 es la energía cinética en la posición final y el trabajo efectuado por la gravedad es $mgh = mg\,[\ell/(2\sqrt{2})]$, se tiene

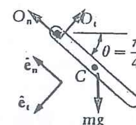
$$mg\frac{\ell}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\overbrace{\left(\frac{1}{3}m\ell^2\right)}^{I_{①} = I_O}\omega_2^2 \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{3g}{\sqrt{2}\ell} \tag{1}$$

Debemos ahora plantear las ecuaciones diferenciales que darán la reacción buscada. (Note que $W = \Delta T$ sólo da la solución para una incógnita escalar.) En la posición final tenemos:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_C$$

Expresando esta ecuación en sus componentes tangencial y normal,

$$\left(O_n - mg\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{e}}_n + \left(mg\frac{1}{\sqrt{2}} - O_t\right)\hat{\mathbf{e}}_t = m\mathbf{a}_C \qquad (2)$$



Pero

$$\mathbf{a}_C = \overset{0}{\cancel{\mathbf{a}_O}} + \alpha\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{OC} - \omega^2\mathbf{r}_{OC}$$

y con $\hat{\mathbf{k}}$ definido como $\hat{\mathbf{e}}_t \times \hat{\mathbf{e}}_n$,

$$\mathbf{a}_C = \frac{\ell}{2}\alpha\hat{\mathbf{e}}_t + \frac{\ell}{2}\omega^2\hat{\mathbf{e}}_n$$

de modo que para la componente según $\hat{\mathbf{e}}_n$ de la Ec. (2),

$$O_n - mg\frac{1}{\sqrt{2}} = m\frac{\ell}{2}\omega_2^2 = m\frac{\ell}{2}\frac{3g}{\sqrt{2}\ell}$$

donde hemos sustituido el valor de ω_2^2 dado por la Ec. (1). Entonces la componente normal de la reacción es

$$O_n = \frac{5}{2\sqrt{2}}mg \qquad (3)$$

Luego, de la componente según $\hat{\mathbf{e}}_t$ de la Ec. (2),

$$mg\frac{1}{\sqrt{2}} - O_t = m\frac{\ell}{2}\alpha \qquad (4)$$

También, como el punto O es un pivote de la barra, sabemos que:

$$\Sigma M_O = I_O\alpha$$

$$\frac{mg}{\sqrt{2}}\frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{3}m\ell^2\right)\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{3g}{2\sqrt{2}\ell} \qquad (5)$$

Sustituyendo de la Ec. (5) en (4) obtenemos la componente tangencial de la reacción:

$$O_t = \frac{mg}{\sqrt{2}} - m\frac{\ell}{2}\frac{3g}{2\sqrt{2}\ell} = \frac{mg}{4\sqrt{2}}$$

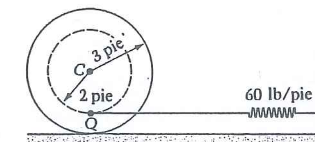
La reacción del pasador es entonces

$$O_n\hat{\mathbf{e}}_n + O_t\hat{\mathbf{e}}_t = \frac{5mg}{2\sqrt{2}}\hat{\mathbf{e}}_n + \frac{mg}{4\sqrt{2}}\hat{\mathbf{e}}_t$$

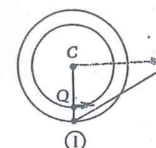
$$= (1.77\hat{\mathbf{e}}_n + 0.177\hat{\mathbf{e}}_t)mg$$

Ejemplo 5.4

Un extremo del resorte lineal indicado en la figura está unido a una cuerda delgada inextensible que se encuentra enrollada ligeramente alrededor de una ranura estrecha de la rueda (masa = 1 slug, radio de giro respecto al centro = 1.5 pie). Si la rueda tiene rodamiento y parte del reposo cuando el resorte está alargado 1 pie, hallar la velocidad del centro de la rueda cuando el centro se ha desplazado 2 pie. El centro de masa de la rueda coincide con el centro geométrico.



Solución



Notemos primero que la cuerda no está unida a ningún punto material específico sobre la rueda. Sin embargo, al pasar el tiempo los diversos "puntos de enrollamiento" en el extremo de la porción recta de la cuerda (como el punto Q en la figura) tienen, en cada instante que la cuerda está tensa, la misma velocidad que el punto coincidente de la rueda en Q. Entonces la Ec. (5.19) da el trabajo efectuado sobre la rueda por el resorte.

Por cinemática se tiene en todo momento (vea la figura):

$$\dot{x}_C = 3\omega \qquad \text{y} \qquad \dot{x}_Q = 1\omega$$

de modo que

$$\dot{x}_C = 3\dot{x}_Q$$

o bien

$$x_C = 3x_Q$$

Entonces el acortamiento neto del resorte cuando C se ha desplazado 2 pie hacia la derecha es de $\frac{2}{3}$ pie; Otra manera de ver esto es dejar que C se mueva hacia la derecha una distancia x_C. Esto comprime el resorte (si fuese capaz de ello) en la misma cantidad x_C. Luego gírese la rueda en sentido horario alrededor de C en un ángulo $\theta = x_C/R = x_C/3$ radianes hasta que el punto correcto esté sobre el suelo. ("Correcto" significa el punto que estaría en el suelo si la rueda hubiese rodado normalmente hacia la posición final). La rotación enrolla una longitud de cuerda $r\theta = 2\theta = 2x_C/3$ alrededor del radio interior y "recupera" $\frac{1}{3}x_C$ de la compresión. Entonces $\frac{2}{3}x_C = \frac{1}{3}(2)$ es la reducción en el tramo de un pie original de alargamiento, dejando $\frac{1}{3}$ pie, igual que antes. Por consiguiente

$$\delta_1 = 1 \text{ pie} \qquad \text{y} \qquad \delta_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ pie}$$

Luego encontramos, observando que la gravedad no trabaja aquí,

$$W = \Delta T = T_2 - \cancelto{0}{T_1}$$

$$\frac{60}{2}\left[(1)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] = \frac{1}{2}(1)v_C^2 + \frac{1}{2}[1(1.5)^2](\underbrace{\omega}_{v_C/3})^2$$

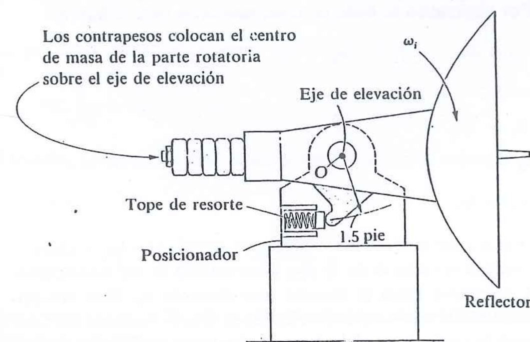
$$v_C = \sqrt{42.7} = 6.53$$

$$v_C = 6.53 \rightarrow \text{pie/s}$$

Notemos que cuando el centro se ha desplazado 3 pie, entonces $\frac{3}{3} = 1 = x_Q$ y todo el alargamiento ha desaparecido. En este momento, el resorte deja de tener importancia en el problema.

Ejemplo 5.5

Este ejemplo contiene una aplicación práctica en la industria de las antenas de lo referente al Principio del Trabajo y la Energía Cinética. El posicionador de la antena en el diagrama está provisto de un resorte que hace las funciones de un tope mecánico, tal que si el mecanismo elevador excede su límite inferior, el movimiento de la antena (rotación pura alrededor del eje horizontal de elevación) será detenido antes de que el reflector golpee otra parte de la instalación y se dañe.



El motor de elevación tiene una armadura rotatoria cuyo momento de inercia es de 0.01 lb · pie · s² (o slug · pie²) e impulsa al reflector a través de un reductor de engranes con relación de 700 : 1. El momento de inercia, I_O, combinado del reflector, de su contrapeso y de la estructura de soporte es de 12 000 slug · pie².

Se desea detener una rapidez rotacional de 30°/s durante un giro de 3° que va del contacto al alto total. El radio desde el eje rotacional de elevación al resorte de frenado es de 1.5 pie. El resorte tiene su longitud natural en el momento de contacto inicial y se puede suponer que tiene un comportamiento lineal carga-deflexión. Se supone además que el motor se para pero se mantiene acoplado mecánicamente durante el proceso de frenado. Determinar:

a. El módulo requerido del resorte.
b. La máxima fuerza inducida en él.
c. La posición rotacional cuando recibe su máxima fuerza.
d. Las aceleraciones angulares del reflector y de la armadura del motor en la posición de máxima fuerza. (¿Son esas las aceleraciones máximas?)

Solución

Como el resorte es lineal su fuerza máxima se evalúa con el módulo del resorte por la deflexión máxima. Esta es también la posición para la cual el movimiento está completamente suspendido. En tal posición la energía cinética se ha vuelto cero y el resorte ha almacenado la energía mecánica; el principio de $W = \Delta T$ da

$$W = \frac{1}{2}k(\cancelto{0}{\delta_i^2} - \delta_f^2) = \Delta T = \frac{1}{2}I_O\cancelto{0}{\omega_f^2} - \frac{1}{2}I_O\omega_i^2$$

Note que el punto O es (I) para el cuerpo en rotación y que la gravedad no trabaja entre el contacto y el alto.

Pregunta 5.3 ¿Por qué no trabaja la gravedad?

Los valores de δ_f, I_O y ω_i requeridos en la ecuación se calculan como sigue:

$$I_O = \text{momento total de inercia en el eje de rotación}$$
$$= I_{(\text{motor})O} + I_{(\text{reflector, contrapeso, estructura})O}$$
$$= 0.01 \times 700^{2*} + 12{,}000 = 16{,}900 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$$

$$\omega_i = 30 \times \frac{\pi}{180} = 0.524 \text{ rad/s}$$

$$\delta_f = 3 \times \frac{\pi}{180} \times 1.5 = 0.0785 \text{ pie}$$

(Nótese que sobre el muy pequeño ángulo de 3° la compresión del resorte es aproximadamente la longitud de arco $R\theta$.)

$$k = \frac{I_O\omega_i^2}{\delta_f^2} = \frac{16{,}900 \times 0.524^2}{0.0785^2}$$
$$= 753{,}000 \text{ lb/pie}$$

*El lector puede demostrar que los momentos de inercia se reflejan a través de un engranaje o tren de engranes, de la entrada a la salida, con la relación de transmisión elevada al cuadrado; el par o momento de rotación se incrementa (mientras que la velocidad disminuye) con un factor dado por la relación de los engranes.

La fuerza máxima en el resorte es $k\delta_f$ = 753 000 × 0.0785 = 59 100 lb. La posición rotacional está 3° más allá del contacto, o sea la posición de alto total. La aceleración angular del reflector es

$$\alpha = \frac{\Sigma M_O}{I_O} = \frac{1.5 \times 59{,}100}{16{,}900} = 5.25 \text{ rad/s}^2$$

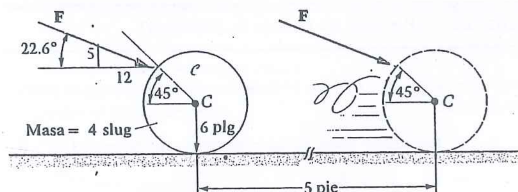
y la de la armadura, 5.25 × 700* = 3680 rad/s².

Estas son las aceleraciones máximas pues aquí la fuerza (y el par) son máximos. Para terminar, adviértase que el par del motor y la fricción, omitidos en este problema para simplificar, limitan el rebote en el caso real.

Ejemplo 5.6

Este ejemplo ilustra el trabajo realizado por fuerzas y pares de los tipos 1, 2 y 8 de las páginas precedentes. La fuerza **F** (52 lb) se aplica al cilindro uniforme $\mathcal{C}$ en reposo de la Fig. 1. (Este tipo de fuerza podría ser aplicado por una cuerda sobre un eje, como se sugiere en la Fig. 2). Si la fuerza **F** continúa actuando con la misma magnitud y dirección conforme el cilindro rueda, determinar:

a. El trabajo realizado por **F** en el tránsito a la posición punteada.
b. La velocidad de C y la velocidad angular del cilindro en la posición punteada.



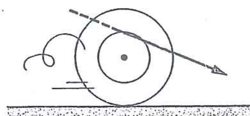


Figura 1

Figura 2

Solución

Resolveremos la parte (a) de dos maneras. Primero, la definición del trabajo de **F** es

$$W = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_Q \, dt$$

en donde Q es el punto de $\mathcal{C}$ en contacto con **F** en cualquier momento. La geometría en la Fig. 3 da un ángulo de 45.1° entre **F** y $\mathbf{v}_Q$ ya que

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r/\sqrt{2}}{r + r/\sqrt{2}}\right) = 22.5°$$

*Véase la nota de página anterior.

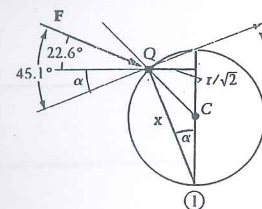


Figura 3

También

$$r_{①Q} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\; r = 1.85r$$

Por tanto

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_Q = F(r_{①Q}\dot{\theta}) \cos 45.1°$$

y

$$W = \int (52 \cos 45.1°) 1.85r \frac{d\theta}{dt} \, dt$$

$$= (52 \cos 45.1°)(1.85) \frac{\theta}{2}\Big]_0^{5/0.5}$$

$$= 340 \text{ pie-lb}$$

Un segundo método más sencillo es notar que **F** en Q puede moverse hacia C, usando el concepto de resultantes, como en la Fig. 4. La fuerza Q se reemplaza por la fuerza y el par en C que producen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido.

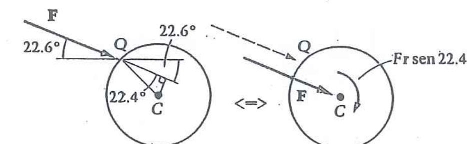


Figura 4

Puesto que en C la fuerza actúa siempre sobre el *mismo punto del cuerpo* (lo que no sucedía en Q) podemos escribir

$$W = \text{trabajo de } \mathbf{F} \text{ en } Q = (\text{trabajo de } \mathbf{F} \text{ en } C) + (\text{trabajo del par sobre } \mathcal{C})$$

$$= (F \cos 22.6°)x_C + (Fr \text{ sen } 22.4°)\,\theta = (0.923\,F)5 + (0.191F)10$$

$$= 6.53F = 340 \text{ pie} \cdot \text{lb (igual que antes)}$$

Nótese que el trabajo de un par constante en movimiento plano es simplemente el momento del par multiplicado por el ángulo girado por el cuerpo.

Para la parte (b) se iguala el trabajo con el cambio en la energía cinética de $\mathcal{C}$:

$$W = \Delta T = \frac{1}{2} m v_{C_f}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega_f^2 - 0 \qquad (T \text{ inicial} = 0)$$

$$340 = \frac{1}{2} 4 v_{C_f}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}\right)\left(\frac{v_{C_f}}{1/2}\right)^2$$

$$v_{C_f} = \sqrt{\frac{340}{2 + 1}} = 10.6 \text{ pie/s}$$

La gravedad, la fricción y las fuerzas normales no trabajan en este problema, por las razones dadas en los tipos 3, 4 y 5 del texto anterior a los ejemplos.

Ejemplo 5.7

La longitud no alargada del resorte en la Fig. 1 es $\ell_u = 0.3$ m. La velocidad angular inicial del cuerpo $\mathcal{A}$ en la cima es $\omega_i = 2.5$ ↻ rad/s. Hay suficiente fricción para impedir el resbalamiento de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{B}$ en todo instante. Determinar el módulo del resorte que ocasionará que $\mathcal{A}$ se detenga en la posición $\varphi = 90°$.

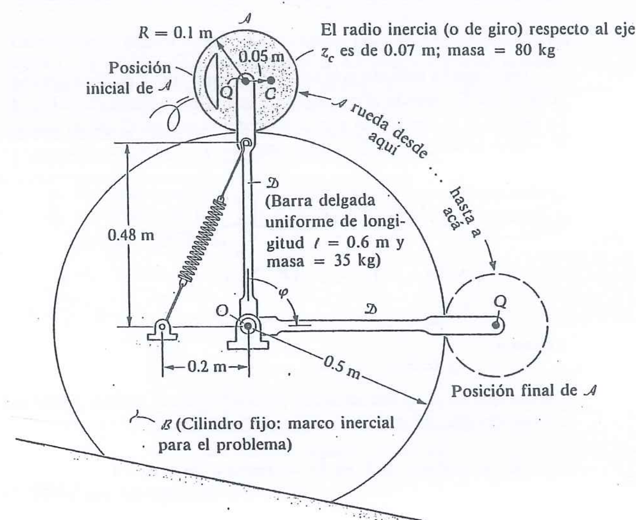


Figura 1

Solución

Parte del trabajo W en este problema es realizado por la gravedad. Para expresar este trabajo debemos determinar dónde se encuentra el centro de masa C cuando $\mathcal{A}$ alcanza su posición final. Por cinemática encontramos que la velocidad del centro geométrico Q de $\mathcal{A}$ es expresable de dos maneras (Fig. 2):

1. Como un punto de $\mathcal{A}$, $\mathbf{v}_Q = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_{Ⓘ}}} + R\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_t$.

2. Como un punto de $\mathcal{D}$, $\mathbf{v}_Q = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_O}} + \ell\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_t$.

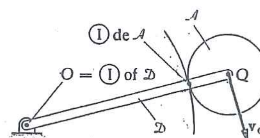


Figura 2

Vemos entonces que $R\dot{\theta} = \ell\dot{\varphi}$. Integrando obtenemos,

$$R\theta = \ell\varphi$$

en donde la constante de integración es cero si escogemos $\theta = 0$ cuando $\varphi = 0$. Por lo tanto cuando $\varphi = \pi/2$, podemos encontrar la orientación del cuerpo $\mathcal{A}$:

θ = ángulo que gira el cuerpo $\mathcal{A}$ en el marco de referencia (que es el de un observador *estacionario* en el cuerpo $\mathcal{B}$)

$$= \frac{\ell}{R}\varphi = \frac{0.6}{0.1} \times \frac{\pi}{2} = 3\pi$$

Entonces la posición final de C es a la izquierda de Q (Fig. 3). Podemos expresar el trabajo de la gravedad W_g porque conocemos ahora el desplazamiento h de C:

$$W_g = (mgh)_{\mathcal{D}} + (mgh)_{\mathcal{A}} = 35(9.81)(0.3) + 80(9.81)(0.6)$$
$$= 574 \ J$$

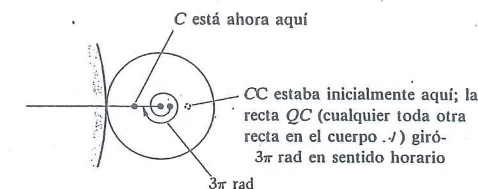


Figura 3

El trabajo efectuado por el resorte lineal está dado *siempre* por $(k/2)(\delta_i^2 - \delta_f^2)$:

$$W_s = \frac{k}{2}(\delta_i^2 - \delta_f^2) = \frac{k}{2}(0.220^2 - 0.380^2)$$
$$= -0.0480k \ \text{J}$$

en donde k es nuestra incógnita y los alargamientos inicial y final se calculan como sigue:

$$\ell_i = \ell_u + \delta_i \quad \text{(longitud no alargada + alargamiento inicial = longitud inicial del resorte)}$$

y

$$\ell_f = \ell_u + \delta_f$$

de manera que los alargamientos son:

$$\delta_i = \sqrt{0.2^2 + 0.48^2} - 0.3 = 0.520 - 0.300 = 0.220 \text{ m}$$

$$\delta_f = (0.48 + 0.2) - 0.3 = 0.680 - 0.300 = 0.380 \text{ m}$$

Para el cálculo de la energía cinética necesitamos los momentos de inercia; primero consideramos el cuerpo $\mathcal{A}$:

$$I_C = mk_C^2 = 80(0.07^2) = 0.392 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Usaremos la "expresión breve" para T, esto es, $T = \frac{1}{2} I_{\textcircled{I}} \omega^2$ (válida siempre que $\omega \neq 0$ en movimiento plano). Necesitamos entonces $I_{\textcircled{I}_i}$ e $I_{\textcircled{I}_f}$*. Nótese que cuando Ⓘ es un punto diferente de un cuerpo en las posiciones inicial y final, el valor de $I_{\textcircled{I}}$ es generalmente distinto en las dos configuraciones, como en este problema.

En $\varphi = 0°$:

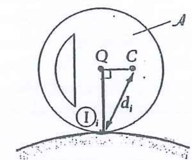


Figura 4

En $\varphi = \pi/2$:

Ⓘ$_i$ está ahora aquí y ya no es el centro instantáneo de $\mathcal{A}$

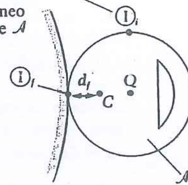


Figura 5

Usando las Figuras 4 y 5,

$$I_{\textcircled{I}_i} = I_C + md_i^2 = 0.392 + 80(0.1^2 + 0.05^2) = 1.39 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{\textcircled{I}_f} = I_C + md_f^2 = 0.392 + 80(0.1 - 0.05)^2 = 0.592 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Las energías cinéticas de $\mathcal{A}$ que necesitamos son

$$T_i^{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} I_{\textcircled{I}_i}\omega_i^2 = \frac{1}{2}(1.39)2.5^2 = 4.34 \text{ J}$$

$$T_f^{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} I_{\textcircled{I}_f}\omega_f^2 = \frac{1}{2}(0.592)0^2 = 0 \text{ J}$$ (pues la velocidad angular final debe ser cero)

Para la barra $\mathcal{B}$, se tiene que $I_{\textcircled{I}}$ es el mismo en cualquier posición por ser Ⓘ el punto O, de articulación en el marco de referencia. Usando $v_Q = R\omega_{\mathcal{A}}$ se obtiene

$$T_i^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} I_{\textcircled{I}}\omega_i^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{3}\right)\left(\frac{v_{Q_i}}{r_{\textcircled{I}Q}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{35 \times 0.6^2}{3}\right)\left(\frac{0.1 \times 2.5}{0.6}\right)^2 = 0.365 \text{ J}$$

$$T_f^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} I_{\textcircled{I}}\omega_f^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{3}\right)\left(\frac{v_{Q_f}}{r_{\textcircled{I}Q}}\right)^2 = 0$$ (puesto que $v_{Q_f} = 0.1\omega_{\mathcal{A}_f} = 0$)

*Ya que $\omega_f = 0$, no tenemos aquí que calcular $I_{\textcircled{I}_f}$ pero lo hacemos para ilustrar el procedimiento en general.

Aplicando el Principio del Trabajo y la Energía Cinética obtenemos,

$$W = \Delta T$$

$$W_g + W_s = T_f - T_i = -T_i$$

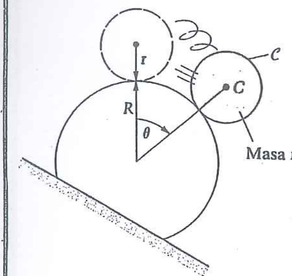
$$574 - 0.0480k = 0 - (4.34 + 0.365)$$

$$k = 12,100 \text{ N/m}$$

Este valor es equivalente a 829 lb/pie de módulo en el sistema de unidades U.S., ya que 1 lb/pie equivale a 14.6 N/m.

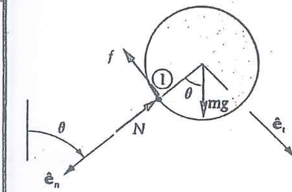
Pregunta 5.4 ¿Qué sucede si k es mayor o menor que el valor calculado?

Ejemplo 5.8



A veces es útil combinar el Principio del Trabajo y la Energía Cinética con una o más ecuaciones diferenciales de movimiento a fin de obtener la solución deseada. Este ejemplo implica tal combinación. El cilindro pequeño $\mathcal{C}$ parte del reposo en $\theta = 0$, en la posición punteada (ver el diagrama) y comienza a rodar sobre el cilindro mayor. Evaluar el ángulo θ_s en el cual se inicia el resbalamiento, y mostrar que el cilindro menor *siempre* deslizará antes de que abandone la superficie si existe un coeficiente de fricción finito.

Solución



De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre mostrado, las ecuaciones de movimiento son

$$\Sigma F_n = mg\cos\theta - N = ma_{C_n} = \frac{mv_C^2}{R+r} = \frac{mr^2\omega^2}{R+r} \quad (1)$$

$$\Sigma F_t = mg \operatorname{sen}\theta - f = ma_{C_t} = m\ddot{s}_C = mr\alpha \quad (2)$$

$$\Sigma M_C = fr = I_C\alpha = \frac{mr^2}{2}\alpha \quad (3)$$

Justamente antes del resbalamiento, la fuerza de fricción $\approx \mu N$ mientras a_C es igual aún a $r\alpha$ y v_C es todavía igual a $r\omega$. Entonces las ecuaciones se pueden escribir como

$$mg\cos\theta_s - N = \frac{mr^2\omega_s^2}{R+r} \quad (1a)$$

$$mg\operatorname{sen}\theta_s - \mu N = mr\alpha_s \quad (2a)$$

$$\mu N r = \frac{mr^2}{2}\alpha_s \quad (3a)$$

Estas ecuaciones pueden suplementarse con la ecuación del trabajo y la energía cinética para el cuerpo $\mathcal{C}_i$, formulada entre $\theta = 0$ y $\theta = \theta_s$:

$$W_g = mg(R + r)(1 - \cos\theta_s) = \frac{1}{2} I_{\textcircled{1}}\omega_s^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\omega_s^2 \qquad (4)$$

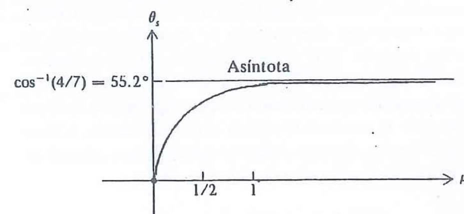
Las Ecs. (1) a (4) contienen cuatro incógnitas: N, θ_s, ω_s^2 y α_s; las tres últimas son el ángulo, la velocidad angular y la aceleración angular, todas ellas en el instante en que comienza el resbalamiento. La solución para determinar θ_s da la ecuación

$$7\mu\cos\theta_s - 4\mu = \operatorname{sen}\theta_s$$

Sustituyendo sen θ_s por $\sqrt{1 - \cos^2\theta_s}$, elevando al cuadrado y resolviendo la ecuación cuadrática resultante en cos θ_s, se obtiene

$$\theta_s = \cos^{-1}\left(\frac{28\mu^2 + \sqrt{33\mu^2 + 1}}{1 + 49\mu^2}\right)$$

cuya gráfica se muestra en el diagrama adjunto.



La curva en el diagrama da el ángulo de resbalamiento en función del coeficiente de fricción; este *no* es el ángulo en que el cuerpo $\mathcal{C}$ deja la superficie. Nótese que si quisiéramos el ángulo en el que el cilindro pequeño sale de la superficie del cilindro grande, suponiendo que no ocurre resbalamiento, estaríamos tratando de resolver un problema sin solución cuando el coeficiente de fricción es finito. La curva muestra claramente que para que $\mathcal{C}$ alcance el ángulo $\cos^{-1}(4/7)$ se requiere un coeficiente de fricción infinito. Puesto que la solución al problema de "dejar la superficie sin resbalamiento" es precisamente $\cos^{-1}(4/7)$, entonces con independencia del coeficiente de fricción (en tanto que sea finito), $\mathcal{C}$ tendrá que deslizar antes de dejar la superficie.

Suponiendo ahora que el cilindro $\mathcal{C}$ deja la superficie sin haber resbalado, obtenemos la solución (más simple):

$$\text{Ec. (1)} \Rightarrow mg\cos\theta_L - \cancel{N}^{\,0 \text{ en la salida}} = \frac{mr^2\omega_L^2}{R + r}$$

$$\text{Ec. (4)} \Rightarrow mg(R + r)(1 - \cos\theta_L) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\omega_L^2$$

Eliminando ω_L se obtiene

$$\theta_L = \cos^{-1}(4/7) = 55.2°$$

Como se ha hecho notar, esta solución sólo es válida para un coeficiente de fricción infinito entre los dos cilindros. Si $\mathcal{C}$ fuede una *partícula* (sin energía cinética rotacional) con superficie lisa, obtendríamos (Ej. 2.13) $\theta_L = \cos^{-1}(2/3) = 48.2°$. adviértase la diferencia entre las dos soluciones.

Dos Subcasos del Principio del Trabajo y la Energía Cinética

Hay un subcaso importante del Principio del Trabajo y la Energía Cinética que ya vimos en el Capítulo 2. Usando

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_C)$$

obtuvimos

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_C\,dt = m\int_{t_1}^{t_2}\dot{\mathbf{v}}_C\cdot\mathbf{v}_C\,dt = \frac{1}{2}mv_C^2\Big]_{v_C(t_1)}^{v_C(t_2)} \qquad (5.22)$$

Este principio establece que el trabajo hecho por la fuerza externa resultante, considerando que actúa en el centro de masa, es igual al cambio en la parte traslacional de la energía cinética:

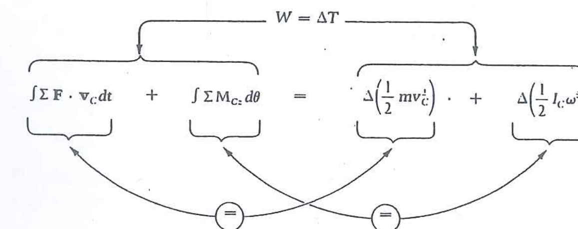
$$\int \Sigma\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_C\,dt = \Delta T_v \qquad (5.23)$$

La integral de la Ec. (5.6) es

$$\int \Sigma\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}_C\,dt + \int \Sigma\mathbf{M}_C\cdot\omega\hat{\mathbf{k}}\,dt = \int\frac{dT}{dt}\,dt = \Delta T = \Delta T_v + \Delta T_\omega \qquad (5.24)$$

Restando (5.23) de (5.24) obtenemos otro resultado más:

$$\int \Sigma\mathbf{M}_C\cdot\omega\hat{\mathbf{k}}\,dt = \Delta T_\omega = \Delta\left(\frac{1}{2}I_C\omega^2\right)$$



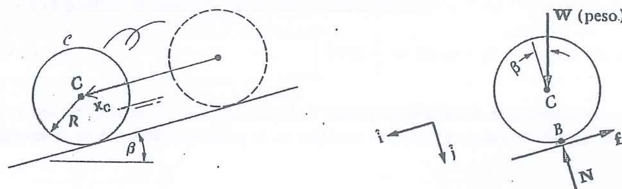
o bien

$$\int \Sigma M_C \, d\theta = \Delta T_\omega \qquad (5.25)$$

Este segundo subprincipio establece que el trabajo efectuado por los momentos externos (respecto a C) sobre el cuerpo, al girar éste en el marco inercial, es igual al cambio en la parte rotacional de la energía cinética. Podemos usar el Principio "total" $W = \Delta T$ o alguna de sus dos "subpartes" (ver el diagrama anterior).

Ejemplo 5.9

Como ilustración de los dos subcasos del Principio del Trabajo y la Energía Cinética se considerá el cilindro de masa m girando hacia abajo en el plano inclinado mostrado en el diagrama. Si el cilindro se libera dede el reposo, encontrar la velocidad v_C de su centro de masa en función de la distancia x_C recorrida por C.



W (peso)

Solución

Vemos en el diagrama de cuerpo libre que las fuerzas normal y de fricción no trabajan porque al rodar el cilindro sobre el plano, siempre actúan sobre un punto en reposo. Esto es,

$$\int \mathbf{N} \cdot \mathbf{v}_B \, dt = 0 \qquad \text{y} \qquad \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_B \, dt = 0$$

Aplicando el principio $W = \Delta T$, vemos que sólo realiza trabajo la componente de la fuerza de gravedad W que actúa paralela al plano:.

$$\int (mg \operatorname{sen}\beta \hat{\imath}) \cdot v_C \hat{\imath} \, dt = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \qquad (1)$$

Puesto que W siempre actúa sobre el mismo punto (C) de $\mathcal{C}$ y como $dx_C/dt = v_C = R\omega$,

$$\int mg \operatorname{sen}\beta \, dx_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mR^2\right)\frac{v_C^2}{R^2} \qquad (2)$$

La velocidad del centro de masa es por lo tanto

$$\mathbf{v}_C = v_C \hat{\imath} = \sqrt{\frac{4g \operatorname{sen}\beta \, x_C}{3}} \, \hat{\imath} \qquad (3)$$

Ahora, si aplicamos la Ec. (5.23):

$$\int \Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_C \, dt = \Delta\left(\frac{1}{2} m v_C^2\right) \qquad (4)$$

En este problema la fuerza resultante que actúa sobre $\mathcal{C}$ es

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{W} + \mathbf{f} + \mathbf{N} = mg(\operatorname{sen}\beta \hat{\imath} + \cos\beta \hat{\jmath}) - f\hat{\imath} - N\hat{\jmath}$$

y la Ec. (4) queda expresada como

$$\int mg \operatorname{sen}\beta \, dx_C - \int f v_C \, dt = \frac{1}{2} m v_C^2 \qquad (5)$$

Vemos que, como era de esperar, la fuerza de fricción (aunque no efectúa un trabajo *neto*) retarda el movimiento del centro de masa C y hace *girar* el cilindro, como puede verse a partir del *otro* subcaso de $W = \Delta T$:

$$\underbrace{\int \Sigma \mathbf{M}_C \cdot \omega \, dt}_{\Sigma M_C \, d\theta} = \Delta \frac{1}{2} I_C \omega^2 \qquad (6)$$

$$\int fR \, d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mR^2\right)\omega^2 \qquad (7)$$

y

$$\int f \frac{d(R\theta)}{dt} \, dt = \int f v_C \, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mR^2\right)\frac{v_C^2}{R^2} \qquad (8)$$

La suma de las Ecs. (5) y (8) da en efecto la Ec. (2): la ecuación del trabajo total $W = \Delta T$.

Energía potencial, fuerzas conservativas y conservación de la energía mecánica total

En la Sección 2.3 introdujimos el concepto de **energía potencial** y **potencial**. Cuando el trabajo efectuado por una fuerza sobre un cuerpo es independiente de la trayectoria seguida por éste al moverse de una configuración a otra, se dice que la fuerza es *conservativa* y el trabajo es expresable como el decremento en una función escalar φ (potencial o de energía potencial). Así cuando un cuerpo se mueve de una configuración en el tiempo t_1 a una segunda configuración en el tiempo t_2, el trabajo efectuado por una fuerza externa conservativa es

$$W = \varphi(t_1) - \varphi(t_2)$$

o simplemente

$$W = \varphi_1 - \varphi_2$$

Si todas las fuerzas externas que realizan trabajo sobre un cuerpo rígido son conservativas y φ es ahora la suma de los potenciales de esas fuerzas, la Ec. (5.15) da

$$\varphi_1 - \varphi_2 = W = \Delta T = T_2 - T_1$$

o bien

$$T_2 + \varphi_2 = T_1 + \varphi_1$$

o bien

$$T + \varphi = \text{constante}$$

que expresa la **conservación de la energía mecánica total**, es decir, la **suma de las energías cinética y potencial.**

En el Capítulo 2 y en partes anteriores a esta sección podemos fácilmente identificar dos fuerzas conservativas comunes: (1) la fuerza constante que actúa siempre sobre el mismo punto material de un cuerpo y (2) la fuerza ejercida sobre un cuerpo por un resorte lineal unido en un extremo al cuerpo y en el otro a un punto fijo en el marco inercial de referencia.

En el caso de la fuerza constante un potencial es $\varphi = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$, en donde r es un vector de posición para el punto de aplicación. Cuando la fuerza es la ejercida por la gravedad (peso) sobre un cuerpo cerca de la superficie de la Tierra,

$$\varphi = mgh$$

en donde h es la altura del centro de masa del cuerpo.

Para el resorte lineal recordemos que $\varphi = (k/2)\ \delta^2$, en que k es el módulo del resorte y es el alargamiento. Es importante observar que cuando un resorte está unido a (o fijado) entre dos cuerpos en movimiento (respecto al marco inercial , entonces $(k/2)\ \delta^2$ es un potencial para las dos fuerzas en el resorte *tomadas en conjunto* (Ec. 5.19); o sea que aunque ninguna de las fuerzas que actúan en los cuerpos es conservativa en sí, el trabajo neto realizado sobre los dos cuerpos por las dos fuerzas, es expresable como un decremento en el potencial, $\varphi = (k/2)\ \delta^2$. Esto es de utilidad en el análisis de problemas en los que se tienen dos o más cuerpos interactuantes. Ya hemos indicado antes en esta sección que el trabajo de las fuerzas *externas* sobre un sistema de cuerpos rígidos no es, en general, igual al cambio en energía cinética del sistema; esto se debe a que puede haber trabajo neto realizado sobre los cuerpos rígidos por las fuerzas iguales y opuestas de interacción. Supongamos que el sistema está formado por dos cuerpos unidos por un resorte, y que las fuerzas en el resorte son las *únicas* fuerzas internas que efectúan trabajo neto sobre el sistema. Podemos entonces escribir $W = \Delta T$ para cada cuerpo rígido. Al sumar esas ecuaciones resulta:

(Trabajo de las fuerzas externas al sistema) + (Trabajo de las dos fuerzas en el resorte)

= (Cambio en la energía cinética del sistema)

Si las fuerzas externas al sistema que efectúan trabajo son conservativas, podemos sumar las energías potenciales asociadas a ellas con las de la pareja de fuerzas que actúan en el resorte y concluir que

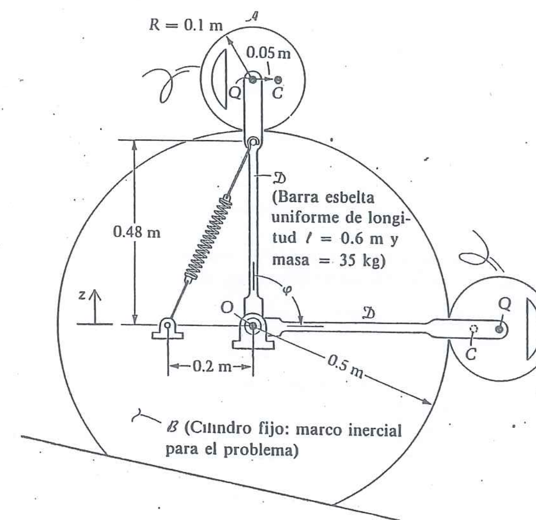
$$T + \varphi = \text{constante.}$$

Lo anterior significa que en este caso la energía mecánica total del *sistema* se conserva.

Un ejemplo de fuerza *no conservativa* es la fricción por resbalamiento. No se puede encontrar un potencial para la fricción ya que el trabajo (negativo) que ésta realiza depende de la trayectoria seguida por el cuerpo sobre el cual actúa. En este caso debe usarse $W = \Delta T$, expresión más general que el Principio de Conservación de la Energía Mecánica.

Ejemplo 5.10

Demuestre que la misma ecuación para el módulo del resorte en el Ejemplo 5.7 se obtiene usando el Principio de la Conservación de la Energía Mecánica. (Vea el diagrama.)



Solución

Los potenciales para la gravedad y el resorte son

$$\varphi_g = +m_{\mathcal{A}} g z_{C_{\mathcal{A}}} + m_{\mathcal{D}} g z_{C_{\mathcal{D}}} \qquad \varphi_{\text{res}} = \frac{k\delta^2}{2}$$

Entonces si medimos z_C desde O se tiene

$$\varphi_{g_i} = +80(9.81)(+0.6) + 35(9.81)(+0.3) \qquad \varphi_{g_f} = -mg(0)$$
$$= +471 + 103$$
$$= +574\ \text{J} \qquad\qquad = 0$$

Para el resorte, usando i y f para las configuraciones inicial y final, se tendrá

$$\varphi_{\text{res}_i} = \frac{k(0.22)^2}{2} = 0.0242k\ \text{J} \qquad \varphi_{\text{res}_f} = \frac{k(0.38)^2}{2} = 0.0722k\ \text{J}$$

Sumando los potenciales ($\varphi = \varphi_g + \varphi_{\text{spr}}$) obtenemos

$$\varphi_i = 574 + 0.0242k\ \text{J} \qquad \varphi_f = 0 + 0.0722k\ \text{J}$$

Las energías cinéticas son $T_i = 4.34 + 0.365 = 4.71$ J y $T_f = 0$.
Por tanto

$$\varphi_i + T_i = \varphi_f + T_f$$

$$574 + 0.0242k + 4.71 = 0.0722k + 0$$

o, reordenando,

$$574 - 0.0480k = -4.71$$

Esta es la misma ecuación final que obtuvimos de $W = \Delta T$ en el Ejemplo 5.7

Problemas / Sección 5.2

5.1 Encuentre la energía cinética del sistema de cuerpos $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$; y $\mathcal{B}_3$ en el instante en que la rapidez de $\mathcal{B}_1$ es de 4 pie/s (Fig.P5.1)

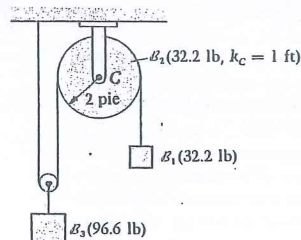


Figura P5.1

5.2 Vea la Fig. P5.2.(a) Explique por qué la fuerza de fricción f no trabaja sobre el cilindro rodante $\mathcal{B}$ si el plano $\mathcal{I}$ es el plano de referencia. (b) Sin embargo si $\mathcal{I}$ es la superficie superior de un bloque móvil (en líneas punteadas) y el marco de referencia es ahora el suelo $\mathcal{G}$, ¿trabaja $\mathcal{B}$ sobre f ¿Por qué o por qué no?

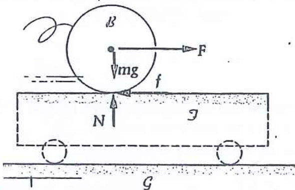


Figura P5.2

5.3 Al aplicar la fuerza F de 10 N a la cuerda en la Fig. 5.3, el cilindro comienza a rodar hacia la derecha. Cuando C se ha desplazado 5 m, ¿cuánto trabajo ha realizado F?

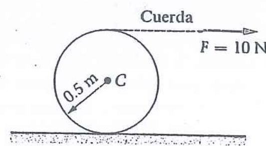


Figura P5.3

5.4 El tronco suspendido en la Fig. P5.4 se usa como ariete. ¿De qué ángulo θ soltarse desde el reposo al tronco para que golpee la puerta en $\theta = 0$ con una velocidad de 25 pie/s?

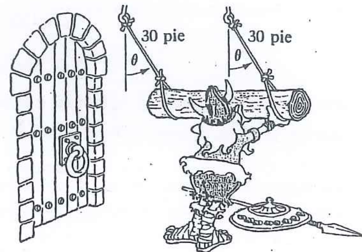


Figura P5.4

5.5 La barra de 20 kg en la Fig. P5.5 tiene una velocidad angular de 3 rad/s horaria en la configuración horizontal mostrada. En esa posición la fuerza de tensión en el resorte es de 30 N. Después de girar 90° en sentido horario, la velocidad angular se ha incrementado a 4 rad/s. Determine el módulo k del resorte.

5.6 Una esfera uniforme de 50lb (radio = 1 pie) se libera desde el reposo en la posición mostrada en la Fig. P5.6. Si

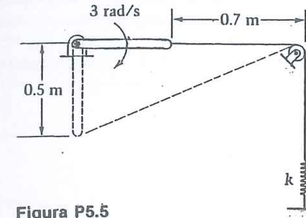


Figura P5.5

la esfera rueda (sin resbalar), encuentre su máxima rapidez angular.

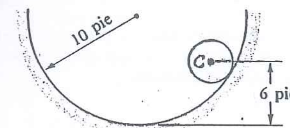


Figura P5.6

5.7 La rueda desbalanceada con radio de 2 pie y peso de 64.4 lb mostrada en la Fig. P5.7, tiene un momento de inercia respecto a su centro de masa de 6 slug · pie². En la posición 1, con C encima de O, la rueda tiene una velocidad angular horaria de 2 rad/s. La rueda pasa luego a la posición 2, donde OC está en posición horizontal. Determine la velocidad angular de la rueda en la posición 2.

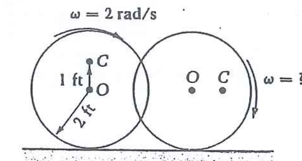


Figura P5.7

5.8 Calcule el módulo del resorte que permitirá a la barra de 2 kg en la Fig. P5.8 llega a la posición $\theta = 90°$ con velocidad angular nula, si pasó por la vertical (donde el resorte tenía un alargamiento de 0.05 m), a 2 rad/s.

5.9 La barra $\mathcal{B}_1$ está articulada sin fricción en el soporte A así como en el punto $\mathcal{B}_2$ al cuerpo B (Fig. P5.9). El extremo D resbala sobre una superficie lisa horizontal. Si D parte del reposo en $\theta = \theta_0$, determine las velocidades angulares de las barras justo antes de que ambas alcancen la posición horizontal.

5.10 El auto prehistórico mostrado en el Fig. P5.10 es impulsado por la piedra descendente m conectada a la rueda

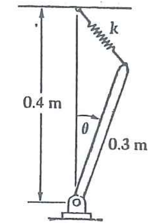


Figura P5.8

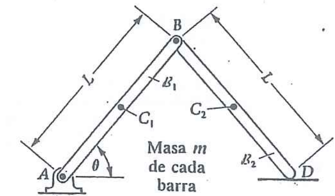


Figura P5.9

principal (cilindro de masa M) por una liana, como se muestra. Si los pesos del mareo, polea y rueda frontal son pequeños comparados con Mg, encuentre la velocidad v_c del carro en función de y, si no hay resbalamiento y el movimiento empieza desde el reposo con $y = O$ en $t = O$. Suponga que m se mueve sólo verticalmente con respecto al mareo del carro.

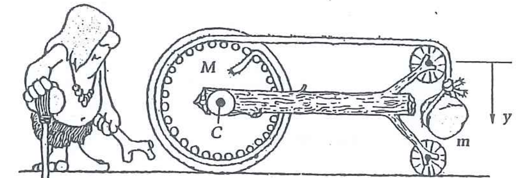


Figura P5.10

5.11 Un carruaje con peso de 4000 lb tiene cuatro ruedas en forma de discos sólidos que ruedan sobre la superficie inclinada (Fig. P5.11). Cada rueda pesa 322 lb y tiene 3 pie

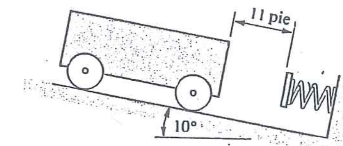


Figura P5.11

de diámetro. El carruaje tiene una velocidad de 5 pie/s en la posición mostrada. Determine el módulo del resorte si el carruaje se detiene al comprimirse el resorte 6 plg.

5.12 Dos barras delgadas OA y AB están soldadas entre sí para formar un cuerpo rígido (Fig. P5.12). Tal cuerpo está articulado al techo en O y se suelta desde el reposo en la posición dada con el resorte sin estirar. Encuentre la velocidad angular del cuerpo cuando OA pasa por primera vez por la posición vertical.

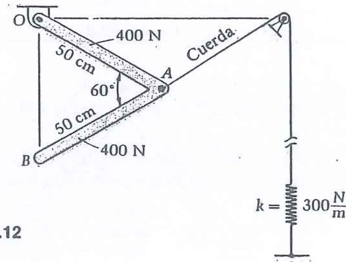


Figura P5.12

Los siguientes cinco problemas deben resolverse consecutivamente.

5.13 Un cilindro con masa de 6 kg tiene aplicada una fuerza de 20 N, como se muestra en la Fig. P5.13. Encuentre la velocidad angular del cilindro cuando ha rodado un ángulo de 90° partiendo desde el reposo.

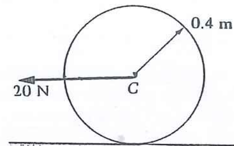


Figura P5.13

5.14 Repita el Problema 5.13 si se corta una ranura en el cilindro y se enrolla una cuerda alrededor de la misma, con la fuerza de 20 N aplicada ahora al extremo de la cuerda, como se muestra en la Fig. P5.14. Desprecie el efecto de la ranura delgada en el momento de inercia del cilindro.

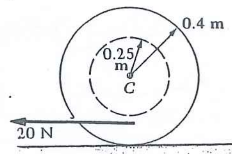


Figura P5.14

5.15 Suponga que en el Problema 5.14 se quita parte del material del cilindro desplazando el centro de masa C del centro geométrico Q, como se muestra en la Fig. P5.15. La remoción reduce la masa a 5.5 kg y el radio de giro con respecto al eje por C normal al plano de la figura, al valor k_c = 0.286 m. Repita el problema.

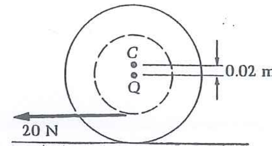


Figura P5.15

5.16 A los datos del Problema 5.15 se agrega un par constante antihorario de 2 N · m, que actúa como muestra la Fig. P5.16. Repita el problema.

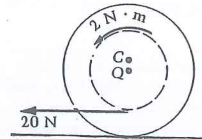


Figura P5.16

5.17 A los datos del Problema 5.16 se agrega un resorte unido a una cuerda enrollada alrededor de una segunda ranura, cerca del borde del cilindro como se muestra en la Fig. P5.17. El resorte tiene un módulo de 6 N/m y está inicialmente estirado 0.2 m. Repita el problema.

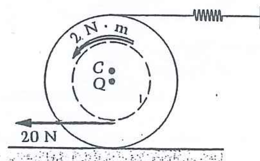


Figura P5.17

5.18 El cilindro de 5 lb en la Fig. P5.18 rueda sobre el plano inclinado. Si la velocidad de su centro de masa C es de 5 pie/s en la posición de partida, encuentre v_C en la posición inferior.

5.19 El resorte en la Fig. P5.19 tiene una longitud no estirada de 0.8 m y un módulo de 60 N/m. La rueda de 20 kg

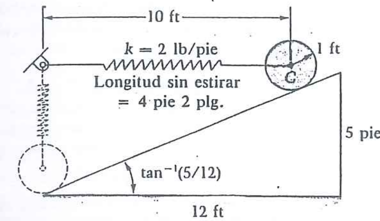


Figura P5.18

se suelta desde el reposo en la posición superior. Encuentre su velocidad angular cuando pasa por la posición inferior punteada si su radio de giro k_C es de 0.2 m.

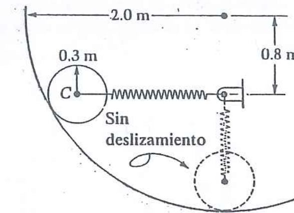


Figura P5.19

5.20 La barra $\mathscr{B}$ en la Fig. P5.20 se encuentra inicialmente en reposo en la posición vertical y en ese instante el resorte no se encuentra estirado. La pared y el piso son lisos. Al punto B se le da un pequeño desplazamiento hacia la derecha desviándose un pequeño ángulo $\Delta\theta$.

a. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la barra ligeramente desplazada y úselo para demostrar que la barra comenzará a resbalar si $k < mg/2\ell$.
b. Encuentre la velocidad angular de $\mathscr{B}$ como función de θ para tal resorte.

5.21 Encuentre el módulo k del resorte que ocasionará que el sistema se detenga momentáneamente en $\theta = 0$ después de soltarse del reposo en $\theta = 50°$ si: (a) el alargamiento inicial δ_i en el resorte es cero; (b) el alargamiento inicial es de 0.2 m (Fig. P5.21). *Sugerencia*: Use la simetría.

5.22 La rueda en la Fig. P5.22 tiene una masa de 5 slug y un radio de giro respecto al eje z que pasa por C, de 0.7 pie. El resorte tiene un módulo de 20 lb/pie y una longitud natural de 4 pie. La rueda se libera desde el reposo y rueda sin resbalar sobre el plano inclinado. Encuentre cuánto se desplazará el centro de masa C.

5.23 La rueda en la Fig. P5.23 pesa 200 N y tiene un radio de giro de 0.3 m respecto al eje z_C. Se suelta desde el reposo con el resorte estirado $\frac{1}{2}$ m. Si no hay resbalamiento, encuentre cuánto se desplaza el centro C del cilindro

a. hacia arriba, y
b. hacia abajo en el movimiento que se establece.

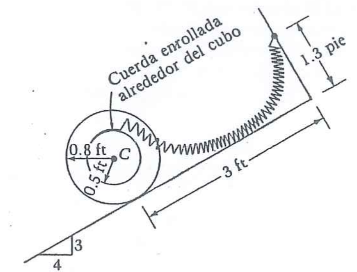


Figura P5.22

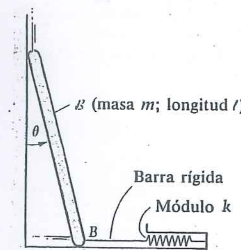


Figura P5.20

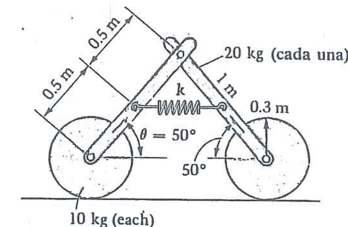


Figura P5.21

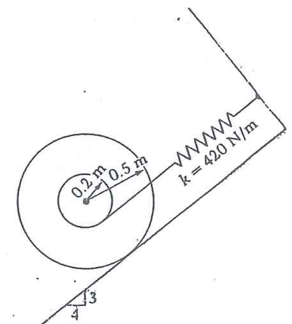


Figura P5.23

5.24 Demuestre que si el cuerpo rodante en el Ejemplo 5.8 es una esfera en vez de un cilindro, resbalará según el ángulo θ_s que satisface la ecuación

$$\mu = \frac{2 \operatorname{sen} \theta_s}{17 \cos \theta_s - 10}$$

5.25 Use $W = \Delta T$ en el Problema 4.97 (b) para encontrar la velocidad de C cuando se ha desplazado 3 m hacia abajo en el plano.

***5.26** En el Problema 4.138 use el Principio del Trabajo y la Energía para obtener un límite superior para la rapidez angular de la barra en su movimiento subsecuente al corte de la cuerda de la derecha.

5.27 Un disco delgado de masa m y radio a está articulado sin fricción en A a una barra delgada de masa $m/2$ y longitud $3a$ (Fig. P5.27). La barra está articulada en B. Si el cuerpo se mantiene en equilibrio en la configuración mostrada y luego se suelta, encuentre la velocidad del punto A cuando el sistema pasa por la vertical.

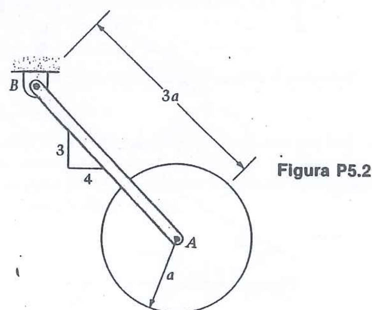


Figura P5.2

5.28 Repita el problema anterior si la articulación en A se reemplaza por soldadura.

5.29 La rueda de 10 lb mostrada en la Fig. P5.29 está unida en su centro a un resorte de módulo igual a 20 lb/plg. El radio de giro de la rueda respecto al centro es de 2.5 plg

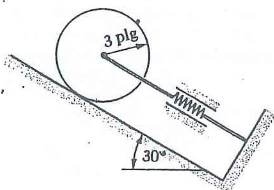


Figura P5.29

*Los asteriscos señalan a los problemas más difíciles.

La rueda parte del reposo y tiene rodamiento con el resorte estirado 1 plg. Encuentre: (a) la magnitud máxima de la fuerza en el resorte; (b) la rapidez máxima del centro de la rueda durante el movimiento que se establece.

5.30 Con los datos del Problema 4.120 use $W = \Delta T$ para encontrar la rapidez $\dot{x}_C$ de la placa en función de la distancia x_C que ha recorrido hacia la derecha. Use el resultado $x_C = x_C(t)$ para verificar su respuesta; derive y elimine t para producir el mismo resultado $\dot{x}_C = \dot{x}_C(x_C)$.

5.31 La Fig. P5.31 muestra una puerta de incendio en el techo de un edificio. La puerta $\mathcal{B}_1$ de 4 pie de ancho, 6 pie de longitud y 4 plg de espesor, es de madera (30 lb/pie^3) y puede girar alrededor de un pasador sin fricción en O. Un brazo $\mathcal{B}_2$ en voladizo, de peso despreciable, está unido rígidamente a la puerta y soporta un peso de 150 lb en su extremo libre. Durante un incendio el eslabón $\mathcal{B}_3$ se derrite y la puerta se abre girando 45°. Calcule la velocidad angular de la puerta justamente antes de que el peso de 150 lb golpee al techo: (a) sin nieve en el techo; (b) con nieve (1 lb/pie^2) sobre el techo.

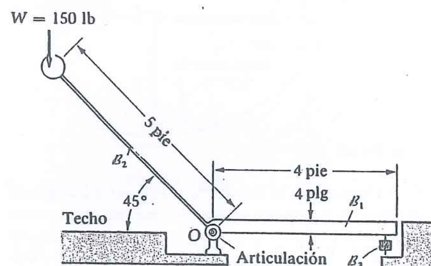


Figura P5.31

5.32 El bloque $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P5.32 se mueve hacia abajo a 5 pie/s en el instante en que el resorte está comprimido 6 plg. El coeficiente de fricción entre el bloque $\mathcal{B}_2$ y el plano es 0.2 y el radio del cilindro $\mathcal{B}_3$ es de 0.5 pie. Los pesos de $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$ son 161, 193 y 322 lb respectivamente.

a. Encuentre la distancia que $\mathcal{B}_1$ cae desde su posición inicial antes de que su velocidad sea nula.
b. Determine si el cuerpo $\mathcal{B}_1$ comenzará o no a moverse de regreso hacia arriba.

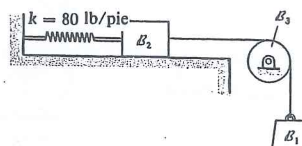


Figura P5.32

5.33 El sistema en la Fig. P5.33 consiste de un cilindro $\mathcal{B}_1$ (100 kg) y de una placa $\mathcal{B}_2$ triangular equilátera (20 kg); ambos están articulados en el centro de masa C_1 del cilindro. Los otros dos vértices de la placa están conectados a resortes; el izquierdo (S_1) permanece vertical en la ranura. (El resorte S_1 se muestra sólo en su posición inicial). Los alargamientos iniciales de los dos resortes (en la posición mostrada) son 0.2 m para S_1 y 0.04 m para S_2. Los módulos son 40 N/m para S_1 y 10 N/m para S_2. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición dada, encuentre la velocidad de C_1 cuando el vértice B alcanza su punto más bajo en la ranura. Considere que hay suficiente fricción para impedir que $\mathcal{B}_1$ resbale sobre el plano. El momento de inercia de una placa triangular equilátera de lado S respecto al eje z_C es $mS^2/12$.

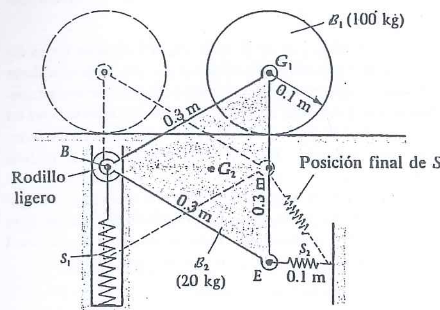


Figura P5.33

5.34 El centro de masa C de una rueda de 2 kg en rodamiento y de radio R = 15 cm, está localizado a 5 cm de su centro geométrico Q (Fig. P5.34). El resorte está unido a C y no se muestra en la posición 2; su longitud natural es de 0.3 m y su módulo de 3 N/m. El radio de giro es $k_C = 0.09$ m. Encuentre la rapidez angular en la posición 2 (un cuarto de vuelta desde la posición 1).

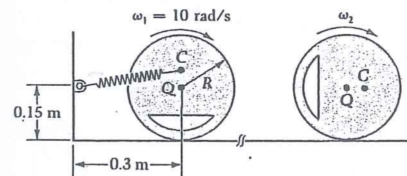


Figura P5.34

***5.35** Las tres barras mostradas en la Fig. P5.35 están articuladas entre sí con vértice también articulado al suelo. La longitud de la barra $\mathcal{B}$ es $2b$ = 0.4 m y la densidad del material de todas las barras es de 7850 kg/m^3. Sus áreas de sección transversal son de 0.002 m^2. Encuentre la velocidad angular del cuerpo combinado cuando ha girado 90° desde el reposo si: (a) $H = 2b$; (b) $H = \sqrt{3}\, b$; (c) $H = b$.

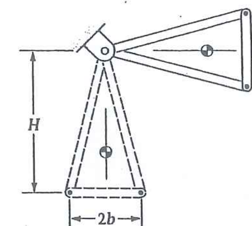


Figura P5.35

5.36 El centro de masa de una placa triangular uniforme está a dos tercios de la distancia desde cualquier vértice al lado opuesto. El momento de inercia de una placa triangular equilátera es $ms^2/12$ con respecto al eje z_C. Para la placa mostrada en la Fig. P5.36, con masa de 30 kg y lado igual a 2 m, encuentre su velocidad angular cuando alcanza la posición punteada, en donde C está abajo de O. El resorte tiene longitud natural de 0.5 m y módulo de 20 N/m; la placa se suelta desde el reposo.

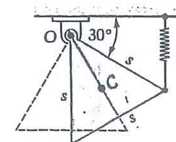


Figura P5. 36

5.37 La barra en la Fig. P5.37 pesa igual (W) que el aro al que se encuentra soldada. El cuerpo combinado se suelta del reposo sobre el plano inclinado en la posición mostrada. Si no hay resbalamiento, determine la velocidad de Q después de una revolución del aro.

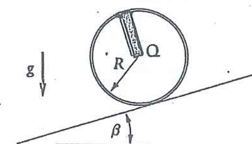


Figura P5.37

5.38 Los cilindros $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en la Fig. P5.38 se sueltan desde el reposo y giran sin resbalar en el punto de contacto. Una cuerda está enrollada alrededor de un cubo en cada cilindro;

los cubos tienen efecto despreciable en el momento de inercia. Hay fricción suficiente para impedir que la cuerda resbale sobre la polea. Encuentre la velocidad del centro de masa de la polea $\mathcal{B}_3$ después de que el cuerpo $\mathcal{B}_4$ ha descendido 10 pie.

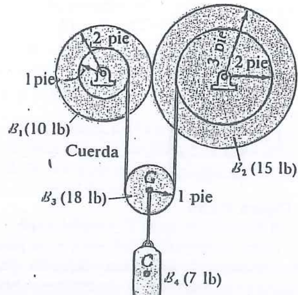


Figura P5.38

5.39 Un cilindro de 5 lb es levantado del reposo por una fuerza P = 20 lb (Fig. P5.39). Encuentre el módulo del resorte que hará que el cilindro se detenga después de que su centro se ha levantado 2 pie. ¿Volverá a bajar? El resorte está inicialmente sin alargamiento.

5.40 El cuerpo $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P5.40 rueda hacia la derecha a lo largo del plano y tiene un radio de giro con respecto a su eje de simetría de k_C = 0.5 m. El correspondiente radio de giro de $\mathcal{B}_2$ es de 0.12 m. El resorte está estirado 0.6 m en el instante en que ω_1 = 5 ⥁ rad/s. Encuentre ω_1 después de que C se ha desplazado 1 m a la derecha. (C_0 es un par aplicado externamente a $\mathcal{B}_1$.)

5.41 El cilindro y el bloque pesan cada uno 100 lb. Están conectados por una cuerda y se sueltan desde el reposo sobre el plano inclinado, como se muestra en la Fig. P5.41. El resorte, conectado al centro C del cilindro, está inicialmente alargado 6 plg. Encuentre la velocidad del bloque en el instante en que el resorte adquiere su longitud natural; hay suficiente fricción entre el plano y el cilindro para impedir que este resbale.

5.42 La rueda $\mathcal{B}_1$ de 20 lb en la Fig. P5.42 tiene un radio de giro de 4 plg con respecto al eje z_C. Un cable enrollado alrededor de su radio interior pasa bajo y sobre dos pequeñas poleas y se une al bloque $\mathcal{B}_2$ de 50 lb. El resorte tiene un módulo de 3 lb/pie y está obligado a permanecer horizontal. Hay suficiente fricción para impedir que $\mathcal{B}_1$ resbale sobre el plano. (a) Si el sistema se suelta desde el reposo, encuentre la rapidez angular de $\mathcal{B}_1$ después que el bloque desciende 1 pie. (b) ¿Sería diferente la respuesta si el bloque $\mathcal{B}_2$ se reemplaza por un mecanismo que mantiene la fuerza en el cable constante a 50 lb? ¿Por qué sí o por qué no?.

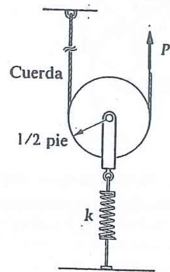


Figura P5.39

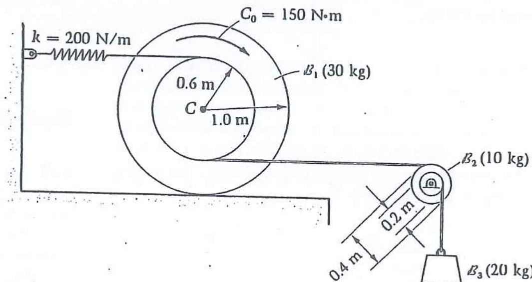


Figura P5.40

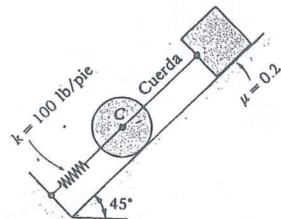


Figura P5.41

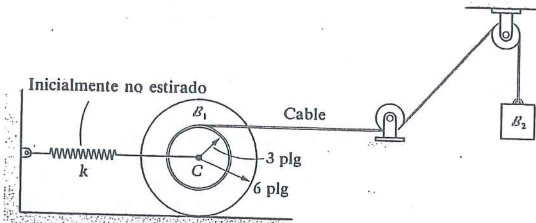


Figura P5.42

* **5.43** La barra $\mathcal{B}_1$ y el disco $\mathcal{B}_2$ en la Fig. P5.43 tienen pesos de W_1 = 5 lb y de W_2 = 6 lb. La longitud de la barra es de 8 plg, el radio del disco es de 4 plg, la excentricidad del centro de masa del disco es de 2 plg desde Q y el radio de giro de la masa de $\mathcal{B}_2$ con respecto al eje z_C es de 3 plg. Se desea conectar un resorte entre el punto Q y un punto fijo de manera que el disco y la barra se detengan (en la posición punteada) después de que $\mathcal{B}_1$ gire 90° en sentido horario a partir del reposo. El resorte tiene un módulo de 25.5 lb/pie y una longitud natural de 4 plg; inicialmente el resorte debe colocarse sin alargamiento. Encuentre el alargamiento final del resorte y con este resultado determine donde conectar el extremo fijo de él. (Hay dos puntos posibles.)

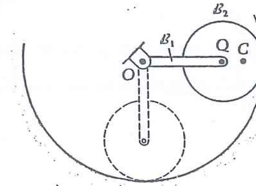


Figura P5.43

5.44 Los cuerpos en la Fig. P5.44 tienen masas m_1 = 0.3 slug, m_2 = 0.5 slug y m_3 despreciable. Un resorte se conecta en A y está estirado 25 plg en la posición punteada cuando todo está en reposo. Encuentre el módulo del resorte si $\omega_{\mathcal{B}_1}$ = 2 ⥁ rad/s cuando $\mathcal{B}_1$ está en posición horizontal.

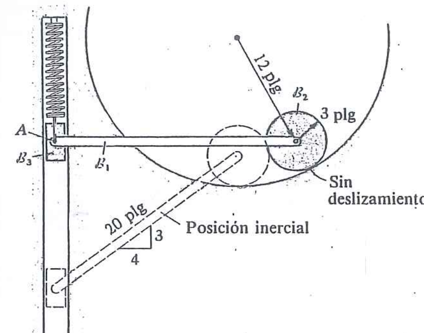


Figura P5.44

5.45 Una barra vertical se encuentra descansando en equilibrio inestable cuando empieza a desplomarse (Fig. P5.45). El extremo A resbala a lo largo de un piso liso. Encuentre la velocidad del centro de masa C en función de L, g y su altura H sobre el piso.

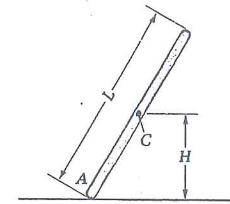


Figura P5.45

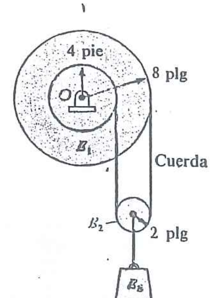


Figura P5.46

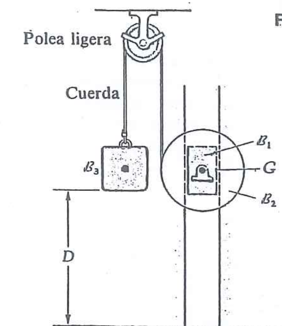


Figura P5.48

5.46 La polea $\mathcal{B}_1$ pesa 100 lb y tiene un radio de giro centroidal k_C = 7 plg (Fig. P5.46). El disco de la polea $\mathcal{B}_2$ pesa 20 lb. Encuentre la velocidad del peso $\mathcal{B}_3$ (50 lb) después de haber descendido 2 pies desde el reposo. (Suponga que la cuerda no resbala sobre las poleas.)

5.47 En el Problema 4.115 determine la velocidad de la esquina B del medio cilindro cuando el diámetro AB está en posición horizontal por primera vez.

5.48 El cuerpo $\mathcal{B}_1$ se traslada en la ranura sin fricción (Fig. P5.48). El disco $\mathcal{B}_2$ (radio R) esta articulado al bloque $\mathcal{B}_1$ en sus centro de masa común en G. El cuerpo $\mathcal{B}_1$ y el cuerpo $\mathcal{B}_2$ tienen masa, cada uno, de m; el cuerpo $\mathcal{B}_3$ tiene masa 2 m. El sistema se suelta desde el reposo a una distancia D sobre el piso. Encuentre: (a) la aceleración inicial de $\mathcal{B}_3$ y G; (b) la velocidad de $\mathcal{B}_3$ cuando éste golpea al piso; úsese $W = \Delta T$.

5.49 La barra $\mathcal{B}_1$ delgada y uniforme pesa 10 lb (Fig. P5.49). La rueda de 15 lb es un disco circular. La superficie horizontal tiene fricción suficiente para impedir el resbalamiento. El resorte en la posición indicada no tiene alargamiento. La barra $\mathcal{B}_1$ se suelta desde el reposo y el bloque ligero $\mathcal{B}_2$ resbala en la ranura lisa. Despreciando la fricción en los pasadores, determine: (a) la velocidad angular de la barra cuando A golpea el resorte con $\mathcal{B}_1$ en posición horizontal; (b) la deformación máxima del resorte. (El módulo k del resorte es de 10 lb/plg.)

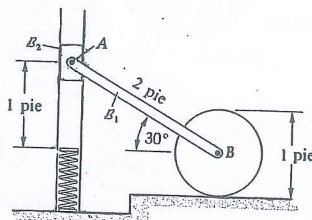


Figura P5.49

5.50 Las masas de cuatro cuerpos se muestran en la Fig. P5.50. El radio de giro de la rueda $\mathcal{B}_4$ con respecto a su eje es k_C = 0.4 m. Inicialmente hay 0.6 m de relajamiento en la cuerda entre $\mathcal{B}_1$ y el resorte lineal. (Módulo k = 1000 N/m, y el resorte está inicialmente sin alargamiento). Determine cuánto descenderá el cuerpo $\mathcal{B}_2$.

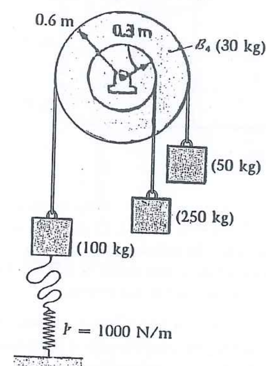


Figura P5.50

5.51 El cilindro $\mathcal{B}$ en la Fig. P5.51 se está desplazando hacia arriba sobre el plano con v_C = 0.3 m/s en el instante en que el resorte tiene un alargamiento de 0.2 m. Si $\mathcal{B}$ no resbala en ningún momento, determine cuánto se desplazará *hacia abajo* el punto C en el movimiento subsecuente. *Nota*: el resorte conectado a la cuerda no puede trabajar en compresión.

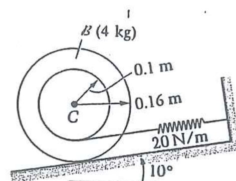


Figura P5.51

5.52 Resuelva el Problema 4.78 para evaluar v_C como función de x_C usando $W = \Delta T$.

5.53 En el Problema 4.60 encuentre la velocidad angular de la barra cuando $\theta = 90°$.

5.54 Resuelva el Problema 4.75 (a) con $W = \Delta T$.

5.55 Resuelva el Problema 4.120 (b) para v_C como función de x_C usando $W = \Delta T$.

*** 5.56** Resuelva el Problema 4.72 con ayuda de $W = \Delta T$. Ignore la sugerencia.

5.57 El radio de giro de la rueda y el cubo $\mathcal{B}$ en la Fig. P5.57 con respecto a su eje de simetría es k_C = 2.5 m. Los resortes están sin alargar en una posición inicial de reposo, cuando se aplica la fuerza de 50 N.

a. Encuentre cuánto se desplaza hacia la derecha el centro de masa en el movimiento que se establece, suponiendo suficiente fricción para impedir el resbalamiento.
b. Cuando $\mathcal{B}$ se detiene instantáneamente en su punto más a la derecha, ¿qué incremento se requiere en la fuerza de 50 N y qué coeficiente mínimo de fricción es necesario para mantenerlo ahí?

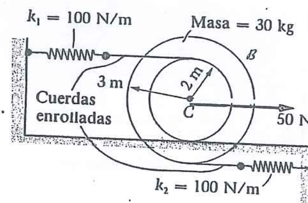


Figura P5.57

5.58 La barra delgada no uniforme en la Fig. P5.58 (masa m y $k_C = L/2$) está sostenida por dos alambres inextensibles. Si la barra se suelta desde el reposo en $\theta = 0$, encuentre la tensión en cada alambre en función de θ.

5.59 El sistema representado en la Fig. P5.59 se suelta desde el reposo con un alargamiento inicial en el resorte de 2 pie. Hay suficiente fricción para impedir el resbalamiento en todo instante. Determine si $\mathcal{B}_1$ dejará la superficie ho-

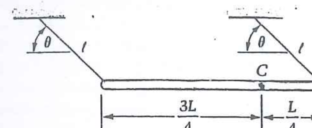


Figura P5.58

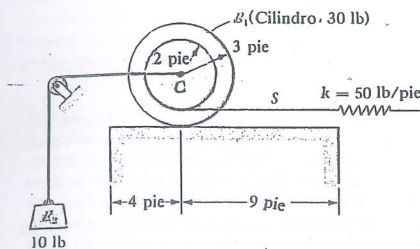


Figura P5.59

rizontal durante el movimiento subsecuente. Note que la cuerda se afloja si el alargamiento en el resorte tiende a volverse negativo.

5.60 El sistema se suelta desde el reposo en la posición mostrada en la Fig. P5.60. La fuerza P es constante e igual a 60 lb y la cuerda está enrollada alrededor del radio interior de $\mathcal{B}_1$. Note que el centro de masa de $\mathcal{B}_1$ está en C. Encuentre la fuerza normal ejercida sobre $\mathcal{B}_1$ por el plano (después de usar $W = \Delta T$ para obtener ω_1) en el instante en que $\mathcal{B}_1$ ha girado 90° ↻. El resorte se encuentra inicialmente sin alargamiento y hay suficiente fricción para impedir el resbalamiento.

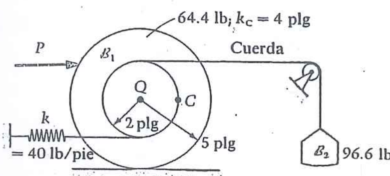


Figura P5.60

5.61 Los dos eslabones idénticos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en la Fig. P5.61, cada uno de masa m y longitud ℓ, están articulados entre sí en A, y $\mathcal{B}_1$ está articulado al suelo en B. El extremo C de $\mathcal{B}_2$ resbala en la ranura vertical. La fricción es despreciable y el sistema se suelta desde el reposo. Encuentre la velocidad del punto C justamente antes de que el punto A alcance su punto más bajo.

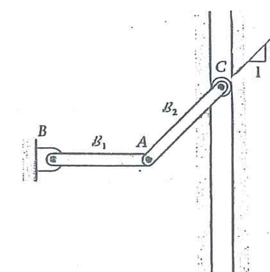


Figura P5.61

5.62 El cuerpo de masa $2m$ en la Fig. P5.62 está compuesto de dos barras idénticas delgadas uniformes soldadas entre sí. Si se desprecia la fricción en la articulación O y el cuerpo se libera desde el reposo en la posición mostrada, encuentre la *magnitud* de la fuerza ejercida sobre la barra por el apoyo cuando el cuerpo ha girado 90°.

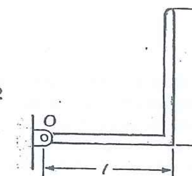


Figura P5.62

5.63 La cuerda conecta el cilindro ranurado $\mathcal{B}_1$ al cilindro $\mathcal{B}_2$, como se muestra en la Fig. P5.63. Suponga que ningún cuerpo resbala después de liberar al sistema del reposo. El resorte está inicialmente libre de alargamiento y es rígido y guiado, de modo que puede tomar compresiones. Encuentre la velocidad angular de $\mathcal{B}_2$ después de que su centro C se ha desplazado 1 m.

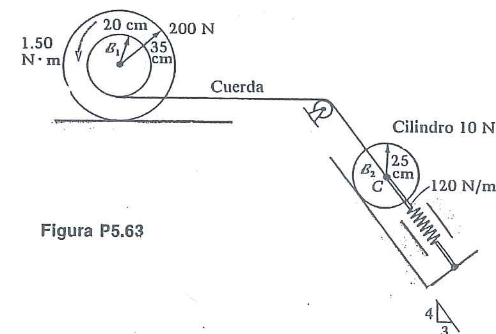


Figura P5.63

5.64 La barra homogénea $\mathcal{B}_1$ de 12 pie y 32.2 lb de peso mostrada en la Fig. P5.64 tiene libertad para moverse sobre las guías horizontal y vertical como se muestra. El módulo del resorte es de 8 lb/pie y éste se encuentra sin alargamiento en la posición mostrada. La barra $\mathcal{B}_1$ se libera del reposo en $\theta = \pi/2$ moviéndola ligeramente para que empiece a moverse. (a) Determine la velocidad angular de la barra cuando alcance la posición horizontal. (b) ¿Cuál es la aceleración angular de la barra en esta posición ($\theta = 0$)?

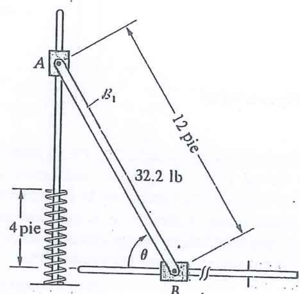


Figura P5.64

5.65 La rueda de 50 kg en la Fig. P5.65 debe considerarse como un cilindro de radio $R = 0.2$ m. Si se encuentra rodando hacia la izquierda con $v_C = 0.07$ m/s en un instante inicial en que el resorte no tiene alargamiento, encuentre: (a) la distancia recorrida por C antes de que v_C sea instantáneamente cero, (b) el coeficiente mínimo de fricción que impida el resbalamiento.

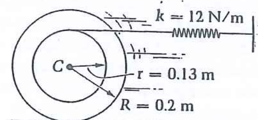


Figura P5.65

5.66 El cilindro en la Fig. P5.66 rueda con $\omega = 2$ ↺ rad/s en la posición inicial (i) cuando el resorte no tiene alargamiento. Los otros datos son:

$m = 2$ slug

$r = 3$ pie

$k = 3$ lb/pie

$\mu = 0.2$

$\ell_u =$ longitud natural del resorte $= 9$ pie

Encuentre la posición final de $C(x_C)$ en la que el cilindro se detiene (por un instante) o bien comienza a resbalar; ¿qué ocurre primero? *Sugerencia*: Suponga un caso y revise el otro.

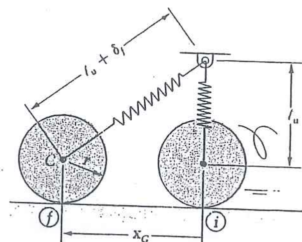


Figura P5.66

5.67 La barra esbelta uniforme en la Fig. P5.67 (masa = 5 slug, longitud = 10 pies) se libera desde el reposo en la posición mostrada. Despreciando la fricción, encuentre la fuerza que el piso ejerce sobre el extremo inferior de la barra cuando el extremo superior está a 6 pie arriba del suelo. *Sugerencia*: Use primero un diagrama de cuerpo libre y las ecuaciones de movimiento para deducir la trayectoria del centro de masa.

5.68 En la Fig. P5.68 los extremos de la barra están obligados a moverse en las ranuras vertical y horizontal sobre rodillos lisos como se muestra. La barra, originalmente vertical, es empujada ligeramente en su extremo inferior para iniciar el movimiento. Encuentre las reacciones sobre la barra en A y B justamente antes de que se encuentre en posición horizontal.

5.69 Una barra delgada uniforme de peso W está articulada sin fricción a un soporte fijo en A y descansa sobre un bloque en B (Fig. P5.69). El bloque se retira súbitamente. Encuentre: (a) la aceleración angular inicial y las componentes de reacción en A; (b) las componentes de reacción en A cuando la barra alcanza la posición horizontal.

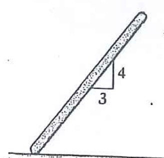


Figura P5.67

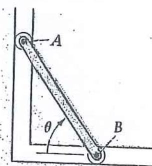


Figura P5.68

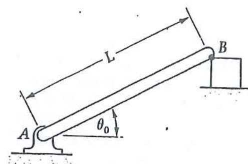


Figura P5.69

5.70 Dos barras en forma de arcos de 90° están articuladas en P y se sueltan desde el reposo en la posición indicada (Fig. P5.70) sobre un plano liso. Encuentre las velocidades angulares de las barras cuando sus centros de masa pasan por sus puntos más bajos. *Sugerencia:* Por simetría el punto P siempre tiene sólo componente vertical de velocidad; esto implica que ninguna barra realiza trabajo sobre la otra, porque (también por simetría) la fuerza entre los elementos tiene sólo componente horizontal normal a la velocidad de P. Más generalmente, en tanto que el pasador sea liso, el trabajo efectuado entre sí por dos cuerpos articulados en movimiento será uno negativo del otro, pues las velocidades serán iguales mientras que las fuerzas serán opuestas.

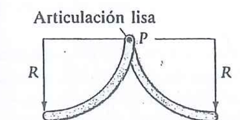


Figura P5.70

* **5.71** Una barra delgada se coloca sobre una mesa como se muestra en la Fig. P5.71. Comenzará a pivotear alrededor del borde E, y a cierto ángulo θ_s, comenzará a resbalar. Halle tal ángulo, que dependerá del coeficiente de fricción μ y de k. *Sugerencia*: Use las tres ecuaciones de movimiento junto con $W = \Delta T$. Elimine α y ω^2 obteniendo expresiones para f y N. La ecuación $f = \mu N$ permite entonces encontrar θ_s. Resuelva la ecuación resultante para $\mu = 0.3$ y $k = 0.25$.

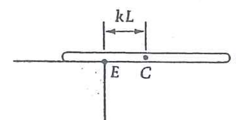


Figura P5.71

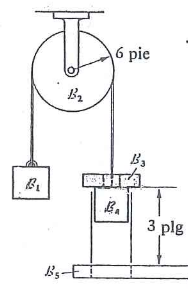


Figura P5.72

* **5.72** El sistema en la Fig. P5.72 consiste del cuerpo $\mathcal{B}_1$ de 12 lb, de la polea (disco) $\mathcal{B}_2$ de 6 lb, de la placa $\mathcal{B}_3$ de 8 lb y del cuerpo $\mathcal{B}_4$ de 10 lb. El sistema se libera desde el reposo en la posición dada. El cuerpo $\mathcal{B}_4$ cae a través de un agujero en la ménsula, $\mathcal{B}_5$ que detiene al cuerpo $\mathcal{B}_3$. Calcule cuánto desciende $\mathcal{B}_4$ desde su posición original.

* **5.73** Verifique que $W = \Delta T$ satisface los resultados del Problema 4.154. Primero note que sólo el par de fricción efectúa un trabajo neto sobre el sistema compuesto de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, y verifique que:

$$W = W_{\text{en } \mathcal{B}_1} + W_{\text{en } \mathcal{B}_2}$$

$$= \int -k(\omega_1 - \omega_2)\omega_1\, dt + \int k(\omega_1 - \omega_2)\omega_2\, dt$$

$$= -k \int (\omega_1 - \omega_2)^2\, dt$$

$$= -46.1 \text{ lb-ft}$$

Luego muestre que un resultado idéntico se obtiene para ΔT:

$$\Delta T = T_f - T_i = T_f^{\mathcal{B}_1} + T_f^{\mathcal{B}_2} - T_i^{\mathcal{B}_1} - \cancelto{0}{T_i^{\mathcal{B}_2}}$$

* **5.74** El cilindro $\mathcal{B}_1$ en la Fig. P5.74 está unido a un resorte y se suelta desde el reposo. Suponga que hay suficiente fricción entre $\mathcal{B}_1$ y el plano para impedir la resbaladura durante el movimiento, y que la ranura alrededor de la cual está enrollada la cuerda tiene un efecto despreciable en el momento de inercia del cilindro. Calcule la velocidad de B cuando la longitud del tramo desenrollado de cuerda está completamente vertical (o sea cuando C tiene todavía que desplazarse 0.3 m para estar directamente sobre E). Suponga también que el peso $\mathcal{B}_2$ se mueve sólo verticalmente, es decir, que la cuerda no empieza a oscilar.

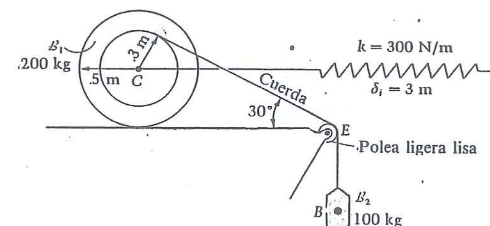


Figura P5.74

5.3 Principios del Impulso y la Cantidad de Movimiento

Ecuaciones del Impulso y la Cantidad de Movimiento (o ímpetu) para el cuerpo rígido en movimiento plano

El Principio del Trabajo y la Energía cinética es muy útil cuando el problema se plantea en términos de posiciones y velocidades. Cuando el tiempo en vez de la posición es la consideración principal, se utilizan con frecuencia dos principios relacionados con los vectores de impulso y de cantidad de movimiento. De la misma manera que $W = \Delta T$, estos principios se obtienen a partir de integraciones generales de las ecuaciones de movimiento, pero la integración es ahora directamente respecto al tiempo, sin primero multiplicar escalarmente las ecuaciones por la velocidad. Esto origina en un conjunto de ecuaciones vectoriales en vez de un simple resultado escalar.

Hemos encontrado uno de los principios de la Sección 2.4 en el estudio del movimiento del centro de masa: El impulso de las fuerzas externas impartido a cualquier sistema es igual a su cambio en la cantidad de movimiento en el mismo intervalo de tiempo. En el Capítulo 2 el sistema era general, por lo que este principio es válido para los cuerpos rígidos que estamos estudiando ahora. De la Ec. (2.30), $\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}$ por lo que

$$\int \Sigma\mathbf{F}\, dt = \int \dot{\mathbf{L}}\, dt = \int d\mathbf{L} = \mathbf{L}\Big]_i^f = \mathbf{L}_f - \mathbf{L}_i = \Delta\mathbf{L} = m\mathbf{v}_{C_f} - m\mathbf{v}_{C_i} \tag{5.26}$$

La integral $\int \Sigma\mathbf{F}dt$ se llama **impulso** (o más concretamente **impulso lineal**) impartido al sistema por las fuerzas externas. El vector $\Delta\mathbf{L}$ es el cambio en la **cantidad de movimiento** (o **ímpetu**) (o más específicamente, **cantidad de movimiento lineal** o **ímpetu lineal**) el sistema entre el tiempo inicial y el final.

Para el cuerpo rígido en movimiento plano necesitamos sólo las componentes x y y de la Ec. (5.26):

$$\int \Sigma F_x\, dt = \Delta L_x = \Delta(m\dot{x}_C) = m\dot{x}_{C_f} - m\dot{x}_{C_i} \tag{5.27}$$

$$\int \Sigma F_y\, dt = \Delta L_y = \Delta(m\dot{y}_C) = m\dot{y}_{C_f} - m\dot{y}_{C_i} \tag{5.28}$$

Existe también un principio análogo para las cantidades angulares. De la Ec. (2.42),

$$\Sigma\mathbf{M}_C = \dot{\mathbf{H}}_C$$

de modo que

$$\int \Sigma\mathbf{M}_C\, dt = \int \dot{\mathbf{H}}_C\, dt = \int d\mathbf{H}_C = \mathbf{H}_C\Big]_i^f = \mathbf{H}_{C_f} - \mathbf{H}_{C_i} = \Delta\mathbf{H}_C \tag{5.29}$$

Esta ecuación puede escribirse en una forma conveniente para cuerpos rígidos en movimiento plano recordando de la Ec. (4.4) para la cantidad de movimiento angular que:

$$\mathbf{H}_C = I_{xz}^C\omega\hat{\mathbf{i}} + I_{yz}^C\omega\hat{\mathbf{j}} + I_{zz}^C\omega\hat{\mathbf{k}}$$

En cuerpos simétricos, para los cuales los productos de inercia desaparecen y $\mathbf{M}_C = \Sigma M_C\hat{\mathbf{k}}$, está ecuación se expresa como

$$\mathbf{H}_C = I_{zz}^C\omega\hat{\mathbf{k}}$$

Por consiguiente,

$$\int \Sigma M_C\hat{\mathbf{k}}\, dt = \Delta\mathbf{H}_C \doteq \Delta(I_{zz}^C\omega\hat{\mathbf{k}})$$

o bien

$$\int \Sigma M_C\, dt = \Delta(I_{zz}^C\omega) = (I_{zz}^C\omega)_f - (I_{zz}^C\omega)_i \tag{5.30}$$

La integral $\int\Sigma M_C$ llama el **impulso angular** impartido al sistema por las fuerzas y pares externos y $\Delta(I_{zz}^C\omega)$ es el cambio en la, **cantidad de movimiento angular** (o **ímpetu angular**), considerando ambos conceptos respecto a C.

Hay un punto sutil pero importante relativo a la Ec. (5.30) que debemos entender aquí. Notemos en la Ec. (5.29) que el impulso angular es igual al cambio en el momento angular para cualquier cuerpo (deformable o rígido); por ello el uso de la Ec. (5.30) sólo requiere que el cuerpo de interés se comporte rígidamente al principio (t_i) y al final (t_f) del intervalo de tiempo (t_i, t_f). En esos instantes la cantidad de movimiento angular es $\mathbf{H}_C = I_{zz}^C\,\omega\hat{\mathbf{k}}$, aunque esta simple expresión para $\mathbf{H}_C$ no se aplique *entre* t_i y t_f. Un buen ejemplo es el de un patinador que recoge sus brazos para incrementar su rapidez angular, como veremos luego en el Ejemplo 5.14.

En resumen, para el cuerpo rígido en movimiento plano tenemos los siguientes dos principios a nuestra disposición:

1. Impulso y cantidad de movimiento lineales:

$$\int \Sigma\mathbf{F}\, dt = \Delta(m\mathbf{v}_C)$$

de donde obtenemos:

$$\text{coeficientes de } \hat{\mathbf{i}}: \quad \int_{t_i}^{t_f} \Sigma F_x\, dt = m(\dot{x}_{C_f} - \dot{x}_{C_i}) \tag{5.31}$$

$$\text{coeficientes de } \hat{\mathbf{j}}: \quad \int_{t_i}^{t_f} \Sigma F_y\, dt = m(\dot{y}_{C_f} - \dot{y}_{C_i}) \tag{5.32}$$

en donde las direcciones de x, y, z están fijas en el marco inercial.

2. Impulso y cantidad de movimiento angulares:

$$\int_{t_i}^{t_f} \Sigma M_{C_z}\, dt = I_{zz_f}^C\omega_f - I_{zz_i}^C\omega_i \tag{5.33}$$

Si los productos de inercia no son cero, se tendrá:

$$\int \Sigma M_{C_x}\, dt = (I_{xz}^C\omega)_f - (I_{xz}^C\omega)_i \tag{5.34}$$

y

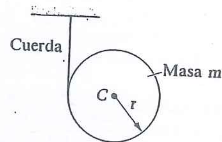
$$\int \Sigma M_{C_y}\, dt = (I_{yz}^C\omega)_f - (I_{yz}^C\omega)_i \tag{5.35}$$

Pregunta 5.5 ¿Son los ejes coordenados asociados a las Ecs. (5.34) y (5.35) los mismos que los de las Ecs. (5.31) y (5.32)?

En el resto de esta Sección trataremos sólo problemas de cuerpos simétricos, para los cuales se aplican las Ecs. (5.31) y (5.33) referentes al impulso y la cantidad de movimiento angulares.

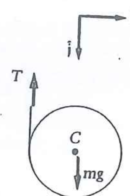
Ejemplo 5.11

Un cilindro tiene una cuerda enrollada (ver el diagrama) y se suelta desde el reposo. Determinar la velocidad de C en función del tiempo.



Solución

Escogemos la convención de signos indicada en el diagrama, ya que el cilindro gira en sentido horario cuando C desciende. Aplicando las ecuaciones de impulso y y cantidad de movimiento angulares en las direcciones y y θ (nótese que $\Sigma F_x = 0$ implica $\ddot{x}_C = 0$ por lo que $\dot{x}_C$ = constante = 0) se obtiene:



$$\int_0^t \Sigma F_y \, dt = m(\dot{y}_{C_f} - \dot{y}_{C_i})$$

$$\int_0^t (mg - T) \, dt = m(\dot{y}_C - 0) \tag{1}$$

$$mgt - \int_0^t T \, dt = m\dot{y}_C$$

y

$$\int_0^t \Sigma M_C \, dt = I_C(\omega_f - \omega_i)$$

$$\int_0^t Tr \, dt = \frac{1}{2} mr^2 \omega_f \tag{2}$$

$$\int_0^t T \, dt = \frac{1}{2} mr\omega_f$$

Notemos que $\int T dt$ es una incógnita en sí y debe tratarse como tal. (En este problema el uso de las ecuaciones de movimiento señalarían que $T = mg/3$, por lo que la integral es de hecho igual a Tt; pero algunas veces T depende del tiempo, en cuyo caso Tt sería un valor incorrecto para la integral.)

Eliminando $\int_0^t T dt$ se obtiene

$$mgt - m\dot{y}_C = \frac{1}{2} mr\omega_f$$

Sin embargo, $\dot{y}_C = r\omega_f$ porque el cilindro rueda sobre la cuerda de manera que

$$gt = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\dot{y}_C$$

lo cual da

$$\dot{y}_C = \frac{2}{3} gt$$

El cilindro cae con "$\frac{2}{3}$ de g" debido al efecto retardador de la fuerza en la cuerda.

Ejemplo 5.12

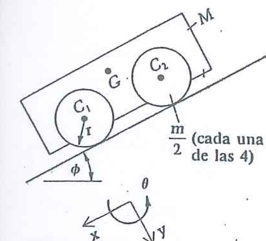


Figura 1

El carro mostrado en la Fig. 1 tiene masa M sin considerar sus cuatro ruedas, cada una de las cuales es un disco con masa $m/2$. Las ruedas delanteras y su eje están conectados rígidamente, y lo mismo sucede con las ruedas traseras. Si los ejes son lisos, calcular la velocidad de G (el centro de masa del carro) en función del tiempo. El sistema parte del reposo. Suponga que hay suficiente fricción para impedir que las ruedas resbalen.

Solución

Primero consideramos el diagrama de cuerpo libre (Fig. 2) de un par de ruedas (las frontales o las traseras). Cómo las ruedas frontales y traseras están obligadas a tener la misma velocidad angular en todo momento, los productos fr (al frente y atrás) deben producir los mismos valores de $I\alpha$'s; por consiguiente, la fuerza de fricción es la misma en las ruedas traseras que en las frontales; y como los centros de masa de las ruedas deben siempre tener velocidades idénticas, las fuerzas que actúan hacia abajo del plano en cada par (al frente y atrás) deben ser iguales también. Esas resultantes son $A_x + mg \operatorname{sen} \phi - f$, por lo que la reacción A_x es también la misma en cada par de ruedas.

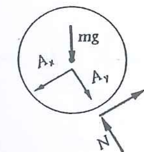


Figura 2

Pregunta 5.6 ¿Son A_y y N también iguales para las ruedas traseras y frontales?

De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre, podemos escribir las siguientes ecuaciones de impulso y cantidad de movimiento (lineal y angular):

$$\int_0^t \Sigma F_x \, dt = m(\dot{x}_{C_f} - \dot{x}_{C_i})$$

$$\int_0^t (A_x + mg \operatorname{sen} \phi - f) \, dt = m\dot{x}_{C_{1 \text{ or } 2}} \tag{1}$$

$$\int_0^t \Sigma M_C\, dt = I_C(\omega_f - \omega_i) = I_C(\omega - 0)$$

$$\int_0^t fr\, dt = \frac{1}{2} mr^2\omega \qquad (2)$$

Podemos también considerar un diagrama de cuerpo libre del carro en traslación (Fig. 3) y escribir sus ecuaciones de impulso y cantidad de movimiento 9lineales) en la dirección x:

$$\int_0^t \Sigma F_x\, dt = M(\dot{x}_{G_f} - \dot{x}_{G_i})$$

$$\int_0^t (-2A_x + Mg \operatorname{sen}\phi)\, dt = M(\dot{x}_G - 0) \qquad (3)$$

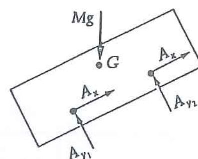


Figura 3

Notemos que C_1 y C_2, los centros de masa de las parejas de ruedas frontales y traseras son también puntos del carro; entonces $\dot{x}_{C1} \equiv \dot{x}_{C2} \equiv \dot{x}_G$. Utilizando esta relación y sumando la Ec. (3) a dos veces la (1), eliminamos el impulso desconocido de la reacción A_x:

$$\int_0^t [(M + 2m)g \operatorname{sen}\phi - 2f]\, dt = (M + 2m)\dot{x}_G{}^* \qquad (4)$$

Igualmente, sumando la Ec (4) a dos veces la (2), resulta una ecuación libre de la fuerza de fricción desconocida:

$$\int_0^t (M + 2m)g \operatorname{sen}\phi\, dt = (M + 2m)\dot{x}_G + m\overbrace{(r\omega)}^{\dot{x}_G}$$

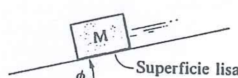


Figura 4

Efectuando la integración y dejando para $\dot{x}_G$ obtenemos

$$\dot{x}_G = \frac{(M + 2m)gt \operatorname{sen}\phi}{M + 3m}$$

Observemos en este resultado que si las ruedas son muy ligeras comparadas con el peso del carro ($m \ll$ M) entonces $\dot{x}_G = gt \operatorname{sen}\phi$, que es la respuesta para el problema de la Fig. 4. Es decir, ruedas ligeras sobre ejes lisos hacen que el carro se mueva como si estuviera sobre un plano liso.

El lector podría examinar el otro caso límite, el del carro ligero con ruedas pesadas ($M \ll m$). En este caso el resultado es, de acuerdo con el diagrama de cuerpo libre de la Fig. 5, $\dot{x}_C = \frac{2}{3} gt \operatorname{sen}\phi$.

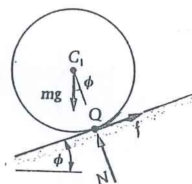


Figura 5

Ejemplo 5.13

La fuerza P actúa sobre el cilindro $\mathcal{C}$ en rodamiento, comenzando en $t = 0$ con $\mathcal{C}$ en reposo (Fig. 1). La fuerza P varía con el tiempo en segundos de acuerdo con:

$$P = 5 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{10}\,\text{N} \quad \text{(positiva hacia la izquierda, como se indica)}$$

*Esta es la ecuación de impulso y cantidad de movimiento lineales para el sistema total (no rígido) de carro más ruedas.

El cilindro $\mathcal{C}$ y el cuerpo $\mathcal{B}$ pesan, respectivamente 100 y 40 N. Obtener la velocidad de G (centro de masa de $\mathcal{B}$,) cuando $t = 10$ s. Se desprecia el efecto de los ejes en la Fig. 2 (y del agujero destinado a recibir a la fuerza P) en el momento de inercia de $\mathcal{C}$.

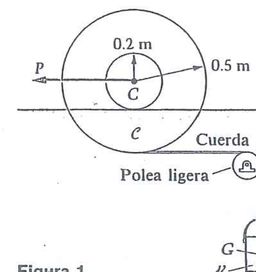


Figura 1

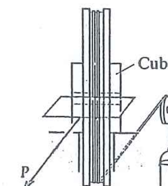


Figura 2

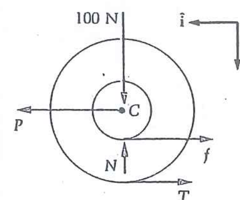


Figura 3a

Solución

Usando los diagramas de cuerpo libre (Figs. 3a, b), podemos escribir las ecuaciones de impulso y cantidad de movimiento. En la Fig. 3a se tiene, sobre $\mathcal{C}$:

$$\int \Sigma F_x\, dt = m\dot{x}_{C_f} - m\dot{x}_{C_i}^{\;0}$$

o bien

$$\int_0^{10} \left(5 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{10} - f - T\right) dt = \frac{100}{9.81}\dot{x}_{C_f} = 10.2\dot{x}_{C_f} \qquad (1)$$

También sobre $\mathcal{C}$:

$$\int \Sigma M_C\, dt = I_C\omega_f - I_C\omega_i^{\;0}$$

o bien

$$\int_0^{10} (0.2f + 0.5T)\, dt = \left[\frac{1}{2}\frac{100}{9.81}(0.5)^2\right]\omega_f = 1.27\omega_f \qquad (2)$$

En la Fig. 3b se tiene, sobre $\mathcal{B}$:

$$\int \Sigma F_y\, dt = m\dot{y}_{G_f} - m\dot{y}_{G_i}^{\;0}$$

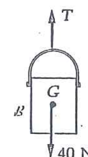


Figura 3b

o bien

$$\int_0^{10} (40 - T)\, dt = \frac{40}{9.81}\dot{y}_{G_f} = 4.08\dot{y}_{G_f} \qquad (3)$$

Restando la Ec. (3) de la (1) obtenemos, después de integrar la función seno,

$$\frac{100}{\pi} - \int_0^{10} f\,dt - 40(10) = 10.2\dot{x}_{C_f} - 4.08\dot{y}_{G_f} \qquad (4)$$

Para obtener otra ecuación independiente que también esté libre de la integral de la tensión T desconocida, sumamos la Ec. (1) a dos veces la Ec. (2):

$$\frac{100}{\pi} - 0.6\int_0^{10} f\,dt = 10.2\dot{x}_{C_f} + 2.54\omega_f \qquad (5)$$

Multiplicando la Ec. (4) por 0.6 y restándola de la Ec. (5), resulta:

$$\frac{40}{\pi} + 240 = 4.08\dot{x}_{C_f} + 2.54\omega_f + 2.45\dot{y}_{G_f} \qquad (6)$$

Por cinemática se relacionan ahora $\dot{x}_{Cf}$, y_{Gf} y ω_f; el punto más bajo de C tiene la misma rapidez que G debido a la inextensibilidad de la cuerda (Fig. 4)

Condiciones cinemáticas:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_{C_f} &= 0.2\omega_f\\ \dot{x}_Q &= 0.3\omega_f\\ \dot{x}_Q &= \dot{y}_{G_f}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\omega_f = 3.33\dot{y}_{G_f}\\ \dot{x}_{C_f} = 0.2\omega_f = 0.667\dot{y}_{G_f}\end{cases}$$

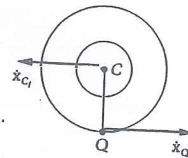


Figura 4

Sustituyendo estos valores en la Ec. (6) se obtiene

$$253 = \dot{y}_{G_f}[4.08(0.667) + 2.54(3.33) + 2.45]$$

$$\dot{y}_{G_f} = \frac{253}{13.6} = 18.6 \text{ m/s}$$

Entonces la velocidad del centro de masa de $\mathcal{B}$ en $t = 10$ s (cuando la fuerza cambia de dirección) es

$$\mathbf{v}_G = 18.6 \downarrow \text{m/s}$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) de este ejemplo son simplemente las primeras integrales de las ecuaciones de movimiento estudiadas en el Capítulo 4.

Conservación de la cantidad de movimiento lineal y angular

Como vimos en la Sección 2.4, si la fuerza en cierta dirección se anula (por ejemplo en la dirección x) en un intervalo de tiempo, entonces el impulso en esa dirección también desaparece:

$$\int_{t_i}^{t_f} \Sigma F_x\,dt = 0$$

Como este impulso es igual al cambio en la cantidad de movimiento en la dirección x, tendremos un cambio nulo cuando $\Sigma F_x \equiv 0$ y entonces la cantidad de movimiento *se conserva* en esa dirección entre t_i y t_f:

$$0 = m(\dot{x}_{C_f} - \dot{x}_{C_i})$$

o bien

$$m\dot{x}_{C_i} = m\dot{x}_{C_f} \qquad (5.36)$$

También se tendrá **conservación de la cantidad de movimiento** en la dirección y (o en cualquier otra) si se anula la fuerza resultante ΣF_y.

Finalmente, si la componente en z de $\Sigma \mathbf{M}_C$ es cero entre t_i y t_f, entonces el impulso *angular* desaparece y se tiene **conservación de la cantidad de movimiento angular:**

$$\int_{t_i}^{t_f} \Sigma M_{Cz}\,dt = 0 = H_{Cz_f} - H_{Cz_i}$$

o bien

$$H_{Cz_i} = H_{Cz_f} \qquad (5.37)$$

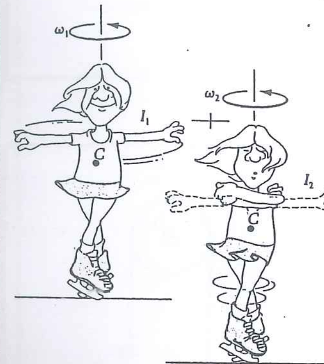
En el movimiento plano de cuerpos simétricos (I_{xz}^C e $I_{yz}^C = 0$) tenemos $\mathbf{H}_C = I_{zz}^C\,\omega\hat{\mathbf{k}}$; no se necesita entonces el subíndice z y la Ec. (5.37) puede escribirse simplemente

$$(I_C\omega)_i = (I_C\omega)_f \qquad (5.38)$$

Veremos ahora un ejemplo bien conocido de la conservación de la cantidad de movimiento angular.

Ejemplo 5.14

Una patinadora gira en círculo alrededor de un punto sobre el hielo (Ver el diagrama) y recoge sus brazos para incrementar su rapidez angular.



a. ¿Se conserva la cantidad de movimiento angular?
b. ¿Se conserva la energía cinética?
c. Explique las ganancias o las pérdidas si las respuestas son no.

Solución

(a). *Antes* de que la patinadora recoja sus brazos, podemos considerarla como un cuerpo rígido para el cual $H_{Ci} = I_1\ \omega_1$. Lo mismo es cierto *después* de que los ha recogido y $H_{Cf} = I_2\ \omega_2$. Si despreciamos el pequeño par de fricción en los patines y los pequeños momen-

tos causados por la resistencia del aire, entonces la respuesta es sí porque $\Sigma \mathbf{M}_C$ es cero entonces. Se tendrá que

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Por consiguiente,

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 > \omega_1 \quad \text{(la rapidez angular crece pues } I_1 > I_2\text{)}$$

(b). Las energías cinéticas son:

$$T_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2\left(\frac{I_1}{I_2}\right) > T_1$$

Entonces la energía cinética *no* se conserva.

(c). Se ve que el cambio de energía cinética es positivo:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \underbrace{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2\left(\frac{I_1}{I_2} - 1\right)}_{> 0 \text{ puesto que } I_1 > I_2}$$

Como las fuerzas y pares externos no han realizado trabajo* es claro que este incremento de energía cinética está acompañado de un decremento en la energía interna del cuerpo de la patinadora, cuando sus músculos trabajan (ningún trabajo externo) al recoger sus brazos (no rígidos). Ya que la energía *total* siempre se conserva (Primera Ley de la Termodinámica), la patinadora ha perdido energía *interna* en el proceso.

Ejemplo 5.15

Dos gimnastas idénticos, L y R, de masa m están en equilibrio colgados de una cuerda estacionaria en la posición mostrada en la Fig. 1. La cuerda pasa sobre la polea $\mathcal{B}$ cuyo momento de inercia con respecto al eje que pasa por O normal a la figura es I. Los gimnastas empiezan a ascender sobre la cuerda con rapideces relativas a ella de $\dot{y}_{L(\text{rel.})}$ hacia arriba y $\dot{y}_{R(\text{rel.})}$ hacia abajo. Cuando el gimnasta R alcanza el extremo de la cuerda, descubre que está a la misma altura de la que partió. ¿Cuánto se ha movido hacia arriba o hacia abajo el gimnasta izquierdo respecto (a) a la cuerda, (b) al suelo?

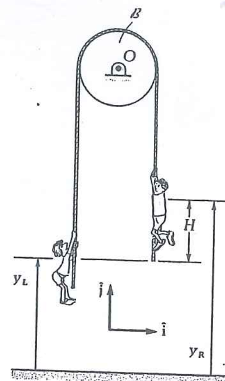


Figura 1

*Excepto posiblemente una pequeña cantidad de trabajo hecho por la gravedad si C cambia ligeramente.

Solución

Si escogemos como sistema a L, R, la cuerda y $\mathcal{B}$, entonces $\Sigma \mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$, conservándose así la cantidad de movimiento angular respecto a O. (Nótese que los momentos de las fuerzas de gravedad respecto a O se cancelan y que las reacciones en el pasador y el peso de $\mathcal{B}$ pasan por O.) Por lo tanto,

$$\mathbf{H}_{Of} = \mathbf{H}_{Oi} = \mathbf{0} \quad \text{(puesto que inicialmente todo está en reposo)} \qquad (1)$$

Después de iniciado el movimiento, el momento angular respecto a O de $\mathcal{B}$ es simplemente $I_O^{\mathcal{B}}\omega_{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{k}}$, ya que O es un pivote de $\mathcal{B}$. Para L y R, la situación es diferente y es necesario analizarla. Los gimnastas no son cuerpos rígidos y recurriremos a la Ec. (2.38) para expresar sus cantidades de movimiento angulares respecto a O. Para L con velocidad $\mathbf{v}_L$ en el marco inercial (el suelo) y centro de masa C_L se tiene

$$\mathbf{H}_O^L = \mathbf{H}_{C_L}^L + \mathbf{r}_{OC_L} \times m\mathbf{v}_{C_L}$$

Suponemos ahora que el gimnasta es una partícula; esto es equivalente a despreciar $\mathbf{H}_{C_L}^L$ (cantidad de movimiento angular del gimnasta respecto a su centro de masa) al compararlo con el término "$\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$". Esta suposición es razonable porque los movimientos del cuerpo que no son de traslación son causados por partes (principalmente por los brazos) en movimiento relativo bastante cercano al centro de masa. Entonces,

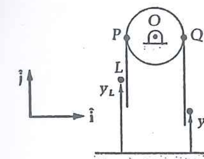


Figura 2

$$\mathbf{H}_O^L \approx \mathbf{r}_{OC_L} \times m\mathbf{v}_L = \mathbf{r}_{OP} \times m\mathbf{v}_L$$

y análogamente

$$\mathbf{H}_O^R \approx \mathbf{r}_{OC_R} \times m\mathbf{v}_R = \mathbf{r}_{OQ} \times m\mathbf{v}_R$$

Pregunta 5.7 ¿Por qué es $\mathbf{r}_{OC_R} \times m\mathbf{v}_R = \mathbf{r}_{OQ} \times m\mathbf{v}_R$?

Si localizamos (Fig. 2) las posiciones de los gimnastas en el espacio con las coordenadas y_L y y_R, se tiene que

$$\mathbf{H}_O^L = \mathbf{r}_{OP} \times m\mathbf{v}_L = -r\hat{\mathbf{i}} \times m\dot{y}_L\hat{\mathbf{j}} = -mr\dot{y}_L\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{H}_O^R = \mathbf{r}_{OQ} \times m\mathbf{v}_R = r\hat{\mathbf{i}} \times m\dot{y}_R\hat{\mathbf{j}} = mr\dot{y}_R\hat{\mathbf{k}}$$

Nótese que si los gimnastas se mueven en direcciones verticales *opuestas* en lados opuestos de la polea, sus cantidades de movimientos angulares respecto a O tendrán la *misma dirección*. Note también que aunque las "partículas" L y R se trasladan en el espacio, tienen cantidades de movimientos angulares respecto a puntos como el O que no se encuentran en su línea de movimiento.

Sustituyendo las tres cantidades de movimientos angulares en la Ec. (1), encontramos:

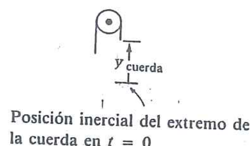
$$\mathbf{H}_{O_f} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H}_O^{\mathcal{B}} + \mathbf{H}_O^L + \mathbf{H}_O^R = \mathbf{0} \qquad (2)$$

$$I\omega_{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{k}} - mr\dot{y}_L\hat{\mathbf{k}} + mr\dot{y}_R\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

Sabemos que la cuerda se mueve en sentido antihorario alrededor de la polea. Por consiguiente, llamando $\dot{y}_{cuerda}$ a su rapidez, tenemos (Fig. 3):

$$\omega_B = \frac{\dot{y}_{cuerda}}{r}; \quad \dot{y}_L = \dot{y}_{L\,rel} - \dot{y}_{cuerda}; \quad y \quad \dot{y}_R = -\dot{y}_{R\,rel} + \dot{y}_{cuerda}$$



Posición inercial del extremo de la cuerda en $t = 0$

Figura 3

Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (2) y simplificando el resultado, obtenemos la ecuación:

$$I\dot{y}_{cuerda} + mr^2(-\dot{y}_{L\,rel} + \dot{y}_{cuerda} - \dot{y}_{R\,rel} + \dot{y}_{cuerda}) = 0 \qquad (3)$$

Integrando

$$(I + 2mr^2)y_{cuerda} - mr^2 y_{L\,rel} - mr^2 y_{R\,rel} = C_1$$

Pero $C_1 = 0$ ya que $y_{cuerda} = y_{L\,rel} = y_{R\,rel} = 0$ en $t = 0$. Ahora en el tiempo en que R está en el extremo de la cuerda $y_{R\,rel} = H$ y $y_{cuerda} = H$, por lo que

$$mr^2 y_{L\,rel} = (I + 2mr^2)H - mr^2H = (I + mr^2)H \Rightarrow y_{L\,rel} = \left(\frac{I + mr^2}{mr^2}\right)H$$

Por lo tanto,

$$y_L = y_{L\,rel} - y_{cuerda} = \left(\frac{I + mr^2}{mr^2}\right)H - H = \frac{I}{mr^2}H$$

El gimnasta L se mueve hacia arriba $\left(\frac{I + mr^2}{mr^2}\right)H$ en relación a la cuerda y $\frac{IH}{mr^2}$ en el espacio a partir de su posición original.

Podemos verificar el Ejemplo 2.18 volviendo a la Ec. (2) del ejemplo precedente y haciendo que $I \to 0$ (nótese que hasta ahora nada se ha dicho acerca de los movimientos relativos):

$$\overset{0}{\cancel{I}}\omega_B - mr\dot{y}_L + mr\dot{y}_R = 0$$

o bien

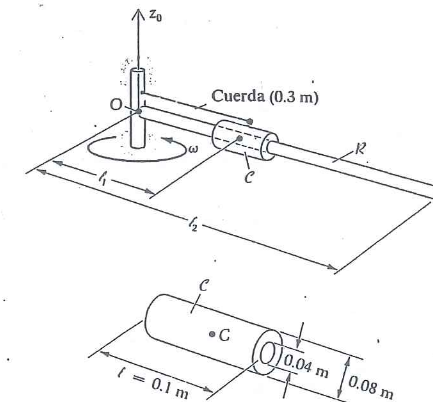
$$\dot{y}_L = \dot{y}_R$$

Por lo tanto, independientemente de los movimientos relativos (con respecto a la cuerda), los dos gimnastas ascienden en el espacio la misma cantidad. El lector puede mostrar que para el problema del Ejemplo 2.18 pero con $I > 0$, el gimnasta de la izquierda es tirado hacia arriba una distancia menor que la altura de ascenso en el espacio del gimnasta de la derecha.

Consideraremos ahora un ejemplo en el que (excepcionalmente) la cantidad de movimiento angular y la energía cinética se conservan.

Ejemplo 5.16

El casquillo $\mathcal{C}$ de 2 kg en el diagrama gira junto con la barra $\mathcal{R}$ de 1 m de longitud y masa de 3 kg, que está montada sobre cojinetes con fricción despreciable. La rapidez angular crece hasta que se rompe la cuerda (su resistencia a la tensión es de 60 N) y en ese instante el momento externo deja de actuar. Determinar la velocidad angular de $\mathcal{R}$ y la velocidad de C (centro de masa de $\mathcal{C}$) cuando el casquillo sale de la barra.



Solución

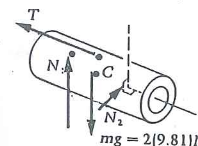
La cuerda proporciona la fuerza que causa la aceleración centrípeta (hacia el interior) hasta que se rompe. Para ese instante calculamos la velocidad angular de $\mathcal{C}$:

$$\Sigma F_n = ma_{C_n}$$

$$T = m\ell_1\omega_1^2$$

$$60 = 2(0.3)\omega_1^2$$

$$\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$$



En el diagrama de cuerpo libre anexo, N_1 y N_2 son las resultantes vertical y horizontal de las presiones sobre la pared interior de $\mathcal{C}$ ejercidas por $\mathcal{R}$.

Cuando la cuerda se rompe en el tiempo t_1, el casquillo $\mathcal{C}$ se desplaza hacia afuera además de girar con $\mathcal{R}$; esto se debe a que ya no hay ninguna fuerza hacia el interior que le impida "salirse por la tangente". Entre los tiempos t_1 y t_2 (cuando abandona a $\mathcal{R}$) tenemos lo siguiente para el sistema ($\mathcal{C}$ más $\mathcal{R}$):

1. Conservación de la cantidad de movimiento angular H_0 respecto a z_0 (porque las fuerzas externas no tienen momento respecto a z_0).

2. Conservación de la energía cinética T (porque no se efectúa trabajo neto sobre el sistema). Nótese que las fuerzas normales entre el casquillo y la barra, iguales en magnitud pero opuestas en dirección, actúan sobre puntos con iguales componentes de velocidad en la dirección de esas fuerzas; por ello su trabajo neto es cero.

La condición 1 da

$$H_{O_i} = H_{O_f}$$

$$H^{\mathcal{C}}_{O_f} = H^{\mathcal{C}}_{C_f} + (\mathbf{r}_{OC} \times m_{\mathcal{C}}\mathbf{v}_{C_f})_z$$

$$\underbrace{I^{\mathcal{C}}_O\omega_i + I^{\mathcal{R}}_O\omega_i}_{\substack{\text{Hasta que la cuerda}\\ \text{se rompe, } O \text{ es un}\\ \text{punto de ambos cuerpos.}}} = I^{\mathcal{R}}_O\omega_f + I^{\mathcal{C}}_C\omega_f + \left[\left(\ell_2 + \frac{\ell}{2}\right)\hat{\mathbf{i}} \times m_{\mathcal{C}}\mathbf{v}_C\right]_z$$

Por tanto

$$\left[\underbrace{m_{\mathcal{C}}\left(\frac{r_i^2 + r_o^2}{4} + \frac{\ell^2}{12}\right)}_{I^{\mathcal{C}}_C = 0.00267} + m_{\mathcal{C}}\ell_1^2\right]10 + \frac{m_{\mathcal{R}}\ell_2^2}{3}\,10 = \frac{m_{\mathcal{R}}\ell_2^2}{3}\,\omega_f + I^{\mathcal{C}}_C\omega_f + \left(\ell_2 + \frac{\ell}{2}\right)^2\omega_f m_{\mathcal{C}}$$

$$(0.00267 + 0.180)10 + \frac{3(1^2)}{3}\,10 = \omega_f + 0.00267\omega_f + (1.05)^2 2\omega_f$$

$$1.83 + 10 = \omega_f(1 + 0.00267 + 2.21)$$

$$\omega_f = 3.69 \text{ rad/s}$$

La componente de $\mathbf{v}_C$ perpendicular a la barra $\mathcal{R}$ es $v_C = 1.05\,\omega_f = 3.87$ m/s. La componente radial la obtenemos a partir de la conservación de la energía cinética (condición 2):

$$\underbrace{\frac{1}{2}I_O\omega_i^2}_{\substack{O \text{ es (I) para } \mathcal{C}\\ \text{y } \mathcal{R} \text{ inicialmente}}} = \frac{1}{2}I^{\mathcal{R}}_O\omega_f^2 + \frac{1}{2}m_{\mathcal{C}}(v^2_{C_\parallel} + v^2_{C_\perp}) + \frac{1}{2}I^{\mathcal{C}}_C\omega_f^2$$

componentes de $\mathbf{v}_C$ paralela y perpendicular a $\mathcal{R}$

$$\tfrac{1}{2}(0.183 + 1)10^2 = \tfrac{1}{2}(1)3.69^2 + \tfrac{1}{2}(2)(v^2_{C_\parallel} + 3.87^2) + \tfrac{1}{2}(0.00267)3.69^2$$

$$59.2 = 6.81 + v^2_{C_\parallel} + 15.0 + 0.0182$$

$$v_{C_\parallel} = 6.11 \text{ m/s}$$

Como la energía cinética inicial era de 59.2 J y como

$$\frac{\tfrac{1}{2}(2)(6.11^2)}{59.2} = 0.631$$

vemos que 63% de la energía original se ha manifestado en movimiento del casquillo hacia el exterior.

Impacto o choque

En la Sección 2.4 estudiamos el impacto o choque de un par de partículas. En esta sección extenderemos el estudio a dos cuerpos en colisión en movimiento plano.

Las grandes fuerzas que se presentan durante el impacto de dos cuerpos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ obviamente deforman a éstos. Debido a las vibraciones y a las deformaciones permanentes que se producen, parte de la energía mecánica se disipará en la colisión. Sin embargo, a menudo es posible tratar un cuerpo como rígido *antes* y nuevamente *después* del impacto para obtener información valiosa. En los problemas de choque o colisión suponemos que:

1. Las velocidades y las velocidades angulares pueden cambiar mucho en el corto intervalo del impacto Δt.
2. Las posiciones de los cuerpos no cambian apreciablemente.
3. Las fuerzas (y momentos) que no aumentan mucho durante el intervalo Δt se desprecian (como las de gravedad y las de resortes). Tales fuerzas se denominan **no impulsivas**; las grandes fuerzas de contacto se llaman **impulsivas**. Son las fuerzas y momentos impulsivos los que producen los cambios repentinos en las velocidades lineales y angulares.

En el Capítulo 2 se introdujo el coeficiente de restitución como medida de la capacidad de los cuerpos en colisión de rebotar entre sí; seguiremos usando este parámetro en esta sección, en donde ahora las velocidades relativas de acercamiento y alejamiento son las de los puntos de impacto de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Necesitaremos entonces la cinemática de cuerpos rígidos para relacionar esas velocidades con las de los centros de masa de los cuerpos. Mencionaremos nuevamente que el coeficiente de restitución e no es la mejor de las propiedades físicas por medir; depende de los materiales, de la geometría y de las velocidades iniciales. Pero en tanto se considera a e con las reservas del y estemos conscientes de sus valores extremos $e = 0$ (los cuerpos se quedan pegados) y e 1 (no hay pérdida de energía), la definición de e proporciona una ecuación aproximada, muy necesaria que permite resolver muchos problemas de impacto. Consideraremos ahora dos formas de la ecuación de impulso y cantidad de movimiento angulares que son aplicables al principio y final del impacto entre cuerpos en movimiento plano que pueden considerarse rígidos, excepto durante la colisión.

Si el cuerpo tiene un pivote O, recordamos que

$$\mathbf{H}_O = I^O_{xz}\omega\hat{\mathbf{i}} + I^O_{yz}\omega\hat{\mathbf{j}} + I^O_{zz}\omega\hat{\mathbf{k}}\cdot$$

Con O fijo en el marco inercial,

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$$

Entonces podemos reemplazar C por O en la Ec. (5.33) de impulso y cantidad de movimiento angulares para tales casos en que se tienen pivotes. La ecuación resultante respecto al eje de rotación es

$$\int_{t_i}^{t_f} \Sigma M_O\,dt = H_{Of} - H_{Oi} = I^O_{zz}(\omega_f - \omega_i)^* \tag{5.39}$$

Esta fórmula tiene un valor considerable en los problemas de impacto porque las reacciones impulsivas en los pivotes no tienen momento respecto a O y por ello no aparecen en la ecuación. Nótese que si $O = C$, la Ec, (5.39) es igual a la Ec. (5.33) escrita respecto al centro de masa.

Otra ecuación útil resulta de

$$\Sigma\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_C + (\mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_C) \tag{5.40}$$

*Enfatizamos nuevamente que la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_O$ (o bien $\mathbf{H}_C$) no es igual a su "forma de cuerpo rígido" $I^O_{zz}\omega\hat{\mathbf{k}}$ (o bien $I^C_{zz}\omega\hat{\mathbf{k}}$) durante el impacto, pero esas sustituciones pueden hacerse en t_i, antes de la colisión, y en t_f después.

En forma escalar está ecuación es

$$\Sigma M_P = I_{zz}^C \alpha + (\mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{a}_C)_z$$

en donde P es un punto arbitrario. Si establecemos que P es ahora un punto fijo O del marco inercial $\mathcal{I}$, podemos integrar esta ecuación y obtener

$$\int_{t_i}^{t_f} \Sigma M_O \, dt = (H_{C_f} - H_{C_i}) + (\mathbf{r}_{OC} \times m\mathbf{v}_C)_z]_i^f$$

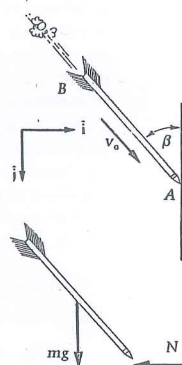
$$= \{I_{zz}^C \omega^* + (\mathbf{r}_{OC} \times m\mathbf{v}_C)_z\}]_i^f \quad (5.41)$$

Pregunta 5.8 ¿Por qué el ladoo derecho no es la integral del segunddo miembro de la Ec. (5.40) si O está en movimiento?

Usaremos ahora estos principios para resolver un par de ejemplos.

Ejemplo 5.17

Una flecha de longitud L viaja con velocidad $\mathbf{v}_0$ y choca contra una pared oblicuamente rígida lisa como muestra la figura. El extremo A no penetra sino que resbala a lo largo de la pared, sin fricción o rebote. Hallar la velocidad angular de la flecha después del impacto.



Solución

La única fuerza impulsiva que actúa sobre la flecha durante su impacto con la pared es la fuerza normal N mostrada en el diagrama de cuerpo libre. Notamos que la fuerza de gravedad en el corto intervalo de tiempo no es impulsiva:

$$\int_{t=0}^{\Delta t} mg \, dt\hat{\mathbf{j}} = mg \, \Delta t\hat{\mathbf{j}}$$

Esto es despreciable en magnitud si Δt es muy pequeño, ya que mg no crece mucho durante el impacto. Para la fuerza normal no es tal el caso ya que

$$\int_{t=0}^{\Delta t} N \, dt(-\hat{\mathbf{i}}) = -N_{\text{prom}} \, \Delta t\hat{\mathbf{i}}$$

y esto no es despreciable, pues N crece "impulsivamente" durante el corto intervalo Δt con un valor promedio N_{prom}. En lo que sigue eliminaremos los subíndices y denotaremos el impulso de $-N\hat{\mathbf{i}}$ como $-N \, \Delta t\hat{\mathbf{i}}$.

La ecuación de impulso y cantidad de movimiento es entonces:

$$-N \, \Delta t\hat{\mathbf{i}} = m(v_{Cx_f} - v_o \operatorname{sen} \beta)\hat{\mathbf{i}} + m(v_{Cy_f} - v_o \cos \beta)\hat{\mathbf{j}}$$

o bien

$$\frac{-N \, \Delta t}{m} = v_{Cx_f} - v_o \operatorname{sen} \beta \quad (1)$$

y

$$v_{Cy_f} = v_o \cos \beta \quad (2)$$

en donde notamos que la cantidad de movimiento se conserva en la dirección y durante el impacto.

El Principio de Impulso y Cantidad de Movimiento Angulares da

$$N \, \Delta t \frac{L}{2} \cos \beta = \frac{mL^2}{12} \omega_f \quad (4)$$

La componente x de $\mathbf{v}_{Af}$ es cero porque no hay rebote. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_C = v_{Cx_f}\hat{\mathbf{i}} + v_{Cy_f}\hat{\mathbf{j}} = v_{Ay_f}\hat{\mathbf{j}} + \omega_f\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_{AC}$$

Usando $\mathbf{r}_{AC} = L/2(-\operatorname{sen} \beta\hat{\mathbf{i}} - \cos \beta\hat{\mathbf{j}})$ encontramos que la componente en x de esta ecuación es:

$$v_{Cx_f} = \frac{L\omega_f}{2} \cos \beta \quad (3)$$

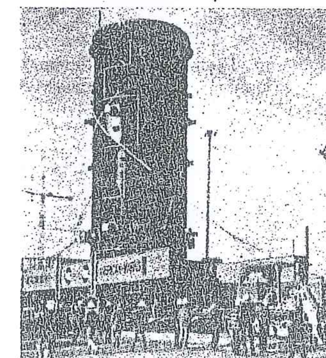
Tenemos cuatro ecuaciones con las incógnitas v_{Cxf}, V_{Cyf}, ω_f y $N \, \Delta t$. Resolviéndolas encontramos que

$$\omega_f = \omega_f\hat{\mathbf{k}} = \frac{6v_o \operatorname{sen} \beta \cos \beta}{L(1 + 3\cos^2 \beta)} \hat{\mathbf{k}}$$

Nótese que un impacto directo ($\beta = \pi/2$) detiene por completo a la flecha con $\omega_f = 0$ y, de la Ec. (4), también $v_{Cxf} = 0$.

Ejemplo 5.18

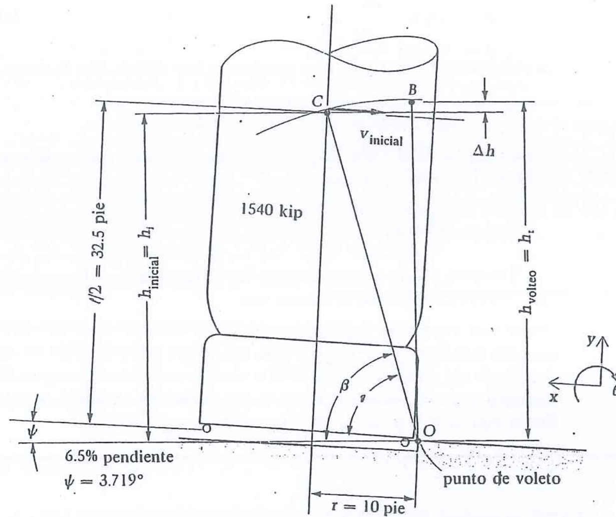
Un recipiente de acero de 770 ton para un reactor nuclear está siento transportado hacia abajo sobre un plano inclinado 6.5% sobre una plataforma arrastrada por tractores (vea la fotografía). Determinar la velocidad máxima con que puede transportarse el reactor sin que se vuelque si llegase a golpear, y pivotear, alrededor de un obstáculo rígido con la arista frontal de la base del recipiente.



(Cortesía de la American Rigging Co.)

Solución

El recipiente $\mathcal{B}$ del reactor se volcará si queda energía cinética después de que pivotee alrededor de la arista frontal O (ver el diagrama) y el centro de masa C alcanza su punto más alto B, directamente sobre O. Se determinará entonces la velocidad que ocasionará que C alcance a B; cualquier velocidad mayor causará el volcamiento.



C = posición del centro de masa en el instante de contacto en O

B = posición del centro de masa en el punto en que no hay regreso

Comenzamos la solución con algunos cálculos geométricos y trigonométricos preliminares basados en el diagrama. Se tiene que 6.5% de pendiente equivale a $\psi = \tan^{-1}(0.065) = 3.719°$.* La altura de volcamiento h_t está dada por la distancia OC:

$$h_t = OC = OB = \sqrt{10^2 + 32.5^2} = 34.00 \text{ pie}$$

También

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{32.5}{10}\right) = 72.90°$$

y

$$\beta = \delta + \psi = 72.90° + 3.72° = 76.62°$$

La altura inicial h_i de C, sobre la línea horizontal que pasa por O, es

$$h_i = (OC)\operatorname{sen}\beta$$

$$= (34.00)\operatorname{sen} 76.62° = 33.08 \text{ pie}$$

*Usamos cuatro cifras significativas en este ejemplo.

y así la distancia vertical que recorrerá C para alcanzar a B es

$$\Delta h = h_t - h_i = 34.00 - 33.08$$

$$= 0.92 \text{ pie}$$

Quedan ahora dos partes principales separadas para la solución de este problema. Primero tenemos que considerar que durante el impacto de $\mathcal{B}$ con el obstáculo en O se pierde energía mecánica; por esto no podemos usar el principio del trabajo y la energía cinética en el breve lapso del impacto. Sin embargo, es aplicable el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular respecto a O. La razón es que las fuerzas impulsivas (en las direcciones x y y) que causan los cambios repentinos en la velocidad del centro de masa $\mathbf{v}_C$ y en la velocidad angular ω, actúan en O, por lo que $\Sigma\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$. Por consiguiente,

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0} = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_O \Rightarrow \mathbf{H}_O = \text{vector constante}$$

o bien

$$\mathbf{H}_{Oi} = \mathbf{H}_{Of} \tag{1}$$

Usaremos la Ec. (2.38) para expresar $\mathbf{H}_{0i}$; esta es la mejor fórmula para $\mathbf{H}_{0i}$ en problemas de traslación, porque entonces $\mathbf{H}_{Ci} = \mathbf{0}$. Sin embargo, para $\mathbf{H}_{of}$ se tiene ω. Como el recipiente no rebota en O, podemos considerar a este punto como fijo tanto en $\mathcal{B}$ como en el marco inercial durante y después del corto lapso del impacto. Esto significa a su vez que $\mathbf{H}_{of}$ es simplemente $I_O\omega_f\hat{\mathbf{k}}$ después del impacto. La Ec. (1) es entonces

$$\overset{0}{\cancel{\mathbf{H}_{Ci}}} + \mathbf{r}_{OC} \times m\mathbf{v}_{Ci} = I_O\omega_f\hat{\mathbf{k}} \tag{2}$$

Como

$$\mathbf{r}_{OC} = +r\hat{\mathbf{i}} + \frac{\ell}{2}\hat{\mathbf{j}} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_{Ci} = -v_{Ci}\hat{\mathbf{i}}$$

el primer miembro de la Ec. (2) es simplemente

$$\frac{\ell}{2}mv_{Ci}\hat{\mathbf{k}} \tag{3}$$

Según el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia se tiene,

$$I_O = I_C + md^2 = m\left[k_C^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + r^2\right]$$

El recipiente es esencialmente un casco grueso; considerando entonces que

$$I_C = mk_C^2 \approx \frac{mr^2}{2} + \frac{m\ell^2}{12} \tag{4}$$

vemos que (5)

$$I_O = \frac{m\ell^2}{3} + \frac{3}{2}mr^2 \tag{5}$$

Sustituyendo las Ecs. (3) y (5) en la (2) obtenemos

$$m\frac{\ell}{2}v_{Ci} = m\left(\frac{\ell^2}{3} + \frac{3}{2}r^2\right)\omega_f$$

y la velocidad angular después del impacto es

$$\omega_f = \frac{3\ell v_{Ci}}{2\ell^2 + 9r^2} \circlearrowright \tag{6}$$

Estamos listos ahora para proceder a la segunda parte de la solución. Entre el principio del pivoteo (inmediatamente después del impacto) y el arribo al punto B, el sistema se analiza fácilmente con el trabajo y la energía cinética:

$$W = \Delta T = T_f - T_i$$

Para obtener el menor valor posible de v_{Ci} para que no haya volteo, hacemos $T_f = 0$. El único trabajo realizado en esta fase del movimiento del recipiente es el de la gravedad, por lo que

$$W = -mg\,\Delta h = 0 - T_i = -\frac{1}{2}I_O\omega_f^2$$

en donde ω_f es ahora una rapidez angular *inicial* para esta etapa final del problema y O es aún un pivote de $\mathcal{B}$. Por lo tanto,

$$-mg\,\Delta h = \frac{1}{2}m\left(\frac{\ell^2}{3} + \frac{3}{2}r^2\right)\left(\frac{3\ell v_{C_i}}{2\ell^2 + 9r^2}\right)^2 \tag{7}$$

o bien

$$v_{Ci} = \sqrt{\frac{4g\,\Delta h(2\ell^2 + 9r^2)}{3\ell^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4(32.17)(0.92)(2 \times 65^2 + 9 \times 10^2)}{3 \times 65^2}}$$

$$= 9.4 \text{ pie/s}$$

Hay varias observaciones que hacer respecto al ejemplo anterior. La primera es que se puede demostrar (con base en un análisis que implique al coeficiente de restitución) que más energía se pierde cuando no hay rebote en O que si tiene lugar el rebote. La pérdida de energía para el caso $e = 0$ (que acabamos de analizar) es

$$\Delta E = T_i - T_f$$

en donde i y f se refieren a los instantes justamente antes y después del impacto. Sustituyendo (para el caso en que no hay rebote) obtenemos

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_{Ci}^2 - \frac{1}{2}I_O\omega_f^2 = \frac{1}{2}m\left[v_{Ci}^2 - \left(\frac{\ell^2}{3} + \frac{3}{2}r^2\right)\left(\frac{3\ell v_{Ci}}{2\ell^2 + 9r^2}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}mv_{Ci}^2\left(1 - \frac{9\ell^2/6}{2\ell^2 + 9r^2}\right)$$

Para $\ell = 65$ pie y $r = 10$ pie, obtenemos

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_{Ci}^2(0.322)$$

Casi un tercio (32.2%) de la energía mecánica original se pierde durante el impacto si no hay rebote en la arista O y sólo se pivotea alrededor de ella. De gran importancia aquí es el hecho de que no *sabemos* cuánto rebote ocurrirá realmente en la situación física, y por consiguiente, cuánta energía se perderá. Esto significa que 9.4 pie/s *puede no ser una respuesta conservadora desde el punto de vista de la ingeniería*, para la rapidez segura. Si el terreno es plano ($\psi = 0$), por ejemplo, se puede demostrar que:

1. La velocidad correspondiente al pivoteo, como en este ejemplo, es de 11.9 pie/s. (Debe pivotear más para que pueda ir más rápido antes del impacto.)
2. A esta velocidad inicial y con un rebote sin pérdida de energía, el recipiente se volcará fácilmente aunque la arista que recibe el impacto retrocederá.

Se puede obtener una velocidad conservadora segura para el recipiente en el plano inclinado suponiendo que no se disipa energía durante el impacto y que toda la energía cinética inicial del recipiente se usa en inclinarlo alrededor de O. Esta consideración da

$$-mg\,\Delta h = -\frac{1}{2}mv_{Ci}^2$$

$$v_{Ci} = \sqrt{2g\,\Delta h} = 7.7 \text{ pie/s}$$

En este caso práctico, los Ingenieros decidieron no exceder una velocidad de 3 pie/s, en vista de la importancia de la obra y de los riesgos implicados.

Fijaremos ahora nuestra atención en un nuevo tópico. Además del centro de masa C existe otro punto especial (pero de mucho menor importancia) de interés asociado a un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento plano, un punto que se diferencia de C en que depende no sólo de la distribución de la masa de $\mathcal{B}$ sino también del movimiento del cuerpo. Este punto se encuentra a lo largo de la resultante de los vectores $m\mathbf{a}$ de todos los elementos de masa del cuerpo; se denomina **centro de percusión** y es de utilidad en ciertas aplicaciones, como en los ensayos de impacto.

Antes de estudiar la teoría relativa al centro de percusión, ilustraremos primero su existencia y mostraremos su utilidad por medio de un ejemplo. Si un joven golpea una pelota de beisbol con un bat y no traslada sus manos demasiado, podemos modelar esta situación como se muestra en la Fig. 5.13 y preguntarnos donde debe golpear la pelota al bat para eliminar la reacción transversal R_y del mismo sobre las manos del joven. Si golpea la pelota en el lugar justo, apenas si sentirá la reacción en sus manos. Suponiendo que el bat es rígido al

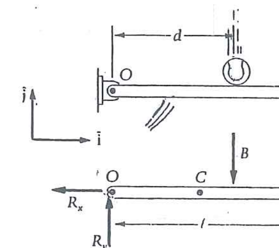


Figura 5.13

principio ($t = 0$) y al final ($t = \Delta t$) del breve lapso de impacto, los dos principios de impulso y cantidad de movimiento (o ímpetu) se usan de la siguiente manera. La ecuación de impulso e ímpetu lineales para el bat en la dirección y es:

$$\int_0^{\Delta t} (R_y - B)\, dt = m(\dot{y}_{C_f} - \dot{y}_{C_i}) \tag{5.42}$$

La ecuación de impulso e ímpetu angulares es

$$\int_0^{\Delta t} -Bd\, dt = I_O(\omega_f - \omega_i) = \frac{m\ell^2}{3}(\omega_f - \omega_i) \tag{5.43}$$

Para que no haya reacción en las manos se toma $R_y = 0$, haciendo $y_c = (\ell/2)\,\omega$ en $t = 0$ y en Δ ; multiplicando la Ec. (5.42) por d se obtiene

$$-\int_0^{\Delta t} Bd\, dt = \frac{md\ell}{2}(\omega_f - \omega_i) \tag{5.44}$$

Dividiendo la Ec. (5.44) entre la (5.43) resulta

$$1 = \frac{d}{2} \div \frac{\ell}{3} \Rightarrow d = \frac{2}{3}\ell$$

Entonces si la pelota golpea al bat a dos tercios de la distancia de O al extremo del tolete, la reacción transversal será cero.

En este ejemplo el punto en el que el bat es golpeado (a $d = 2\ell/3$) por la pelota, es el centro de percusión. Para demostrar esto, por lo menos para el caso en que el bat es rígido, recordamos que en el Capítulo 2 vimos que para *cualquier* punto P (en movimiento o no, fijo en $\mathcal{B}$ o no) siempre podemos escribir

$$\Sigma \mathbf{M}_P = \int \mathbf{R} \times \mathbf{a}\, dm$$

en donde $\mathbf{R}$ es el vector de posición desde el punto P a un elemento diferencial de masa. Como la integral de los vectores ($\mathbf{R} \times \mathbf{a}\, dm$) sobre el cuerpo representa de hecho el momento resultante respecto a P de los vectores $m\mathbf{a}$ sobre la masa de $\mathcal{B}$, esta integral desaparece para todos los puntos P^* que estén sobre la recta en la cual se encuentra la resultante de los vectores $m\mathbf{a}$ y, por consiguiente, $\Sigma \mathbf{M}_{P^*} = \mathbf{0}$ para esos puntos.

Sabiendo que $\Sigma \mathbf{M}_{P^*} = 0$ para el centro de percusión, podemos ahora deducir la ecuación general para la distancia de un pivote O al centro de percusión P^* en el movimiento plano (Fig. 5.14):

$$\Sigma M_O = \overset{0}{\Sigma M_{P^*}} + (\mathbf{r}_{OP^*} \times \overset{ma_C}{\Sigma \mathbf{F}})_z$$

$$\alpha(I_C + m r_{OC}^2) = r_{OP^*} m (r_{OC}\alpha)$$

$$m k_C^2 + m r_{OC}^2 = m r_{OP^*} r_{OC}$$

Por tanto

$$r_{OP^*} = r_{OC} + \frac{k_C^2}{r_{OC}} \tag{5.45}$$

y vemos que para el bat

$$r_{OP^*} = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell^2/12}{\ell/2} = \frac{2}{3}\ell \quad \text{(igual que antes)}$$

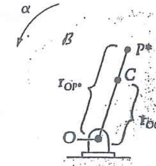


Figura 5.14

Nótese de la Ec. (5.45) que el centro de percusión está siempre más alejado del pivote que el centro de masa. Haremos una observación final sobre el centro de percusión. Si consideramos los elementos $\mathbf{a}dm$ de $\mathcal{B}$ como un conjunto de vectores, su resultante puede expresarse (para un cuerpo rígido en movimiento plano) en el centro de masa (Fig. 5.15), donde

$$\int \mathbf{a}\, dm = m\mathbf{a}_C$$

$$\int \mathbf{r} \times \mathbf{a}\, dm = \Sigma \mathbf{M}_C = I_C \alpha \hat{\mathbf{k}}$$

De manera idéntica a como se reduce una fuerza y un par a su forma más simple, podemos reducir esta resultante de los vectores $m\mathbf{a}$, como se muestra en la Fig. 5.16, donde la distancia D es $I_C\, \alpha/(ma_C)$. Notamos que existe una *recta* $\ell\ell$ de puntos a lo largo de la resultante de los vectores $m\mathbf{a}$ que hace ambigua la localización de un solo punto P^*. Sin embargo, el concepto del centro de percusión se usa generalmente en conjunto con problemas en que el cuerpo tiene un pivote O (como en el ejemplo previo). En dichos problemas P^* es el punto bien definido por la intersección de la recta $\ell\ell$ con la recta OC, como se ve en la Fig. 5.16.

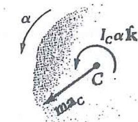


Figura 5.15

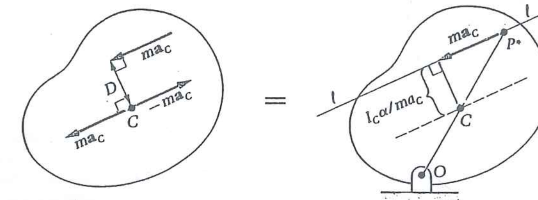
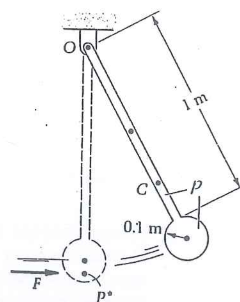


Figura 5.16

Ejemplo 5.19

Localizar el centro de percusión P^* para un péndulo $\mathcal{P}$ que consiste en una barra y un disco, cada uno de masa m. (Vee el diagrama.)



Solución

El centro de masa de $\mathcal{P}$ está a una distancia r_{OC} de O, dada por

$$m(0.5) + m(1.1) = 2mr_{OC}$$

$$r_{OC} = 0.8 \text{ m}$$

(Nótese que con masas iguales, C se encuentra a la mitad de la distancia entre los centros de masa de la barra y del disco). El radio de giro con respecto a C se obtiene de

$$I_{zC} = \frac{m(1^2)}{12} + m(0.3^2) + \frac{m(0.1^2)}{2} + m(0.3^2)$$

$$= 0.268m = 2mk_C^2$$

Entonces $k_C = 0.366$ m y la Ec. (5.45) da la posición de P^*:

$$r_{OP^*} = r_{OC} + \frac{k_C^2}{r_{OC}} = 0.8 + \frac{(0.366)^2}{0.8}$$

$$= 0.968 \text{ m}$$

Golpeando al péndulo en P^* se elimina la reacción horizontal en el pasador en O, como ya vimos.

Problemas / Sección 5.3

5.75 El tambor $\mathcal{B}_1$ tiene un radio de giro de 1 m con respecto a un eje horizontal que pasa por O y una masa de 800 kg. El cuerpo $\mathcal{B}_2$ tiene una masa de 600 kg y una velocidad de 20 m/s hacia arriba cuando se encuentra en la posición mostrada en la Fig. P5.75. Encuentre la velocidad de $\mathcal{B}_2$ 3 s después.

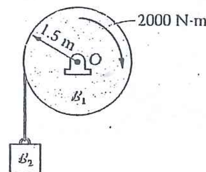


Figura P5.75

5.76 El tambor hueco mostrado en la Fig. P5.76 pesa 161 lb y gira alrededor de un eje fijo horizontal que pasa por O. El diámetro del tambor es de 2.4 pie y su radio de giro con respecto al eje es de 0.8 pie. La rapidez angular cambia de 30 rpm ↻ a 90 rpm ↺ durante un cierto intervalo de tiempo. Determine el intervalo.

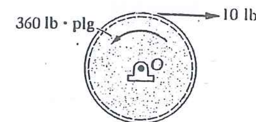


Figura P5.76

5.77 La fuerza senoidal P se aplica a la cuerda en la Fig. P5.77 durante medio ciclo. Si el cilindro (inicialmente en reposo) no resbala, encuentre su velocidad angular al terminar la aplicación de la carga (en $t = t_0$).

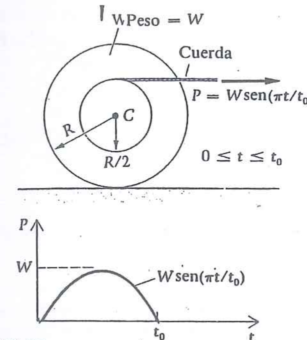


Figura P5.77

5.78 Una cuerda sin masa que rodea una polea sin fricción de masa M sostiene dos monos (uno con masa M y otro con masa 2 M). El sistema se libera desde el reposo en $t = 0$, como se muestra en la Fig. P5.78. Durante los siguientes 2 s, el mono B desciende 15 pie sobre la cuerda para agarrar un cacahuate sin masa en el extremo P. El mono A se sostiene firmemente en la cuerda durante esos 2 s. Encuentre el desplazamiento de A durante el intervalo de tiempo. Considere a la polea como un cilindro uniforme de radio R.

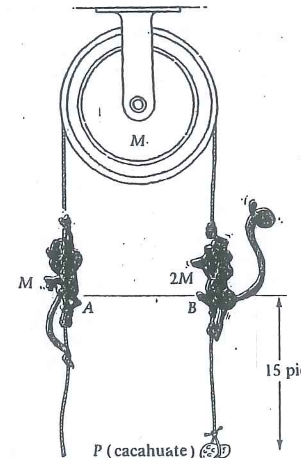


Figura P5.78

5.79 La fuerza F en la Fig. P5.79 varía según la expresión $F = 0.02\ t^2$ newtons, con t en segundos. Si hay suficiente fricción para impedir el resbalamiento del cilindro sobre el plano, halle la velocidad de C en (a) $t = 3$ s; (b) $t = 10$ s. El cilindro empieza a moverse desde el reposo en $t = 0$.

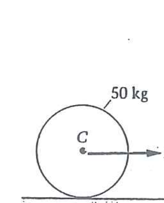


Figura P5.79

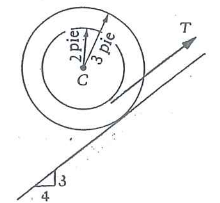


Figura P5.80

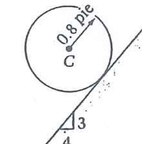


Figura P5.81

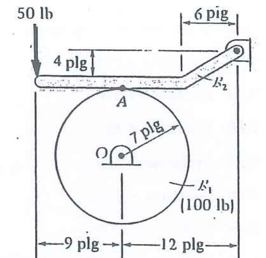


Figura P5.82

5.80 El cilindro en la Fig. P5.80 tiene masa $m = 3$ slug y radio de giro $k_C = 5$ pie con respecto a C. Hay suficiente fricción para impedir el resbalamiento sobre el plano. Una cuerda está enrollada alrededor del radio interior y una tensión $T = 40$ lb se aplica paralelamente al plano; como se muestra. Use los principios del impulso y la cantidad de movimiento para encontrar la velocidad de C después de 3 s, si el movimiento comienza desde el reposo.

5.81 El cuerpo redondo de 161 lb rueda hacia arriba en el plano con $\omega = 5$ rad/s ↻ en el instante mostrado en la Fig. P5.81. El radio de giro de la masa del cuerpo con respecto al eje que pasa por el centro de masa C normal a la página es de 0.7 pie. Encuentre el tiempo requerido para que el centro de masa alcance su punto más alto.

5.82 El cilindro $\mathcal{B}_1$, girando a 200 rpm ↻, es detenido al aplicarle la fuerza de 50 lb al brazo del freno $\mathcal{B}_2$, como se muestra en la Fig. P5.82. La fricción en el cojinete O produce un par resistente constante de 7 lb · pie y el coeficiente de fricción en el punto de contacto A entre $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ es $\mu = 0.3$. (a) Encuentre el tiempo requerido para detener el cilindro y (b) el número de revoluciones giradas por $\mathcal{B}_1$ durante el frenado.

5.83 Sobre el engrane actúa un par C cuya magnitud está dada por la fórmula $C = (6 + 0.8\ t)$ N · m, con t en s (Fig. P5.83). Si el sistema parte del reposo en $t = 0$, encuentre la velocidad del bloque $\mathcal{B}$ cuando (a) $t = 3$ s; (b) $t = 10$ s. El radio de giro centroidal del engrane es de 0.25 m. Resuel-

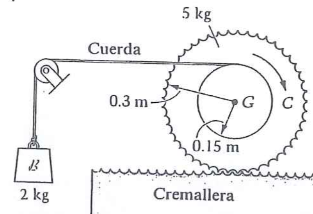


Figura P5.83

va los problemas siguientes haciendo uso de los métodos del impulso y cantidad de movimiento lineal y angular.

5.84 Problema 4.114.

5.85 Problema 4.67(c).

5.86 Problema 4.66.

5.87 Problema 4.109.

5.88 Problema 4.108.

5.89 Problema 4.97(b)

5.90 Un tubo rueda (desde el reposo) hacia abajo sobre un plano inclinado (Fig. P5.90). Usando las *ecuaciones de movimiento*, calcule:

a. $\dot{x}_C$ en el tiempo t

b. $\dot{x}_C$ después de que C se mueve la distancia x_C.

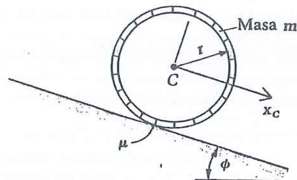


Figura P5.90

Luego use el trabajo y la energía para verificar la respuesta a la parte (b) y el impulso y la cantidad de movimiento para verificar la parte (a). Finalmente calcule el mínimo μ para impedir el resbalamiento.

5.91 Un cuerpo $\mathcal{B}$ con peso de 805 lb y radio de giro de 0.8 pie respecto a su eje z_C (Fig. P5.91) está articulado en su centro de masa. Se aplica un par horario de magnitud e^t lb · pie a $\mathcal{B}$ a partir de $t = 0$. Encuentre la velocidad angular de $\mathcal{B}$ cuando $t = 3$ s.

5.92 Si la ranura (para la cuerda) en el cilindro en la Fig. P5.92 (de masa 10 kg) tiene un efecto despreciable sobre I_C, calcule la velocidad del centro de masa C en función del tiempo; $\theta = 60°$

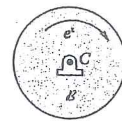


Figura P5.91

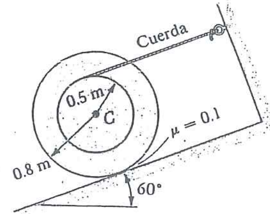


Figura P5.92

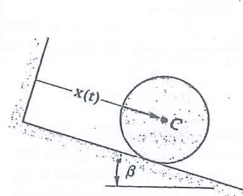


Figura P5.93

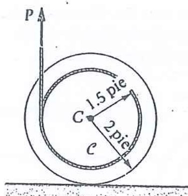


Figura P5.95

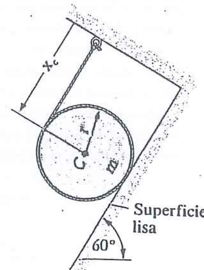


Figura P5.94

5.93 Una esfera uniforme (radio r, masa m) rueda sobre el plano en la Fig. P5.93. Si la esfera parte del reposo en $t = 0$ cuando $x = L$, encuentre $\dot{x}(t)$.

5.94 La cuerda en la Fig. P5.40 está enrollada alrededor del cilindro que se suelta desde el reposo sobre el plano inclinado 60° mostrado en la figura. Encuentre la velocidad de C en función del tiempo t.

* 5.95 El cuerpo $\mathcal{C}$ de 50 lb en la Fig. P5.95 puede considerarse como un cilindro macizo con radio de 2 pie. El coeficiente de fricción entre $\mathcal{C}$ y el plano es $\mu = 0.2$. Se aplica una fuerza $P = 10$ lb verticalmente a una cuerda enrollada alrededor del cubo. Encuentre la velocidad del centro C en el tiempo 10 s después de comenzado el movimiento a partir del reposo.

* 5.96 Un niño hala una rueda con una fuerza de 5 lb por medio de una cuerda unida al eje de la rueda (Fig. P5.96). El coeficiente de fricción entre la rueda y el suelo es $\mu = 0.2$. Encuentre el I_C de la rueda y empléelo para determinar la velocidad de C en el tiempo 3 s después de comenzado el movimiento a partir del reposo.

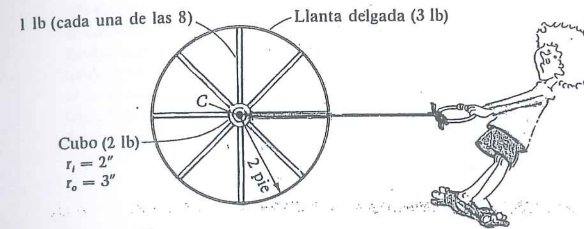


Figura P5.96

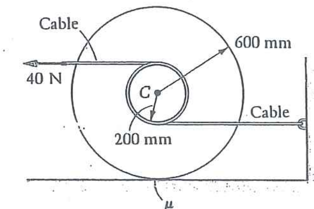


Figura P5.97

* 5.97 Dos cables están enrollados alrededor del cubo del carrete de 10 kg mostrado en la Fig. P5.97, que tiene un radio de giro de 500 mm respecto a su eje. Se aplica una fuerza constante de 40 N al cable superior. Encuentre la velocidad del centro de masa C en el tiempo 5 s después de comenzado el movimiento a partir del reposo si (a) $\mu = 0.2$; (b) $\mu = 0.5$.

* 5.98 El carro $\mathcal{B}_1$ recibe una velocidad inicial v_i hacia la derecha en $t = 0$. La barra $\mathcal{B}_2$ está articulada a $\mathcal{B}_1$ en el centro de masa G de éste, como se muestra en la Fig. P5.98a. El centro de masa C de $\mathcal{B}_2$ se mantiene fijo en el instante $t = 0$ en que el carro empieza a moverse y se suelta inmediatamente después. Cierto tiempo después (Fig. P5.98b), $\mathcal{B}_2$ tiene $\omega_2 = 0$ después de haber girado 90° en sentido horario. Si $M = m$, encuentre la velocidad de G en ese instante. Use $W = \Delta T$ y un principio de impulso y cantidad de movimiento.

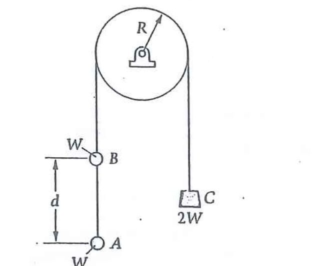


Figura P5.99

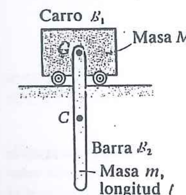


Figura P5.98a

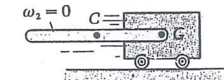


Figura P5.98b

5.99 Dos gimnastas en A y B, cada uno de peso W están agarrados a la parte izquierda de una cuerda que pasa sobre una polea cilíndrica (peso W, radio r); el lado derecho de la cuerda sostiene un contrapeso C igual a $2W$ (Fig.P5.99). Inicialmente el gimnasta A está a una distancia d abajo de B; A trepa la cuerda para unirse a B. Determine el desplazamiento del contrapeso C cuando A alcanza a B.

5.100 El disco $\mathcal{B}_1$ y la barra eje en la Fig. P5.100 giran libremente a 40 rpm. El disco $\mathcal{B}_2$ (inicialmente sin girar) se desliza a lo largo de la barra y golpea a $\mathcal{B}_1$; después de un breve período de resbalamiento, los dos cuerpos se mueven juntos. Encuentre el momento promedio de fricción ejercido sobre $\mathcal{B}_1$ por $\mathcal{B}_2$ si el resbalamiento dura 3 s.

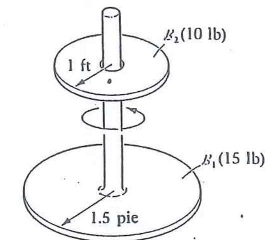


Figura P5.100

5.101 Dos discos giran en las direcciones mostradas en la Fig. P5.101. El disco superior baja hasta que entra en contacto con el inferior (alrededor del borde). Encuentre cuánto tardan los dos discos en alcanzar una velocidad angular común y determine la magnitud de ésta. Finalmente, determine la energía perdida. Demuestre que si $I_1 = I_2$ y $\omega_1 = -\omega_2$, la

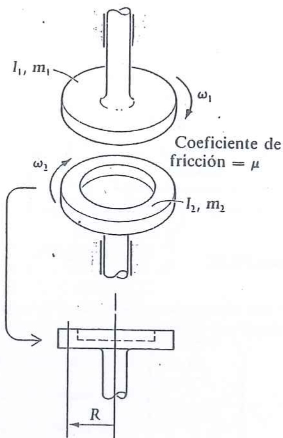


Figura P5.101

solución predice que 100% de la energía se pierde (como debe ser). Determine cuál de las tres respuestas (tiempo, ω_f, pérdida de energía) son iguales si los dos discos se traban instantáneamente en vez de resbalar.

5.102 La Fig. P5.102a muestra la distribución aproximada de la masa de un patinador. Calcule el porcentaje de incremento en su velocidad angular respecto a la vertical si reco-

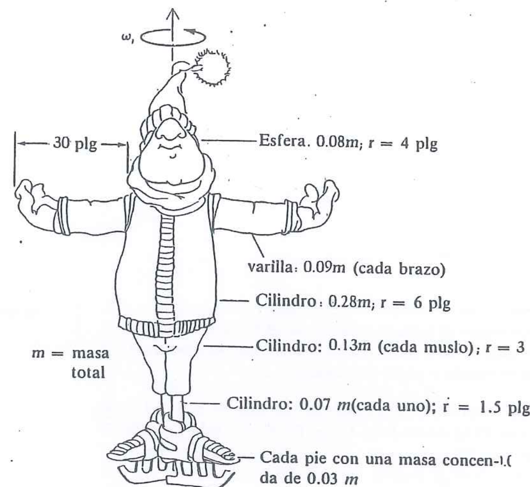


Figura P5.102a

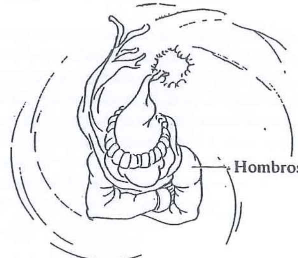


Figura P5.102b

ge sus brazos como se muestra en la Fig. P5.102b. Suponga que sus brazos se enrollan alrededor del círculo de 6 plg de radio de la parte superior de su cuerpo.

* **5.103** Un mono hambriento de masa m observa un racimo de plátanos de la misma masa (Fig. P5.103). Trepa con velocidad variable relativa a la cuerda (ligera). Determine si el mono alcanza los plátanos antes de que éstos pasen por encima de la polea de radio R, si

a. La masa de la polea es despreciable ($\ll m$).
b. La masa de la polea es fm, en donde $f > 0$ y el radio de giro con respecto a su eje es k.

Si cualquiera de las respuestas es afirmativa, dé la relación entre d y H para la cual es posible alcanzar los plátanos.

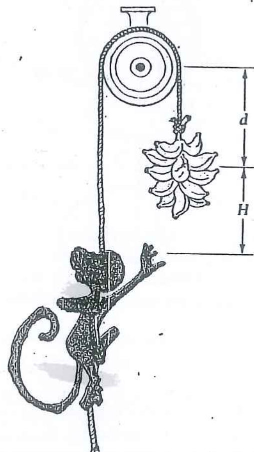


Figura P5.103

* **5.104** Un disco circular de masa M gira sin fricción alrededor de Q (Fig. P5.104). Una cuerda que pasa sobre el disco (sin resbalar) lleva una masa M en cada extremo. El sistema se suelta desde el reposo como se muestra; la masa derecha lleva una arandela o rondana de masa M. Al moverse el sistema, la masa izquierda recoge otra rondana también de masa M en el mismo instante en que la masa derecha deposita la suya. Encuentre la velocidad de la masa derecha justamente después de este intercambio de rondanas.

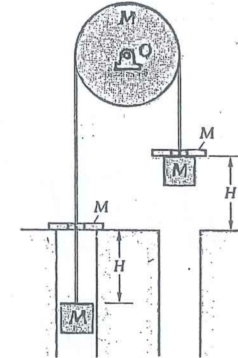


Figura 5.104

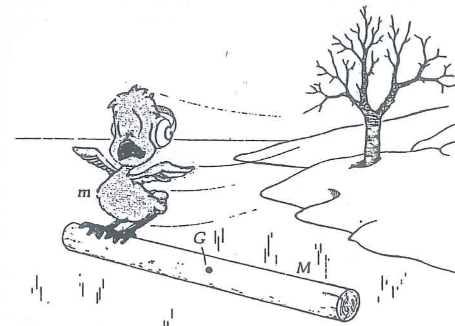


Figura 5.105

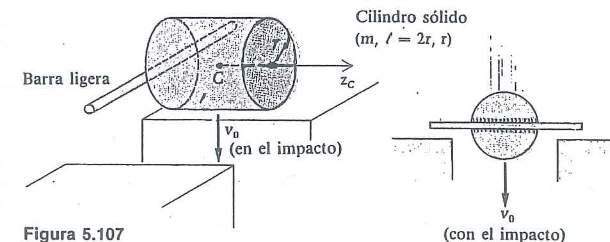


Figura 5.107

* **5.105** Un pájaro de masa m, volando horizontalmente con rapidez v_0 perpendicularmente a un tronco tirado, aterriza y permanece en él (Fig. P5.105). El tronco (masa M, longitud ℓ) se encuentra sobre un estanque congelado. Encuentre la velocidad angular del pájaro y del tronco al moverse juntamente. (Responda en términos de m, M, ℓ, y v_0). Suponga que el pájaro aterriza en el extremo del tronco.

* **5.106** Un bloque hemisférico de masa M y radio a, cuyas superficies son lisas, descansa con su cara plana en contacto con una mesa horizontal *lisa*. Una partícula de masa m se coloca en el punto más alto del bloque y es perturbado ligeramente. Demuestre que en tanto la partícula permanece en contacto con el bloque, el radio vector de la partícula forma un ángulo θ con la vertical tal que

$$a\dot{\theta}^2(M + m\,\mathrm{sen}^2\,\theta) = 2g(M + m)(1 - \cos\theta)$$

5.107 La barra en la Fig. P5.107 está soldada al extremo del cilindro que se encuentra descendiendo en traslación pura. La barra golpea las mesas con velocidad v_0 y el cilindro empieza a girar respecto a la barra sin rebotar.

a. Encuentre la velocidad angular del cilindro cuando C está en su punto más bajo
b. Encuentre el porcentaje de energía perdida durante el impacto, o sea

$$\left(1 - \frac{\text{Energía nueva}}{\text{Energía anterior}}\right) \times 100$$

5.108 Un paquete (Fig. P5.108) consiste en una caja más su contenido descrito en el Ejemplo 4.12. En el momento del impacto el paquete tiene una $v_{Gi} = 50 \downarrow$ pie/s y se encuentra en traslación. Si no hay rebote, halle la velocidad angular de la caja y la velocidad de su centro de masa G justamente después del impacto.

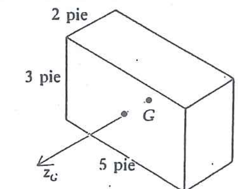
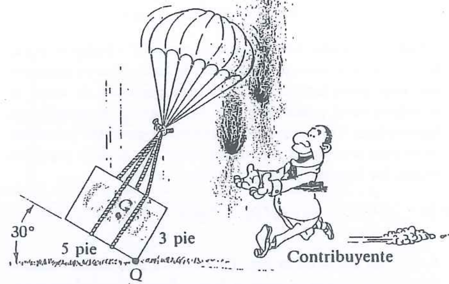


Figura 5.108

5.109 La placa en la Fig. P5.109 soportada por juntas esféricas (universales) en sus esquinas superiores, es golpeada repentinamente como se muestra con, una fuerza que produce un impulso J normal a la placa. Encuentre la energía cinética producida por el impacto.



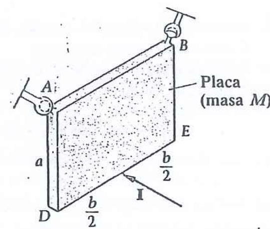


Figura 5.109

5.110 Repita el problema anterior pero suponga ahora que la placa inicialmente está libre. Demuestre que la diferencia en las energías de los dos casos es $J^2/(2M)$.

5.111 Una bala (Fig. P5.111) de masa m_1 golpea un bloque homogéneo cuadrado de masa m_2, siendo $m_2 \gg m_1$. La bala viaja con velocidad inicial v_0 y se incrusta en el bloque. Después del impacto el bloque pivotea alrededor de la arista A. ¿Cuál es la rapidez máxima $|v_0|$ de la bala para que el bloque no se vuelque completamente?

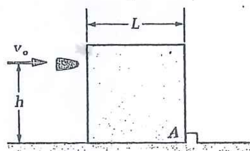


Figura P5.111

5.112 El cilindro $\mathcal{B}$ (radio = 10 cm y longitud = 40 cm) gira hacia abajo desde una posición de equilibrio en $\theta = 0$ y golpea a la partícula P de masa igual a 5 kg (Fig. P5. 112). El coeficiente de restitución es $e = 0.5$ y durante el impacto la partícula tiene una velocidad $\mathbf{v}_P = 2 \rightarrow$ m/s. Encuentre el ángulo a través del cual $\mathcal{B}$ girará alrededor de su pivote O después del impacto.

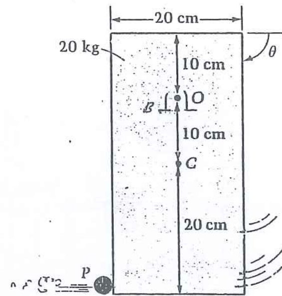


Figura 5.112

5.113 Una placa triangular equilátera con masa de 2 slug y lados de 2 pie se suelta desde el reposo y desde su posición superior (Fig. P5.113). Gira hacia abajo y golpea al cilindro estacionario. El coeficiente de restitución para el impacto es $e = 1/2$. Calcule el tiempo que transcurre después del impacto hasta que el cilindro deja de resbalar sobre el plano.

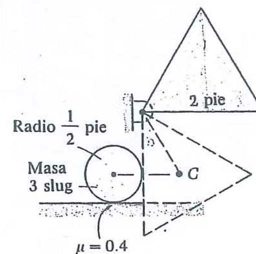


Figura P5.113

5.114 Un bloque se desliza hacia la derecha y golpea un pequeño tope con velocidad de 20 pie/s (Fig. P5.114).

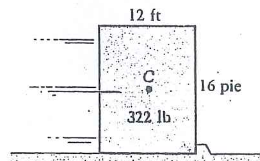


Figura P5.114

a. Si el coeficiente de restitución es cero, encuentre la pérdida de energía causada por el impacto.
b. ¿Cuál es la velocidad mínima requerida para volcar el bloque se vuelque después de la colisión?

5.115 Un cubo homogéneo de lado a y masa M se desliza sobre una mesa a nivel y sin fricción con velocidad v_0 (Fig. P5.115). Golpea un pequeño tope sobre la mesa en A de altura despreciable. Encuentre la velocidad del centro de masa justo después del impacto si el coeficiente de restitución es igual a 1. (El momento de inercia centroidal de un cubo respecto a un eje paralelo a una arista es $Ma^2/6$.)

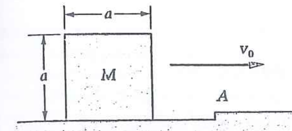


Figura P5.115

5.116 Sólo hay una altura H sobre la mesa en la que una bola de billar puede ser golpeada por el taco sin que aquella resbale por un cierto tiempo después del impacto (Fig. P5.116). Encuentre este valor de H en términos de R, para el cual la bola rueda inmediatamente.

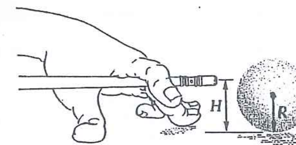


Figura P5.116

5.117 Calcule el error que se cometió en el Ejemplo 5.18 en el calculo de I_{zz}^C al suponer que el recipiente era un casco (de modo que $I_{zz}^C = m\ell^2/12 + mr^2/2$). Use el peso, la altura, el radio exterior y la densidad para calcular el espesor del recipiente; luego calcule un valor más preciso de I_{zz}^C y compárelos.

5.118 Una barra uniforme de longitud L se deja caer y se traslada con un ángulo θ respecto a la vertical como muestra la Fig. P5.118. Si el extremo A no rebota después de golpear al suelo con velocidad v_0 encuentre: (a) la pérdida de energía durante el impacto de A con el suelo; (b) la velocidad con la que el otro extremo B golpea al suelo.

5.119 Una barra uniforme AB de longitud L y masa M se mueve sobre un plano horizontal liso con $\mathbf{v}_C = V_0\hat{\mathbf{i}}$ y $\omega = \omega_0\hat{\mathbf{k}}$, cuando el extremo B golpea una clavija P (Fig. P5.119). Si $\omega_0 = 2\,v_0/L$ y el coeficiente de restitución $e = 1/6$, encuentre la pérdida de energía cinética.

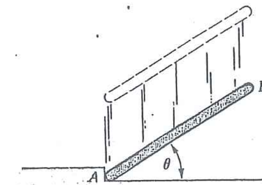


Figura P5.118

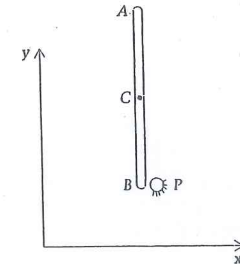


Figura P5.119

5.120 El bloque sólido de 80 lb golpea una pared rígida lisa (Fig. P5.120) y rebota con un coeficiente de restitución de $e = 0.2$. Antes del impacto el bloque tenía $\omega_i = 1.2$ ↺ rad/s y $\mathbf{v}_C = 0.8\hat{\mathbf{i}} + 0.6\hat{\mathbf{j}}$ pie/s. Encuentre la velocidad angular del bloque inmediatamente después del impacto.

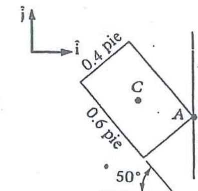


Figura P5.120

5.121 La barra en la Fig. P5.121 se encuentra cayendo libremente en un plano vertical. En un cierto instante está en posición horizontal con sus extremos A y B con las velocidades indicadas. Si el extremo A queda repentinamente fijo, demuestre que la barra comenzará a levantarse alrededor de A siempre que $V_1 < 2\,v_2$.

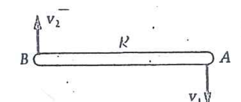


Figura P5.121

5.122 En el problema anterior demuestre que la pérdida de energía al detenerse instantáneamente el punto A es independiente de v_2.

5.123 La barra en la Fig. P5.123 gira hacia abajo desde la posición horizontal punteada y golpea a la masa m. La barra tiene masa M y longitud ℓ. La colisión tiene lugar con un coeficiente de restitución nulo. Si el coeficiente de fricción entre m y el plano es μ, encuentre la distancia que m se moverá antes de detenerse. Considere a m como a una partícula.

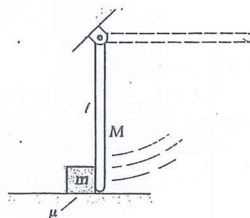


Figura P5.123

5.124 Una esfera de madera con peso igual a 0.644 lb gira hacia abajo desde una posición en que la barra está en posición horizontal y golpea al bloque. (Fig. P5.124). El coeficiente de restitución es $e = 0.6$. El bloque pesa 3.22 lb y está inicialmente en reposo. Encuentre la posición del bloque cuando queda *permanentemente* en reposo. (Suponga que la esfera se elimina del problema después del impacto y que el resorte no puede rebotar más allá de su posición original no alargada).

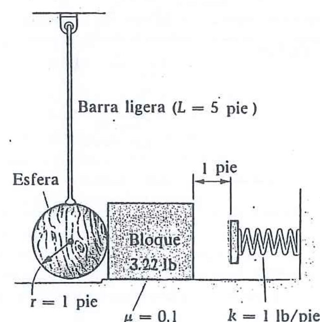


Figura P5.124

5.125 Una esfera de 4 lb se suelta desde el reposo en la posición mostrada en la Fig. P5.125 y se observan dos cosas; (1) la esfera queda inmediatamente en reposo después del impacto; (2) el bloque de 5 lb se desliza 3 pie antes de detenerse. Teniendo en cuenta esas observaciones encuentre los coeficientes de restitución (entre la esfera y el bloque) y de fricción (entre el bloque y el piso).

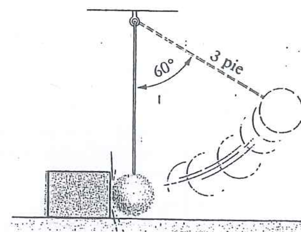


Figura P5.125

5.126 El cuerpo rígido formado por la esfera y la barra en la Fig. P5.126 se suelta del reposo en la posición horizontal. Gira hacia abajo y en su punto más bajo golpea a una caja. Encuentre qué distancia se desliza la caja antes de detenerse, si el coeficiente de restitución es $e = 0.5$. Los datos son:

1. Barra: longitud = 1 m; masa = 3 kg
2. Esfera: radio = 0.2 m; masa = 10 kg
3. Bloque: b = 0.3 m; H = 0.35 m; masa = 5 kg
4. Coeficiente de restitución entre bloque y plano = 0.3.

Suponga que la esfera golpea al bloque sólo una vez.

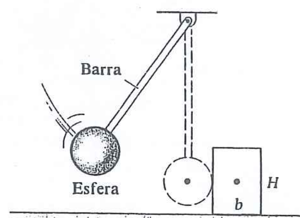


Figura P5.126

5.127 El sistema en la Fig. P5.127 está girando con $\omega_i = 2$ rad/s cuando se suelta el casquillo. Todas las superficies son lisas y el disco está fijo a la barra; la barra eje vertical ligera termina en cojinetes que le permiten girar libremente. Los datos son:

$$m_3 = \tfrac{1}{4}\ \text{slug} \qquad \ell_2 = 2\ \text{pie}$$

$$m_1 = 1\ \text{slug} \qquad \ell_1 = 4\ \text{pie}$$

$$m_2 = \tfrac{1}{4}\ \text{slug}$$

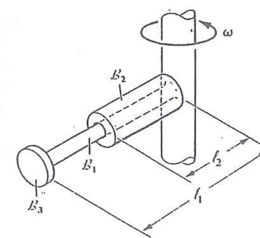


Figura P5.127

El casquillo se mueve hacia afuera y golpea al disco sin rebotar. Encuentre: (a) la rapidez angular de la barra justamente antes y después del impacto; (b) el porcentaje de energía perdida durante el impacto. Los radios de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son pequeños comparados con sus longitudes. Trate a $\mathcal{B}_3$ como partícula.

5.128 Dos ruedas dentadas (engranes) que pueden tratarse como discos uniformes de radios a y b y masas M y m respectivamente están rotando en el mismo plano. Inicialmente no están en contacto y tienen velocidades angulares ω_1 y ω_2 respecto a ejes fijos que pasan por sus centros. Sus ejes se mueven entonces ligeramente quedando acoplados los engranes. Demuestre que la pérdida de energía es

$$\frac{Mm}{4(M+m)}(a\omega_1 + b\omega_2)^2$$

5.129 La esfera $\mathcal{B}_1$ tiene masa m y radio r y rueda con una velocidad de su centro de masa $v_0 \rightarrow$ sobre un plano horizontal (Fig. P5.129). La esfera $\mathcal{B}_1$ golpea centralmente a otra esfera idéntica $\mathcal{B}_2$ que se encuentra en reposo. El coeficiente de fricción entre una esfera y el plano es μ, y en esferas es despreciable. El impacto es aproximadamente elástico $(e \approx 1)$.

a. Encuentre v_{Cf} y ω_f de cada esfera justamente después del impacto.
b. Encuentre v_C de cada esfera después de que estas comienzan a rodar uniformemente.
c. Analice el caso especial en que $\mu = 0$.

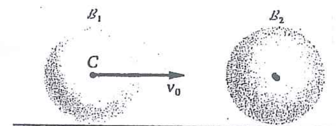


Figura P5.129

* **5.130** La barra doblada de 30 kg de la Fig. P5.130 cae desde la posición punteada, sobre el cilindro en rotación que gira inicialmente a 3000 rad/s ↻. Si la barra no rebota (coeficiente de restitución igual a cero), encuentre el tiempo requerido para que el cilindro se detenga después del impacto.

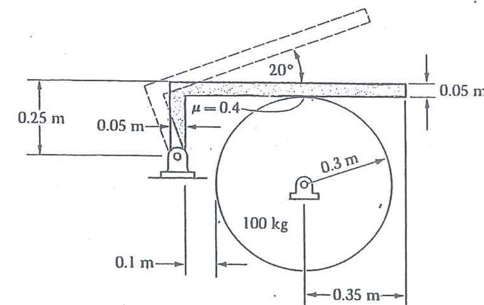


Figura P5.130

* **5.131** En el Ejemplo 5.18 suponga que la arista frontal inferior del recipiente $\mathcal{B}$ rebota después del choque con velocidad ev_{Ci}, donde e es el coeficiente de restitución (< e ≤). Use las ecuaciones de impulso y cantidad de movimiento en las direcciones x, y y la ecuación de impulso y cantidad de movimiento angulares para encontrar las dos componentes de la velocidad del centro de masa y la velocidad angular de $\mathcal{B}$ después del impacto. Compare los resultados de $\dot{x}_{Cf}$, $\dot{y}_{Cf}$ y $\dot{\theta}_f$ para $e = 1$ con los de $e = 0$. Demuestre que no se pierde energía cuando $e = 1$; es decir demuestre que

$$\frac{1}{2}mv_{C_i}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{C_f}^2 + \dot{y}_{C_f}^2) + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}_f^2$$

* **5.132** Demuestre que las ecuaciones de movimiento del recipiente en el problema anterior *después* del impacto son:

$$m\ddot{x}_C = -mg \operatorname{sen}\psi \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = N - mg\cos\psi \qquad (2)$$

$$I_C\ddot{\theta} = \frac{\ell}{2}N\operatorname{sen}\theta - rN\cos\theta \qquad (3)$$

donde N es la reacción normal en la arista Q (Fig. P5.132). Observe que hasta que ocurre otro impacto, el centro de masa

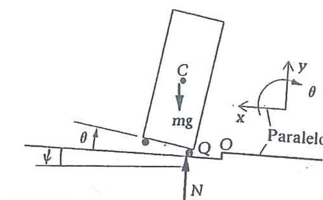


Figura P5.132

tiene una componente x constante de aceleración. Use la cinemática para demostrar que

$$\ddot{y}_C = \left(r \cos \theta - \frac{\ell}{2} \operatorname{sen} \theta\right)\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2\left(r \operatorname{sen} \theta + \frac{\ell}{2} \cos \theta\right) \quad (4)$$

Aplique las Ecs. (2) y (4) para eliminar N de (3) obteniendo así una ecuación diferencial en θ que describa el movimiento rotacional de $\mathcal{B}$ y note su complejidad.

5.133 Demuestre la proposición 1 cerca del final del Ejemplo 5.18 para el caso en que el plano está a nivel ($\psi = 0$) y $e = 0$. *Sugerencia*: Advierta cuidadosamente que el ángulo del plano no afecta a la Ec. (6), pero lo que sólo se necesita alterar Δh en la Ec. (7) para obtener el nuevo resultado.

5.134 Demuestre la proposición 2 de cerca del final del Ejemplo 5.18. Otra vez, el plano está a nivel en este problema pero ahora $e = 1$. *Sugerencia*: La componente x_C de la velocidad es constante después del impacto, ya que con ψ todas las fuerzas externas (mg y N) son verticales. Para encontrar esta velocidad $\dot{x}_{C_f}$, use ω_f y la velocidad de la arista de choque Q justamente después del impacto (ω_f es la misma que con $\psi = 3.719°$ del Problema 5.131 con $e = 1$; v_Q es v_{C_i} hacia la izquierda). Luego use

$$W = \Delta T = \frac{1}{2} m\dot{x}_{C_f}^2 + \frac{1}{2} m\dot{y}_{C_f}^2 + \frac{1}{2} I_C\omega_f^2 - \frac{1}{2} mv_{C_i}^2$$

para mostrar que C alcanza la parte superior con energía sobrante.

* **5.135** Demuestre que el cilindro en la Fig. P5.135 al soltarlo desde el reposo llegará a la pared inferior. Encuentre la velocidad con la que C rebotará después del impacto y determine la energía perdida. Todos los datos se muestran en la figura.

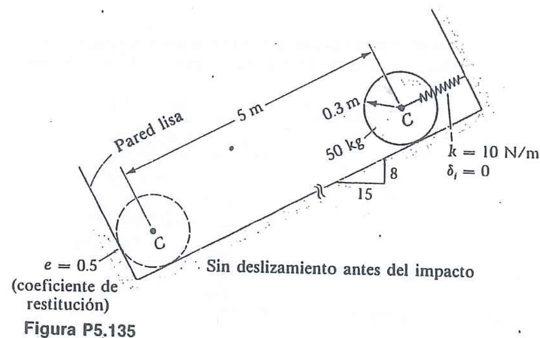


Figura P5.135

* **5.136** Una esfera rueda con rapidez v_C sobre una superficie horizontal y golpea un obstáculo de altura H. ¿Cuál es la altura máxima que H puede tener para que la esfera salve el obstáculo? Considere que el coeficiente de restitución es cero durante el impacto de la esfera con la arista O. La respuesta será una función de g, r y v_C; de hecho, H/r puede encontrarse como una función del parámetro adimensional gr/v_C^2 (Fig. P5.136).

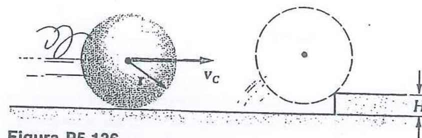


Figura P5.136

* **5.137** Usando una densidad para la madera de 673 kg/m³, determine el centro de masa C del bat en la Fig. P5.137, y luego su momento de inercia con respecto al eje z_0, perpendicular al eje de simetría del bat. Use el teorema de los ejes paralelos para obtener I_{zz}^C y localice el centro de percusión del bat si éste gira alrededor de un punto fijo O.

* **5.138** El martillo en la Fig. P5.138 golpea a la esfera y le imparte un impulso horizontal J. Determine la velocidad angular inicial de la esfera.

5.139 Repita el problema anterior pero suponga ahora que la esfera y la barra están soldadas entre sí formando un cuerpo rígido.

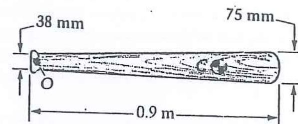


Figura P5.137

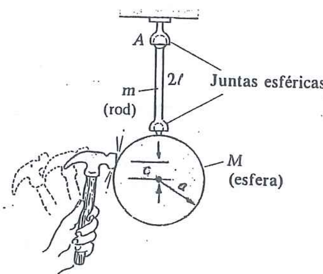


Figura P5.138

Problemas para Computadora / Capítulo 5

* **5.140** El sistema en la Fig. P5.140 se suelta desde el reposo en la posición indicada. Con ayuda de una computadora genere datos para elaborar una gráfica del ángulo θ girado por la rueda $\mathcal{B}_1$ antes de detenerse en función de la relación de las masas M/m. *Sugerencia*: Demuestre primero, usando $W = \Delta$ que la ecuación que rige a θ es

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2m}{M} \theta$$

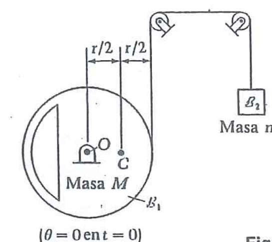


Figura P5.140

Respuestas a las Preguntas / Capítulo 5

P5.1 Por la definición del centro de masa.

P5.2 Porque $(\Sigma M_{C_x}\hat{\mathbf{i}} + \Sigma M_{C_y}\hat{\mathbf{j}}) \cdot \omega\hat{\mathbf{k}}$ es cero.

P5.3 Puesto que los contrapesos colocan el centro de masa sobre el eje de elevación, el centro de masa no se mueve.

P5.4 Si es mayor, la barra no alcanzará la posición horizontal; si es menor, el sistema atraviesa esta posición sin detenerse.

P5.5 Sí

P5.6 En general, no. Depende de la posición de G relativa a C_1 y C_2.

P5.7 Porque $\mathbf{r}_{0CR} = \mathbf{r}_{0Q} + \mathbf{r}_{QCR}$ y $\mathbf{r}_{QCR} \times m\mathbf{v}_{CR} = 0$ ya que $\mathbf{r}_{QCR}$ y $\mathbf{v}_{CR}$ son paralelos.

P5.8 Si O no está fijo en $\mathcal{I}$, entonces $d/dt\,(\mathbf{r}_{0C} \times m\mathbf{v}_C) = \mathbf{r}_{0C} \times m\mathbf{a}_C - \mathbf{v}_0 \times m\mathbf{v}_C$ y el segundo término no es cero.

Cuestionario de Repaso / Capítulo 5

¿Verdadero o falso?

Todas estas preguntas se refieren a cuerpos rígidos en movimiento plano.

1. Si usted levanta un objeto de 2 lb a una altura de 3 pie desde el reposo y lo mantiene ahí, la gravedad ha hecho un trabajo de —6 pie · lb, y usted uno de + 6 pie · lb sobre el objeto.
2. El trabajo de un par $C\hat{\mathbf{k}}$ sobre el cuerpo $\mathcal{B}$ es siempre $C\hat{\mathbf{k}} \cdot \theta\hat{\mathbf{k}} = C\theta$, en donde θ es el ángulo a través del cual gira el cuerpo.
3. El trabajo hecho por un resorte lineal es siempre $k/2(\delta_i^2 - \delta_f^2)$, en donde δ_i y δ_f son el alargamiento inicial y final. (Si son negativos, representan acortamiento por compresión.)
4. Hay en realidad tres principios distintos de trabajo y energía cinética; dos de las ecuaciones se suman para dar el tercero.
5. Los principios del trabajo y la energía cinética y del impulso y la cantidad de movimiento (lineal y angular) resultan de integraciones generales de las ecuaciones de movimiento y carecen de términos de aceleración.

6. No todas las fuerzas que actúan en un cuerpo tienen en general, que realizar, trabajo sobre él.
7. La fuerza de fricción debajo de una rueda en rodamiento realiza trabajo sobre ella si la superficie de contacto es curva y fija.
8. La fuerza normal ejercida sobre una rueda en rodamiento por una superficie ya sea que esté fija o en movimiento, nunca efectúa trabajo sobre la rueda.
9. El principio $\int \Sigma \mathbf{F}\, dt = \int \dot{\mathbf{L}}\, dt = m\mathbf{v}_{C_f} - m\mathbf{v}_{C_i}$ es válido para cuerpos deformables.
10. El principio $\int \Sigma M_C\, dt = I_{zz}^C \omega_f - I_{zz}^C \omega_i$ es válido para cuerpos deformables.
11. Todo problema que pueda resolverse por $W = \Delta T$, puede resolverse también por "energía cinética + energía potencial = constante".
12. La fórmula $T = \frac{1}{2} I_{\text{Ⓘ}} \omega^2$ expresa *toda* la energía cinética del cuerpo rígido en movimiento plano, si el cuerpo no se traslada.

RESPUESTAS: 1 V; 2 F; 3 V; 4 V; 5 V; 6 V; 7 F; 8 F; 9 V; 10 F; 11 F; 12 V.

Capítulo 6 Cinemática de un cuerpo rígido en movimiento tridimensional

6.1 Introducción

En este capítulo estudiaremos la cinemática de los cuerpos rígidos en movimiento general. Comenzamos definiendo el vector velocidad angular ω en tres dimensiones, y luego se analizarán sus importantes propiedades. Veremos que este vector ya no tiene la simple forma $\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$ que tenía en el movimiento plano y que, en consecuencia, no es posible una extensión natural de este caso especial al movimiento general. También estudiaremos aquí la derivada de ω, que es el vector aceleración angular.

Luego sigue el estudio de lo que con frecuencia se denominan ecuaciones de velocidad y aceleración en "marcos de referencia móviles", con una breve sección ilustrativa en la que la Tierra es el marco móvil. Se verá en la Sección 6.7 que las ecuaciones de velocidad y aceleración del *cuerpo rígido* pueden obtenerse a partir de esas ecuaciones generales. En la Sección 6.8 se estudiará la relación entre la velocidad angular y los ángulos de orientación del cuerpo. Concluirá el capítulo con un estudio de las matrices de rotación.

6.2 Relación entre derivadas. El vector velocidad angular

En esta sección consideraremos la relación entre las derivadas de un vector tomadas en dos marcos diferentes; estableceremos así una definición útil y concisa de la velocidad angular. Se aconseja al lector perseverar hasta que esta sección y la próxima se hayan entendido perfectamente. Aunque el concepto de velocidad angular en tres dimensiones inicialmente es difícil, *debe* ser estudiado con cuidado antes de considerar la cinemática y la cinética del movimiento general del cuerpo rígido. El vector de velocidad angular es la clave del tema. Hará más fácil la vida del estudiante del movimiento tridimensional (si trabaja con ahínco para entenderlo) o mucho más difícil (si no lo hace).

Sea $\mathbf{Q}$ un vector arbitrario. Podemos expresar $\mathbf{Q}$ en términos de sus componentes (Q_x, Q_y, Q_z) asociadas a direcciones fijas en un marco $\mathscr{B}$ por medio de la expresión

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= (\mathbf{Q}\cdot\hat{\mathbf{i}})\hat{\mathbf{i}} + (\mathbf{Q}\cdot\hat{\mathbf{j}})\hat{\mathbf{j}} + (\mathbf{Q}\cdot\hat{\mathbf{k}})\hat{\mathbf{k}} \\ &= Q_x\hat{\mathbf{i}} + Q_y\hat{\mathbf{j}} + Q_z\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{6.1}$$

en donde los vectores unitarios ($\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$) son paralelos en todo momento a los ejes respectivos de un sistema coordenado ortogonal fijo en $\mathscr{B}$. Consideremos ahora otro marco de referencia $\mathscr{A}$ en el que queremos derivar el vector Q (Fig. 6.1). Por ejemplo, podríamos desear encontrar la velocidad de un punto en el marco $\mathscr{A}$, aun cuando la posición del punto esté definida en $\mathscr{B}$ (digamos, por el vector $\mathbf{Q}$). En este caso, parte de la solución requerirá que pueda ser posible derivar $\mathbf{Q}$ en $\mathscr{A}$ aunque se exprese éste en términos de sus componentes en $\mathscr{B}$.

Por consiguiente, ahora es la ocación de aprender a relacionar derivadas de un vector tomadas en dos marcos diferentes. Enfatizamos desde el principio que estos vectores son completamente arbitrarios; no se requiere siquiera que estén relacionados con la dinámica; ni la



Fig. 6.1 Vector $\mathbf{Q}$ y marcos $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$.

derivada tiene que ser respecto al tiempo, aunque ésta es la variable independiente de interés para nosotros en dinámica, por lo que será la que usemos en el desarrollo siguiente.

Si ${}^{\mathscr{A}}\dot{\mathbf{Q}}$ representa (Ec. 1.8) la derivada de $\mathbf{Q}$ con respecto al tiempo en $\mathscr{A}$, se tiene

$${}^{\mathscr{A}}\dot{\mathbf{Q}} = \dot{Q}_x\hat{\mathbf{i}} + \dot{Q}_y\hat{\mathbf{j}} + \dot{Q}_z\hat{\mathbf{k}} + Q_x\,{}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}} + Q_y\,{}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{j}}} + Q_z\,{}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{k}}} \tag{6.2}$$

Los primeros tres términos del lado derecho de la Ec. (6.2) representan la derivada de $\mathbf{Q}$ en $\mathscr{B}$, por lo que se puede escribir

$${}^{\mathscr{A}}\dot{\mathbf{Q}} = {}^{\mathscr{B}}\dot{\mathbf{Q}} + (Q_x\,{}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}} + Q_y\,{}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{j}}} + Q_z\,{}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{k}}}) \tag{6.3}$$

Se ve claramente que los términos entre paréntesis en la Ec. (6.3) representan un vector que depende de $\mathbf{Q}$ y del cambio de orientación del marco $\mathscr{B}$ con respecto a $\mathscr{A}$. Procedemos ahora a obtener una expresión útil y compacta para este vector; en el proceso aparecerá el vector velocidad angular.

Puesto que

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1 \tag{6.4}$$

resulta que

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot{}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}} = 0 = \hat{\mathbf{j}}\cdot{}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{j}}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot{}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{k}}} \tag{6.5}$$

de manera que las tres derivadas de los vectores unitarios en la Ec. (6.3) son cada una perpendicular a los vectores unitarios respectivos*.

Pregunta 6.1 ¿Será esto cierto para *cualquier* vector de magnitud constante (no necesariamente un vector unitario)?

Lo anterior significa que hay tres vectores α, β y γ para los cuales

$$\begin{aligned}{}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}} &= \alpha\times\hat{\mathbf{i}} \\ {}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{j}}} &= \beta\times\hat{\mathbf{j}} \\ {}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{k}}} &= \gamma\times\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{6.6}$$

Los productos vectoriales aseguran que $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ son cada uno perpendicular a sus derivadas ($\hat{\mathbf{i}} \perp {}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}}$ etc.) y las magnitudes de α, β y γ dan a ${}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}}$, ${}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{j}}}$, ${}^{\mathscr{A}}\dot{\hat{\mathbf{k}}}$ sus magnitudes correctas.

En términos de sus componentes en $\mathscr{B}$, podemos expresar a α, β y γ como

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_x\hat{\mathbf{i}} + \alpha_y\hat{\mathbf{j}} + \alpha_z\hat{\mathbf{k}} \\ \beta &= \beta_x\hat{\mathbf{i}} + \beta_y\hat{\mathbf{j}} + \beta_z\hat{\mathbf{k}} \\ \gamma &= \gamma_x\hat{\mathbf{i}} + \gamma_y\hat{\mathbf{j}} + \gamma_z\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{6.7}$$

*Esto supone que los vectores unitarios no son constantes en el marco de referencia $\mathscr{A}$. Si dos de ellos son constantes en $\mathscr{A}$, entonces los tres lo serán y la velocidad angular desaparece; si sólo *uno* es constante en $\mathscr{A}$, se tiene un caso especial que será considerado después.

Sustituyendo esas componentes en las Ecs. (6.6) se obtiene

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}} &= \alpha_z\hat{\mathbf{j}} - \alpha_y\hat{\mathbf{k}} \\
{}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{j}}} &= \beta_x\hat{\mathbf{k}} - \beta_z\hat{\mathbf{i}} \\
{}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{k}}} &= \gamma_y\hat{\mathbf{i}} - \gamma_x\hat{\mathbf{j}}
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

y vemos que α_x, β_y, γ_z, en este punto, permanecen arbitrarios.

Pregunta 6.2 ¿Por qué permanecen arbitrarios?

Estamos tratando de relacionar las componentes de los vectores $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ para encontrar una manera de expresar los tres términos últimos de la Ec. (6.3). Con este fin, notemos que en todo instante t,

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$$

La diferenciación de la primera relación da

$$ {}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + {}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{j}}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \tag{6.9}$$

Sustituyendo las dos primeras ecuaciones (6.6) en (6.9) se obtiene,

$$(\boldsymbol{\alpha} \times \hat{\mathbf{i}}) \cdot \hat{\mathbf{j}} + (\boldsymbol{\beta} \times \hat{\mathbf{j}}) \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \tag{6.10}$$

Intercambiando el punto y la cruz en cada término (el triple producto escalar no varía) conduce a

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{k}} - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \tag{6.11}$$

de modo que

$$\alpha_z = \beta_z \tag{6.12}$$

Igualmente, de

$$\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \qquad \text{y} \qquad \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \tag{6.13}$$

obtenemos respectivamente (como se puede verificar fácilmente),

$$\beta_x = \gamma_x \qquad \text{y} \qquad \gamma_y = \alpha_y \tag{6.14}$$

Las únicas componentes no implicadas en las Ecs. (6.12) y (6.14) son α_x, β_y, γ_z que son arbitrarias. Si las escogemos de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
\alpha_x &= \beta_x = \gamma_x \\
\beta_y &= \gamma_y = \alpha_y \\
\gamma_z &= \alpha_z = \beta_z
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

entonces *los tres vectores son idénticos* y llamamos al vector resultante común $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \tag{6.16}$$

Si ahora multiplicamos escalarmente las tres ecuaciones (6.8) respectivamente por $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$, se $\hat{\mathbf{i}}$, obtenemos las tres componentes de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}$:

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}} \cdot \hat{\mathbf{j}} &= \alpha_z = \omega_{\mathcal{B}|\mathcal{A}_z} \\
{}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{j}}} \cdot \hat{\mathbf{k}} &= \beta_x = \omega_{\mathcal{B}|\mathcal{A}_x} \\
{}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{k}}} \cdot \hat{\mathbf{i}} &= \gamma_y = \omega_{\mathcal{B}|\mathcal{A}_y}
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

El vector $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}$ puede entonces expresarse como*

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} = ({}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{j}}} \cdot \hat{\mathbf{k}})\hat{\mathbf{i}} + ({}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{k}}} \cdot \hat{\mathbf{i}})\hat{\mathbf{j}} + ({}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}} \cdot \hat{\mathbf{j}})\hat{\mathbf{k}} \tag{6.18}$$

Llamamos al vector $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}$, definido por la Ec. (6.18), **velocidad angular del marco $\mathcal{B}$ con respecto del marco $\mathcal{A}$**, o más brevemente, **velocidad angular de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$**. Es claro que el vector velocidad angular depende estrechamente del modo en que el marco $\mathcal{B}$ cambia su orientación respecto a $\mathcal{A}$. En la siguiente sección examinaremos algunas propiedades especiales de este vector. Vemos que $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}$ es *único*, lo que significa que no se perdió generalidad cuando hicimos $= \beta_x = \gamma_x$, $\beta_y = \gamma_y = \alpha_y$, $\gamma_z = \alpha_z = \beta_z$ en el desarrollo anterior de la velocidad angular.

6.3 Propiedades de la velocidad angular

Regresamos ahora a la Ec. (6.3). Sustituyendo los valores de ${}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}}$, ${}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{j}}}$ y ${}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{k}}}$ por los dados en las Esc. (6.6) y usando la Ec. (6.16) para reemplazar $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ y $\boldsymbol{\gamma}$ por $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}$, obtenemos

$${}^{\mathcal{A}}\dot{\mathbf{Q}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{Q}} + Q_x(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \times \hat{\mathbf{i}}) + Q_y(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \times \hat{\mathbf{j}}) + Q_z(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \times \hat{\mathbf{k}}) \tag{6.19}$$

que puede expresarse, usando la Ec. (6.1) como

$${}^{\mathcal{A}}\dot{\mathbf{Q}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \times \mathbf{Q} \tag{6.20}$$

La Ec. (6.20) será de vital importancia en este Capítulo así como en el Capítulo 7 dedicado a la cinética del cuerpo rígido en movimiento general. Nos permite calcular fácilmente la derivada de un vector en un marco si está éste expresado en términos de vectores base fijos en otro marco; el único precio que tenemos que pagar es añadir el producto vectorial $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \times \mathbf{Q}$. Así, la primera propiedad de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}$ es que nos permite relacionar (por medio de la Ec. 6.20) las derivadas de cualquier vector en dos marcos diferentes.

Queda por contestar la pregunta de si hay más de un vector que satisfaga la Ec. (6.20); recuérdese que en la sección precedente seleccionamos arbitrariamente los componentes α_x, β_y, γ_z para hacer $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}$. Ahora procedemos a demostrar que el vector velocidad angular es ciertamente único. Se realiza postulando que *dos* vectores $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}_1}$ y $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}_2}$ satisfacen *ambos* la Ec. (6.20) y luego mostramos que son necesariamente iguales.* Tenemos así que

$${}^{\mathcal{A}}\dot{\mathbf{Q}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}_1} \times \mathbf{Q} \tag{6.21}$$

$${}^{\mathcal{A}}\dot{\mathbf{Q}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}_2} \times \mathbf{Q} \tag{6.22}$$

*Esta es la definición de velocidad angular propuesta por el experto en dinámica T.R. Kane. Véanse sus libros *Dynamics: Theory and Applications* (Nueva York: McGraw-Hill, 1985), pág. 16, y *Spacecraft Dynamics* (Nueva York: McGraw-Hill, 1983), pág. 49.

*Calculemos $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}_1}$ con $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ tal como se describe en la Sección 6.2, y por ejemplo, y calcúlese $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}_2}$ con otra tríada de vectores unitarios fijos en $\mathcal{B}$. El problema de la unicidad está en determinar si las $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}$'s así calculadas son iguales.

Por resta obtenemos

$$(\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}_1} - \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}_2}) \times \mathbf{Q} = 0 \tag{6.23}$$

Finalmente, puesto que Q es arbitrario, la expresión entre paréntesis en la Ec. (6.23) debe desaparecer lo que demuestra que el vector velocidad angular es único ya que las dos ω's son iguales entre sí.

Nada se ha dicho en esta sección ni en la anterior sobre dinámica; es claro entonces que el vector velocidad angular es un vector mucho más general que uno que es simplemente útil para describir los movimientos rotacionales de los cuerpos rígidos. Hemos visto que el vector velocidad angular es de hecho el que puede usarse para relacionar las derivadas en dos marcos de cualquier vector arbitrario. Además, aunque hemos usado el tiempo como la variable independiente, tales derivadas pueden tomarse con respecto a *cualquier* variable escalar. Finalmente, notemos en la Ec. (6.18) que define a $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$, que la velocidad angular es un vector que relaciona dos *marcos* de referencia; por lo tanto, no tiene sentido hablar de la velocidad angular de un punto.

Consideremos ahora varias propiedades adicionales de $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ que serán de utilidad en lo que sigue. Notemos primero que si dos marcos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ mantienen una orientación constante (aun si cada uno está en movimiento en un tercer marco $\mathcal{C}$), entonces $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \equiv 0$*. Para probar esto basta observar que ningún vector unitario fijo en dirección en $\mathcal{B}$ puede variar con el tiempo en $\mathcal{A}$ si no hay cambio en la orientación entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Entonces de la Ec. (6.18), $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \equiv 0$.

A continuación demostraremos que la velocidad angular de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$ es la negativa de la velocidad angular de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Si sumamos la Ec. (6.20) a la ecuación

$$^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{Q}} = {}^{\mathcal{A}}\dot{\mathbf{Q}} + \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{B}} \times \mathbf{Q} \tag{6.24}$$

obtenemos

$$(\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} + \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}) \times \mathbf{Q} = 0 \tag{6.25}$$

Nuevamente, puesto que Q es arbitrario, tenemos el resultado esperado:

$$\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = -\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{B}} \tag{6.26}$$

Ahora probaremos el **teorema de la adición**, que afirma que

$$\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{A}} = \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \tag{6.27}$$

Sabemos de la primera propiedad de $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ que

$$^{\mathcal{A}}\dot{\mathbf{Q}} = {}^{\mathcal{C}}\dot{\mathbf{Q}} + \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{A}} \times \mathbf{Q} \tag{6.28}$$

$$^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{Q}} = {}^{\mathcal{C}}\dot{\mathbf{Q}} + \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} \times \mathbf{Q} \tag{6.29}$$

$$^{\mathcal{A}}\dot{\mathbf{Q}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{Q}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \times \mathbf{Q} \tag{6.30}$$

Sumando las Ecs. (6.29) y (6.30) resulta

$$^{\mathcal{A}}\dot{\mathbf{Q}} = {}^{\mathcal{C}}\dot{\mathbf{Q}} + (\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}) \times \mathbf{Q} \tag{6.31}$$

y restando la Ec. (6.31) de la (6.28) queda

$$(\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{A}} - \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} - \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}) \times \mathbf{Q} = 0 \tag{6.32}$$

**Orientación constante* significa que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se mueven como si estuvieran rígidamente conectados entre sí, exceptuando una posible traslación de uno respecto al otro.

Por lo tanto, como Q es arbitrario

$$\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{A}} = \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \tag{6.33}$$

y el teorema queda probado. Puede parecer obvio al lector que la Ec. (6.33) es verdadera, pero en la siguiente sección demostraremos que una relación tal *no existe* para las aceleraciones angulares.

El teorema de la adición es un resultado extremadamente poderoso. Con él es posible establecer la velocidad angular, en un par de marcos a la vez, de un cuerpo que gira de manera complicada relativamente a un marco de referencia. Este teorema evita el uso de la definición (6.18), que nos ha sido de utilidad, pero en la práctica se suplanta normalmente por las propiedades descritas en esta sección.

Notemos que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se mueven en $\mathcal{C}$ y mantienen orientación constante entre sí, entonces $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = 0$. Por consiguiente, según el teorema de la adición,

$$\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{C}} = \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} + \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{C}} = \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{C}}$$

de modo que, como era de esperar, son idénticas las velocidades angulares en $\mathcal{C}$ de dos marcos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que mantienen orientación constante entre sí.

Recíprocamente, si dos marcos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen velocidades angulares iguales en $\mathcal{C}$ se puede demostrar que su orientación relativa es constante. Usando el teorema de la adición, $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = 0$; entonces con $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ aún fijos en dirección en $\mathcal{B}$, se tiene por las Ecs. (6.6) y (6.16),

$$^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{i}}} = \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \times \hat{\mathbf{i}} = 0$$

$$^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{j}}} = \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \times \hat{\mathbf{j}} = 0$$

$$^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{k}}} = \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$$

Por lo tanto, $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ son constantes en $\mathcal{A}$ y la orientación de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$ es constante.

Para dos marcos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, las descripciones "orientación constante" y "$\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \equiv 0$" son completamente equivalentes. Nótese también que el teorema de la adición puede extenderse a *cualquier número de marcos* repitiendo el siguiente procedimiento con dos marcos a la vez:

$$\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{D}} = \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{D}} = \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{C}} + \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}$$

Ahora demostraremos que cuando existe un vector unitario $\hat{\mathbf{k}}$, cuya derivada respecto al tiempo en cada uno de dos marcos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se anula (esto es, $^{\mathcal{A}}\dot{\hat{\mathbf{k}}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\hat{\mathbf{k}}} = 0$), entonces

$$\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}} \tag{6.34}$$

en donde θ es el ángulo entre un par de segmentos dirigidos $\ell_{\mathcal{A}}$ y $\ell_{\mathcal{B}}$ fijos, respectivamente en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, cada uno perpendicular a $\hat{\mathbf{k}}$. El ángulo se mide en un plano de referencia que contiene proyecciones de las dos rectas que se cortan en un punto P, como se muestra en la Fig. 6.2. El signo del ángulo θ está dado por la regla de la mano derecha: si el pulgar se colo-

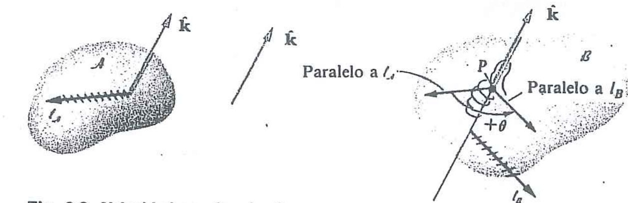


Fig. 6.2 Velocidad angular simple

ca en la dirección positiva $\hat{k}$ en P, entonces la dirección positiva de θ es la de los dedos de la mano derecha al curvarse apuntando de $\ell_{\mathcal{A}}$ hacia $\ell_{\mathcal{B}}$, como se muestra.

El tipo de movimiento rotacional dado por la Ec. (6.34) se llama **velocidad angular simple**. Un caso en que es válida la Ec. (6.34) es el del movimiento plano; sin embargo, nótese que hay más casos generales de velocidad angular simple en los que el cuerpo $\mathcal{B}$ puede también tener un movimiento traslacional en $\mathcal{A}$ paralelo a $\hat{k}$, donde sería incorrecta la designación de movimiento plano.

Para demostrar la Ec. (6.34) usamos la Fig. 6.3. (El plano de referencia es el plano del papel y el vector unitario que es constante en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es $\hat{k}$, perpendicular a la página.) Según esta figura podemos escribir

$$\begin{aligned} \hat{i} &= \hat{a}_x \cos\theta + \hat{a}_y \operatorname{sen}\theta \\ \hat{j} &= -\hat{a}_x \operatorname{sen}\theta + \hat{a}_y \cos\theta \\ \hat{k} &= \hat{a}_z \end{aligned} \tag{6.35}$$

Por lo tanto, derivando las Ecs. (6.35), obtenemos

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{i}} &= (-\hat{a}_x \operatorname{sen}\theta + \hat{a}_y \cos\theta)\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{j} \\ {}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{j}} &= (-\hat{a}_x \cos\theta - \hat{a}_y \operatorname{sen}\theta)\dot{\theta} = -\dot{\theta}\hat{i} \\ {}^{\mathcal{A}}\dot{\hat{k}} &= 0 \end{aligned} \tag{6.36}$$

y la Ec. (6.18) da, al sustituir directamente las Ecs. (6.36),

$$\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + \dot{\theta}\hat{k} \tag{6.37}$$

que es el resultado deseado.

Una última propiedad interesante de $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ es que su derivada es la misma si se calcula en $\mathcal{A}$ o en $\mathcal{B}$. Usando la Ec. (6.20) y si $\mathbf{Q}$ es $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$, obtenemos

$${}^{\mathcal{A}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \times \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$$

Este resultado no es válido para ningún otro vector diferente de cero, a menos que sea paralelo a $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$.

Resumiremos ahora aquí las propiedades de $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ que hemos examinado:

1. Es un vector único que satisface la relación

$${}^{\mathcal{A}}\dot{\mathbf{Q}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{Q}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} \times \mathbf{Q}$$

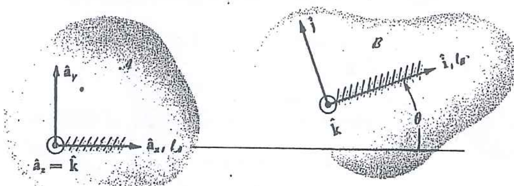


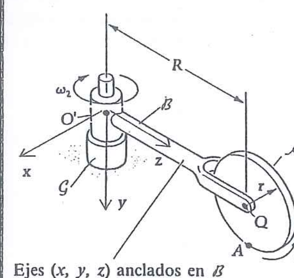
Figura. 6.3 Vectores unitarios trazados en el plano de referencia para la velocidad angular simple.

2. $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = 0$ es sinónimo de "la orientación de $\mathcal{B}$ y la de $\mathcal{A}$ no cambian". Además, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ mantienen su orientación constante, sus velocidades angulares en cualquier tercer marco son iguales.
3. $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = -\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}$.
4. $\omega_{\mathcal{D}/\mathcal{A}} = \omega_{\mathcal{D}/\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = (\omega_{\mathcal{D}/\mathcal{C}} + \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}) + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$, que puede ampliarse a cualquier número de marcos.
5. Si $\hat{k}$ es constante en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, entonces

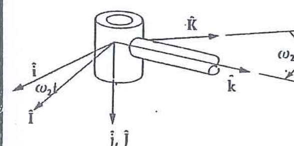
$$\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = \dot{\theta}\hat{k}$$

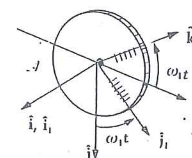
en donde θ se definió previamente.
6. ${}^{\mathcal{A}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$.

Ejemplo 6.1



Ejes (x, y, z) anclados en $\mathcal{B}$





El cuerpo $\mathcal{B}$ en el diagrama gira en el marco $\mathcal{G}$ alrededor de la vertical con rapidez angular constante ω_2 ; en $\mathcal{B}$, el disco $\mathcal{A}$ rota alrededor de su eje articulado con rapidez angular constante ω_1 , relativa a $\mathcal{B}$. (Las direcciones de rotación se muestran en la figura.) Determinar la velocidad angular de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{G}$.

Solución

Los ejes coordenados que se idican están fijos en $\mathcal{B}$. Según el teorema de la adición,*

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} &= \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \\ &= \omega_1\hat{i} + \omega_2\hat{j} \end{aligned} \tag{1}$$

Vemos en este resultado que expresar $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ en términos de sus componentes en el marco intermedio $\mathcal{A}$ ("entre" $\mathcal{A}$ y $\mathcal{G}$) $\mathcal{B}$ ha producido un resultado simple y conciso. Si hubiésemos escogido en vez de esto expresar $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ en términos de sus componentes en $\mathcal{G}$, entonces (ver la figura) con $\hat{I}$, $\hat{J}$, $\hat{K}$ fijos en $\mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} \hat{i} &= (\cos\omega_2 t)\hat{I} - (\operatorname{sen}\omega_2 t)\hat{K} \\ \hat{j} &= \hat{J} \end{aligned}$$

que, sustituido en la Ec. (1), daría:

$$\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} = (\omega_1 \cos\omega_2 t)\hat{I} + \omega_2\hat{J} - (\omega_1 \operatorname{sen}\omega_2 t)\hat{K}$$

Si hubiésemos escrito $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ en términos de sus componentes según sus direcciones $(\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1)$ fijas en $\mathcal{A}$, entonces con

$$\begin{aligned} \hat{i} &= \hat{i}_1 \\ \hat{j} &= (\cos\omega_1 t)\hat{j}_1 - (\operatorname{sen}\omega_1 t)\hat{k}_1 \end{aligned}$$

*Aunque la Ec. (6.18) permite siempre calcular directamente la velocidad angular, es por lo común más fácil establecer el vector ω usando el teorema de la adición.

obtendríamos, usando nuevamente la Ec. (1):

$$\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} = \omega_1\hat{\mathbf{i}}_1 + (\omega_2 \cos \omega_1 t)\hat{\mathbf{j}}_1 - (\omega_2 \operatorname{sen} \omega_1 t)\hat{\mathbf{k}}_1$$

Vemos que al expresar $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ en términos de sus componentes en $\mathcal{A}$ o en $\mathcal{G}$ se obtiene una expresión más larga que en $\mathcal{B}$; esas expresiones se vuelven aún más complicadas si ω_1 ó ω_2 varían en el tiempo.

Pregunta 6.3 ¿Por qué?

El lector debe notar que aunque son diferentes cada una de las tres representaciones anteriores de $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ en su forma, todas generan el mismo vector.

Presentamos ahora un amplio ejemplo práctico del uso de las propiedades de ω. En este ejemplo tres cuerpos distintos están en movimiento en un marco de referencia y sus velocidades angulares se relacionan usando los teoremas relativos a las velocidades angulares y a la adición de ellas.

Ejemplo 6.2

La *unión* (o *junta*) *universal* (o *de Hooke*) es un mecanismo que sirve para transmitir potencia entre dos barras ejes (o árboles) no colineales. La Fig. 1 muestra una junta universal en la que los ejes $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ están fuera de alineación según el ángulo α.

Cada árbol está montado en chumaceras fijas al marco de referencia $\mathcal{I}$. Los árboles cuyas líneas ejes se cortan en el punto A, están rígidamente unidos a las horquillas o yugos $\mathcal{Y}_1$ y $\mathcal{Y}_2$. Una cruceta rígida $\mathcal{C}$ es el elemento de unión entre las horquillas. Una barra de la cruceta (indicada por el vector unitario $\hat{\mathbf{u}}_1$) gira en cojinetes fijos en $\mathcal{Y}_1$, en D_1 y en E_1, mientras que la otra barra (vector unitario $\hat{\mathbf{u}}_2$) gira en cojinetes fijos en $\mathcal{Y}_2$, en D_2 y en E_2. Las barras o travesaños

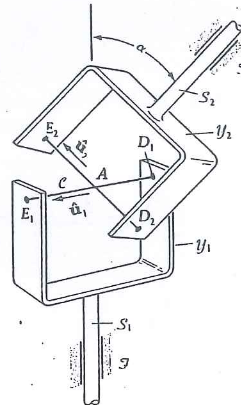


Figura 1

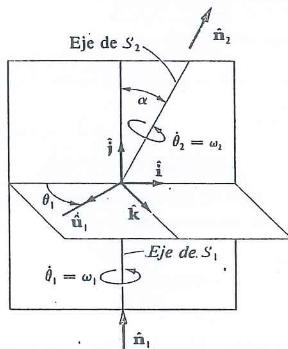


Figura 2

de la cruceta $\mathcal{C}$ son idénticos; forman ángulo recto y cada una es perpendicular a su eje respectivo.

La Fig. 2 muestra que θ_1 mide la posición angular de $\mathcal{S}_1$ en $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{S}_1$ (considerado como el árbol motor o impulsor) tiene velocidad angular $\omega_{\mathcal{S}_1/\mathcal{I}} = \omega_1\hat{\mathbf{n}}_1$, y la velocidad angular resultante de $\mathcal{S}_2$ es $\omega_{\mathcal{S}_2/\mathcal{I}} = \omega_2\hat{\mathbf{n}}_2$, hallar la relación de ω_2 a ω_1 en términos de θ_1 y α; graficar ω_2/ω_1 contra θ_1 para $\alpha = 0$, 20, 40, 60 y 80 grados. Si θ_2 es el ángulo de rotación de $\mathcal{S}_2$, investigar la relación de θ_2 contra θ_1 para los mismos cinco valores de α.

Pregunta 6.4 En la Fig. 2 nótese que $\hat{\mathbf{n}}_2$ no tiene componente en $\hat{\mathbf{k}}$. ¿Por qué no representa esto una pérdida de generalidad?

Solución

Usando el teorema de adición podemos relacionar las velocidades angulares de los cuatro cuerpos rígidos: $\mathcal{B}_2$ (árbol $\mathcal{S}_2$ más su horquilla $\mathcal{Y}_2$), $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}_1$ (árbol $\mathcal{S}_1$ más su horquilla $\mathcal{Y}_1$) y $\mathcal{I}$:

$$\omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{C}} + \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_1} + \omega_{\mathcal{B}_1/\mathcal{I}} \tag{1}$$

Puesto que $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ tienen ambos velocidad angular simple en $\mathcal{I}$, podemos escribir

$$\omega_{\mathcal{B}_1/\mathcal{I}} = \omega_1\hat{\mathbf{n}}_1 \text{ or } \dot{\theta}_1\hat{\mathbf{n}}_1 \qquad \omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{I}} = \omega_2\hat{\mathbf{n}}_2 \text{ or } \dot{\theta}_2\hat{\mathbf{n}}_2 \tag{2}$$

Sabemos también de la Fig. 1 que la cruceta $\mathcal{C}$ tiene velocidad angular simple en *cada uno* de los cuerpos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Por ejemplo, el único movimiento que $\mathcal{C}$ puede tener con respecto a $\mathcal{B}_1$ es una rotación alrededor de D_1E_1 (recta fija en *ambos* cuerpos). Lo mismo es cierto para el movimiento de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{B}_2$. Por lo tanto,

$$\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_1} = \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_1}\hat{\mathbf{u}}_1 \qquad \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_2} = -\omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{C}} = -\omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{C}}\hat{\mathbf{u}}_2 \tag{3}$$

en donde $\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_1}$ y $\omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{C}}$ con las magnitudes desconocidas de los vectores respectivos.

A continuación debemos expresar $\hat{\mathbf{n}}_1$, $\hat{\mathbf{n}}_2$, $\hat{\mathbf{u}}_1$ y $\hat{\mathbf{u}}_2$ en términos de un conjunto común de vectores unitarios. Podremos entonces obtener tres ecuaciones escalares de (1) y expresar ω_2 en función de ω_1. En la Fig. 2, tres vectores unitarios son obvios:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_1 &= \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{n}}_2 &= \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\alpha\,\hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{u}}_1 &= -\cos\theta_1\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta_1\,\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{4}$$

Para obtener $\hat{\mathbf{u}}_2$, notemos que es perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}_2$ y a $\hat{\mathbf{u}}_1$. Formemos el producto vectorial $\hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2$ que da la dirección asignada de $\hat{\mathbf{n}}_2$ (nótese que $\hat{\mathbf{n}}_2 \times \hat{\mathbf{u}}_1$ es opuesto); $\hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2$ no es generalmente un vector unitario, por lo que para obtener $\hat{\mathbf{u}}_2$ lo dividimos entre su magnitud:

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{\hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2}{|\hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2|} = \frac{-\cos\alpha \operatorname{sen}\theta_1\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta_1\,\hat{\mathbf{j}} - \cos\alpha\cos\theta_1\,\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\theta_1}} \tag{5}$$

Sustituyendo las Ecs. (4) y (5) en las Ecs. (2) y (3) y luego sustituyendo las expresiones resultantes de la velocidad angular en la Ec. (1), obtenemos una ecuación vectorial que tiene las siguientes tres ecuaciones escalares componentes:

$$\text{Coeficientes de } \hat{\mathbf{i}}: \quad \omega_2 \operatorname{sen}\alpha = R\omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{C}}(-\cos\alpha \operatorname{sen}\theta_1) + \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_1}(-\cos\theta_1) \qquad (6)$$

$$\text{Coeficientes de } \hat{\mathbf{j}}: \quad \omega_2 \cos\alpha = R\omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{C}}(\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta_1) + \omega_1 \qquad (7)$$

$$\text{Coeficientes de } \hat{\mathbf{k}}: \quad 0 = R\omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{C}}(-\cos\alpha\cos\theta_1) + \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_1}(\operatorname{sen}\theta_1) \qquad (8)$$

en donde $R = 1/\sqrt{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\theta_1}$. Eliminando $\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_1}$ entre (6) y (8) resulta

$$\omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{C}} = \frac{-\omega_2 \tan\alpha \operatorname{sen}\theta_1}{R} \qquad (9)$$

y la sustitución de (9) en (7) da:

$$\omega_2 = \left(\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2\theta_1}\right)\omega_1$$

de manera que

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos\alpha}{1 - \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\theta_1} \qquad (10)$$

La Fig. 3 muestra la gráfica del valor de ω_2 para un cuarto de vuelta de $\mathcal{S}_1$ en el espacio. Nótese que como $\cos\theta_1$ está al cuadrado, las curvas se reflejan respecto a una línea vertical en $\theta_1 = 90°$ para $90° \leq \theta_1 \leq 180°$; entre 180° y 360°, se tiene nuevamente una reflexión, esta vez de las curvas entre 0° y 180°. Obsérvese que para ángulos α muy grandes, el árbol $\mathcal{S}_2$ debe girar muy rápidamente en y cerca de $\theta_1 = 0$; cuando $\alpha = 90°$, los cuerpos alcanzan una configura-

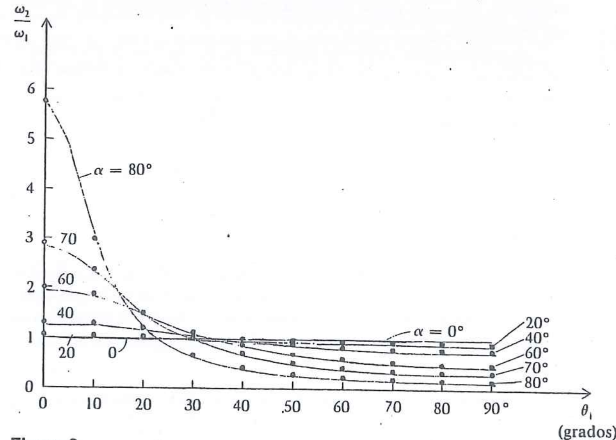


Figura 3

ción en la que no pueden girar en absoluto; esto se llama *traba de unión*. Nótese además que un desalineamiento de unos 10° genera una variación en la rapidez de sólo aproximadamente 3° en una revolución.

Ahora analizamos los ángulos de rotación θ_1 (de $\mathcal{S}_1$) y θ_2 (de $\mathcal{S}_2$). Como $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tienen velocidades angulares simples en $\mathcal{I}$, se tendrá: $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ y $\omega_2 = \dot{\theta}_2$, por lo que (de la Ec. 10):

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_1 \cos\alpha}{1 - \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\theta_1} \qquad (11)$$

Integrando (11) se obtiene

$$\theta_2 + \text{constante} = \int \frac{\cos\alpha \, d\theta_1}{1 - \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\theta_1} = \tan^{-1}\left(\frac{\tan\theta_1}{\cos\alpha}\right) \qquad (12)$$

La constante de integración es cero si definimos $\theta_2 = 0$ cuando $\theta_1 = 0$. Entonces θ_2 puede graficarse como función de θ_1 para los mismos valores representativos de α (Fig. 4). Si $\alpha = 0$, entonces $\theta_1 \equiv \theta_2$ y la curva es una recta a 45°. Si $\alpha \neq 0$, note en las curvas que para $0 \leq \theta_1 \leq 90°$, el árbol $\mathcal{S}_2$ ha girado *más* que $\mathcal{S}_1$; luego $\mathcal{S}_1$ lo alcanza en $\theta = 90°$, y de $\theta_1 = 90°$ a 180° el ángulo θ_2 de $\mathcal{S}_2$ va *retrasado respecto* a θ_1.

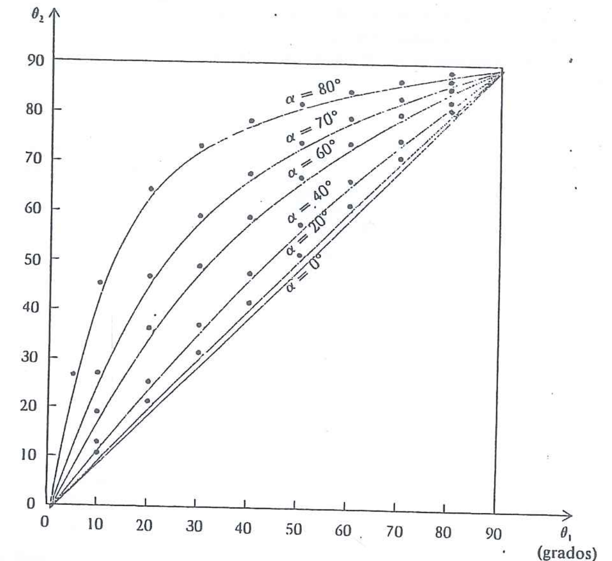


Figura 4

Pregunta 6.5 Explique la razón de lo anterior usando la Ec. 12.

De 180° a 360°, el ciclo se repite y todo vuelve a la misma posición de partida ($\theta_1 = \theta_2 = 360°$) al mismo tiempo.

Problemas / Sección 6.3

6.1 Verifique en el Ejemplo 1.1 que ${}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{A}}$ es efectivamente $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{A}$, en donde $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = \dot{\theta}(-\hat{\mathbf{k}})$ (Fig. P6.1.)

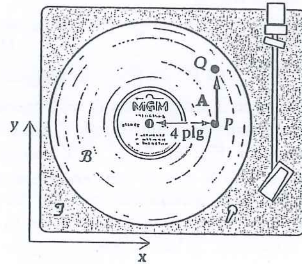


Figura P6.1

6.2 Las velocidades angulares de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en un marco de referencia $\mathcal{I}$ son, respectivamente, $10\hat{\mathbf{n}}_1$ rad/s y $7\hat{\mathbf{n}}_2$ rad/s. Encuentre la velocidad angular de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$ expresada en términos de $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ (Fig. P6.2).

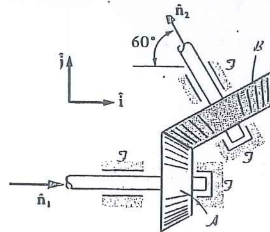


Figura P6.2

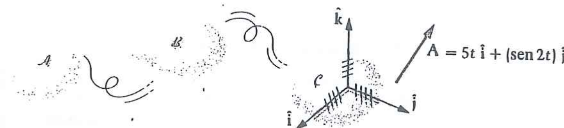


Figura P6.5

6.3 Un vector v está dado en función del tiempo por $\mathbf{v} = t^3\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$ m/s, en donde ($\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$) son vectores unitarios cuyas direcciones están fijas en un marco $\mathcal{H}$. La velocidad angular de $\mathcal{H}$ en el marco $\mathcal{R}$ es $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{H}/\mathcal{R}} = t\hat{\mathbf{i}} + t^2\hat{\mathbf{j}} + t^3\hat{\mathbf{k}}$ rad/s. Calcule la derivada de v en el marco $\mathcal{R}$, esto es, ${}^{\mathcal{R}}\dot{\mathbf{v}}$: (a) en función de t; (b) en $t = 1$ s; (c) en $t = 2$ s.

6.4 En el problema anterior determine ${}^{\mathcal{R}}\ddot{\mathbf{v}}$.

6.5 Observe los tres marcos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, y el vector A definido en la Fig. P6.5 en términos de sus componentes en $\mathcal{C}$; también $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} = t^2\hat{\mathbf{i}} + t^3\hat{\mathbf{j}}$ y $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = 5\hat{\mathbf{k}}$. Encuentre ${}^{\mathcal{A}}\dot{\mathbf{A}}$ en $t = \pi/4$ s.

6.6 En el Problema P1.155 se definen los vectores unitarios tangente, normal y binormal de una curva en el espacio $\mathcal{S}$. Sea $\mathcal{B}$ un marco que se mueve con respecto a $\mathcal{S}$ en forma tal que $\hat{\mathbf{e}}_t$, $\hat{\mathbf{e}}_n$ y $\hat{\mathbf{e}}_b$ están siempre fijos en $\mathcal{B}$. Use la definición (Ec. 6.18) de velocidad angular para encontrar la de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{S}$. Note que

$$\frac{d}{dt}(\ ) = \left[\frac{d}{ds}(\ )\right]\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d(\ )}{ds}$$

6.7 La antena $\mathcal{A}$ en la Fig. P6.7 está orientada con las siguientes tres rotaciones:

1. Azimut, respecto a y fijo en $\mathcal{G}$; $\omega_{\mathcal{I}_1/\mathcal{G}} = 3t^2$ rad/s

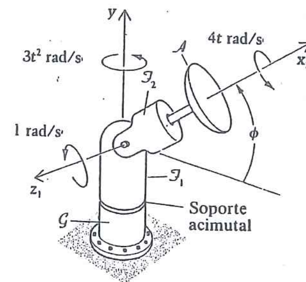


Figura P6.7

2. Elevación, respecto a z_1 fijo en un primer marco intermedio $\mathcal{I}_1$; $\omega_{\mathcal{I}_2/\mathcal{I}_1} = 1$ rad/s
3. Una rotación de polarización respecto al eje x_2 de la antena (fijo en el segundo marco intermedio $\mathcal{I}_2$ y en $\mathcal{A}$); $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{I}_2} = 4t$ rad/s

Si la estructura está en la posición $\phi = 0$ en $t = 0$, encuentre $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ en $t = \pi/2$ s. Use los siguientes vectores unitarios fiios en dirección en $\mathcal{I}_1$: $\hat{\mathbf{j}}$ paralelo a y, $\hat{\mathbf{k}}$ paralelo a z_1 e $\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}$.

6.8 Demuestre que el ángulo θ_2 de la unión o junta universal en el Ejemplo 6.2 puede también obtenerse multiplicando escalarmente $\hat{\mathbf{k}}$ con $\hat{\mathbf{u}}_2$.

6.9 Un aparato para simular condiciones espaciales permite giros alrededor de ejes ortogonales, como se muestra en la Fig. P6.9. Determine la velocidad angular en el marco de la cápsula $\mathcal{C}$ que contiene a un astronauta. Exprese el resultado en términos de los vectores unitarios ($\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$) fijos en la viga $\mathcal{B}$. Note que la rotación ω_y es alrededor de un eje fijo en $\mathcal{C}$ y en $\mathcal{A}$, pero *no* en $\mathcal{B}$; este eje es paralelo a y en $t = 0$ y ω_x es una constante.

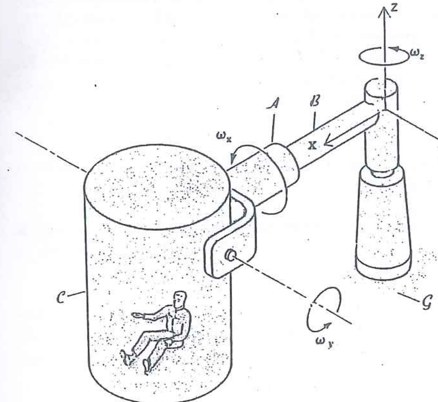


Figura P6.9

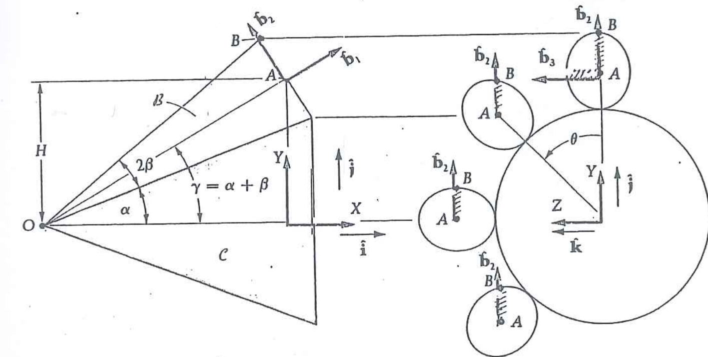


Figura P6.10

** 6.10 El cono exterior $\mathcal{B}$ en la Fig. P6.10 tiene el siguiente movimiento prescrito con respecto al cono interior fijo $\mathcal{C}$:

1. Los vértices permanecen juntos.
2. La recta AB (un radio en la base fijo en $\mathcal{B}$) siempre se encuentra en algún plano vertical paralelo a XY.
3. El cono $\mathcal{B}$ resbala sobre $\mathcal{C}$; o sea siempre hay una línea de contacto entre O y un punto del círculo base de $\mathcal{C}$.
4. El punto A de $\mathcal{B}$ gira alrededor del eje x en un círculo vertical con rapidez constante $H\dot{\theta}$.

Use el teorema de la adición para demostrar que la velocidad angular de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ está dada por

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}} = \frac{\dot{\theta}(\tan^2\gamma\cos^2\theta\hat{\mathbf{i}} - \tan\gamma\cos\theta\hat{\mathbf{j}} - \operatorname{sen}\theta\tan\gamma\hat{\mathbf{k}})}{1 + \tan^2\gamma\cos^2\theta}$$

6.11 En el problema anterior encuentre $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}$ si la proyección de AB sobre el plano YX que pasa por A está siempre alineada con el radio (Fig. P6.11).

6.12 Determine $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{C}}$ en el problema anterior si el cono exterior *rueda* sobre el cono interior (Fig. P6.12).

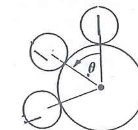


Figura P6.11

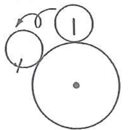


Figura P6.12

*Los asteriscos señalan los problemas más difíciles.

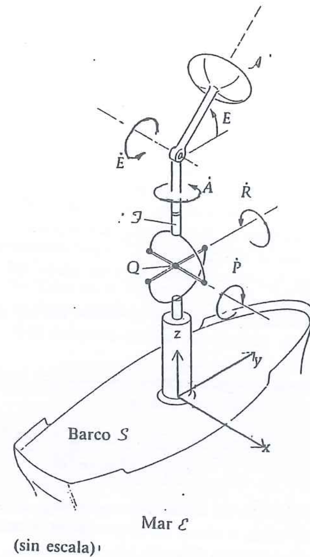


Figura P6.13

Un método usual para estabilizar antenas marinas es por medio de masas pendulares junto con el efecto giroscópico de volantes giratorios. En la Fig. P6.13 el barco (marco $\mathcal{S}$) cabecea (alrededor de x), se balancea (alrededor de y) y derrapa (alrededor de z) en el mar (marco $\mathcal{E}$). El marco $\mathcal{F}$ justamente arriba de una junta universal debe formar una plataforma estable sobre la que la antena pueda fácilmente posicionarse en azimut (ángulo A) y en elevación (ángulo E). El marco $\mathcal{F}$ permanece a nivel gracias a las rotaciones P y R que ayudan a cancelar el cabeceo y el balanceo, respectivamente. Los tres problemas siguientes se basan en este sistema.

El sistema INMARSAT de comunicación por satélite requiere que los sistemas de antenas marinas permanezcan operativas hasta los límites siguientes de oscilación:

Cabeceo:	$\pm$ 10° en 6 s.
Balanceo:	$\pm$ 30° en 8 s
Derrape:	$\pm$ 8° en 50 s

* **6.13** Suponga ondas senoidales para cada uno de esos tres movimientos y suponga derrape sobre balanceo sobre cabeceo, esto es, el orden supuesto de las rotaciones del barco es (1) cabeceo, del marco $\mathcal{E}$ a un marco intermedio $\mathcal{F}_1$; (2) balanceo, de $\mathcal{F}_1$ a un segundo marco intermedio $\mathcal{F}_2$, y (3) derrape, de $\mathcal{F}_2$ al marco $\mathcal{S}$. Escriba la velocidad angular del barco $\mathcal{S}$ en el mar (marco fijo de la Tierra $\mathcal{E}$), expresada según los ejes fijos al barco (x, y, z). *Sugerencia:* Por ejemplo, θ (cabeceo) será de $10\,\pi/180 \operatorname{sen} 2\,\pi t/6$ rad.

6.14 Formule la velocidad angular de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{S}$, expresada según los ejes (x, y, z).

6.15 Exprese la velocidad angular de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{E}$, usando los resultados de los dos problemas precedentes y el teorema de la adición.

** **6.16** Un robot fabricado por Heath Company tiene el brazo mecánico mostrado en la Fig. P6.16a y en la fotografía anexa. Su hombro $\mathcal{S}$ se extiende desde la cabeza $\mathcal{H}$, que puede girar 350° alrededor de z en 30 s con relación al marco de referencia $\mathcal{F}$. El brazo puede girar 150° alrededor del eje y en 26 s. [Los ejes (x, y, z) están fijos en la cabeza $\mathcal{H}$.] La parte del brazo a la izquierda del punto E puede extenderse (y retraerse) hasta 5 plg en 30 s. La muñeca $\mathcal{W}$ tiene dos movimientos: puede pivotear hasta 180° respecto a y' en 10 s y girar (alrededor de x') hasta 350° en 4 s. Los ejes (x', y', z') están fijos en $\mathcal{W}$. Finalmente el asidor (tenaza) $\mathcal{G}$ pueden abrir (y cerrar) 3.5 plg en 3 s pero se supone aquí que es un círculo cerrado con un diámetro de 2.5 plg. Se muestran en la figura las dimensiones aproximadas.

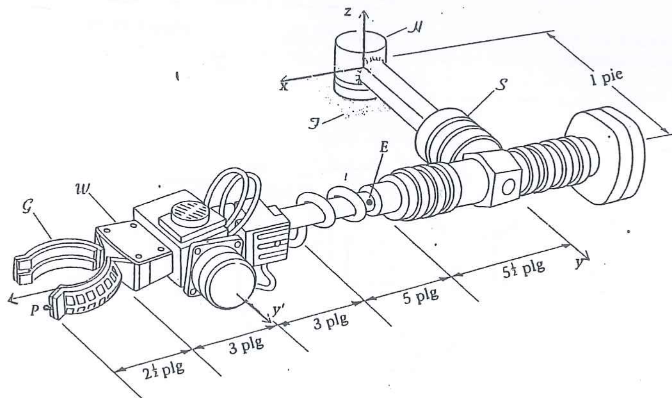


Figura P6.16a

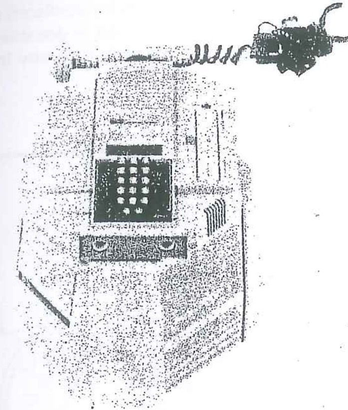
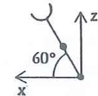


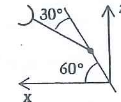
Fig. P6.16b (Cortesía de Heath Company)

En este problema suponga que todos los movimientos del robot (excepto la apertura del asidor ocurren simultáneamente respecto a ejes positivos, con sus rapideces promedio respectivas. Determine la velocidad angular del asidor $\mathcal{G}$ relativa a $\mathcal{F}$, y exprésela en términos de vectores unitarios en $\mathcal{H}$ en el instante en que

1. El ángulo de rotación θ del hombro es —60°:



2. La muñeca ha pivoteado 30°



6.4 El vector aceleración angular

Para aplicar lo que hemos aprendido sobre velocidad angular a la cinemática de cuerpos rígidos, necesitamos entender también el concepto de su derivada. La **aceleración angular** del marco $\mathcal{B}$ respecto al marco $\mathcal{A}$ se define como

$$\alpha_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} = {}^{\mathcal{A}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \tag{6.38}$$

(Nótese que según la última propiedad de $\omega_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}$ descrita en la sección anterior la derivada puede también tomarse en $\mathcal{B}$, pero generalmente en ningún otro marco.)

Es importante notar que el teorema de la adición (Ec. 6.27) *no se cumple* para aceleraciones angulares. Obsérvese que

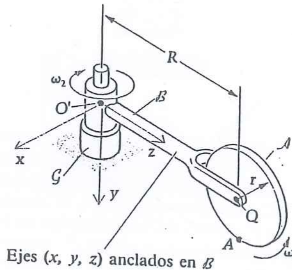
$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathcal{C}|\mathcal{A}} &= {}^{\mathcal{A}}\dot{\omega}_{\mathcal{C}|\mathcal{A}} = {}^{\mathcal{A}}\overline{\omega_{\mathcal{C}|\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}}^{\,\cdot} \\
&= {}^{\mathcal{A}}\dot{\omega}_{\mathcal{C}|\mathcal{B}} + {}^{\mathcal{A}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \\
&= \left({}^{\mathcal{B}}\dot{\omega}_{\mathcal{C}|\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \times \omega_{\mathcal{C}|\mathcal{B}}\right) + \alpha_{\mathcal{B}|\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

$$\alpha_{\mathcal{C}|\mathcal{A}} = \alpha_{\mathcal{C}|\mathcal{B}} + \alpha_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} + \omega_{\mathcal{B}|\mathcal{A}} \times \omega_{\mathcal{C}|\mathcal{B}} \tag{6.39}$$

Vemos que aparece un término extra (el producto vectorial de dos velocidades angulares) que impide generalizar el teorema para el caso de las aceleraciones. Este término se denomina a veces *término giroscópico*; nótese que desaparece en el movimiento plano, en cuyo caso tenemos un teorema de adición de las α (que son entonces de la forma, $\ddot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$).

Ejemplo 6.3

El cuerpo $\mathcal{B}$ en el diagrama rota en el marco $\mathcal{G}$ alrededor de un eje vertical con rapidez angular constante ω_2. (Se muestran las direcciones de rotación.) Determinar la aceleración angular de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{G}$.



Ejes (x, y, z) anclados en $\mathcal{B}$

Solución

Como vimos en el Ejemplo 6.1,
As we saw in Example 6.1,

$$\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} = \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} = \omega_1\hat{\mathbf{i}} + \omega_2\hat{\mathbf{j}}$$

Luego usando la Ec. (6.20) y notando que $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ está expresada en términos de ejes anclados en $\mathcal{B}$, desplazamos la derivada* y obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} = {}^{\mathcal{G}}\dot{\omega}_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} &= {}^{\mathcal{B}}\dot{\omega}_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \\ &= 0 + \omega_2\hat{\mathbf{j}} \times (\omega_1\hat{\mathbf{i}} + \omega_2\hat{\mathbf{j}}) \\ &= -\omega_1\omega_2\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Obsérvese que el mismo resultado se obtiene usando la Ec. (6.39) con los marcos $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$, y $\mathcal{A}$ reemplazados por los $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y $\mathcal{G}$, respectivamente.

Pregunta 6.6 ¿Por qué es ${}^{\mathcal{B}}\dot{\omega}_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} = 0$ en el ejemplo anterior?

Ejemplo 6.4

Determinar la aceleración angular de la cruceta $\mathcal{C}$ relativa al marco $\mathcal{I}$ en el Ejemplo 6.2, para el caso en que $\dot{\theta}_1$ es constante. Exprese el resultado en términos de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{n}}_2$, $\hat{\mathbf{u}}_2$ y $\hat{\mathbf{v}}_2 = \hat{\mathbf{n}}_2 \times \hat{\mathbf{u}}_2$ fijos en $\mathcal{B}_2$.

Solución

Usando la definición (Ec. 6.38) y el teorema de la adición,

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathcal{C}/\mathcal{I}} &= {}^{\mathcal{I}}\dot{\omega}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}} \\ &= {}^{\mathcal{I}}\dot{\omega}_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_2} + {}^{\mathcal{I}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}_2/\mathcal{I}} \qquad (1) \\ &= {}^{\mathcal{B}_2}\dot{\omega}_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_2} + \omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{I}} \times \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_2} + {}^{\mathcal{I}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}_2/\mathcal{I}}\end{aligned}$$

*"Desplazar la derivada" significa hacerla pasar de un marco de referencia en el cual es inconveniente la derivación, a uno en el cual es favorable efectuarla.

Primero nos concentramos en el primer término del segundo miembro de la Ec. (1). En el Ejemplo 6.2 teníamos

$$\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_2} = \dot{\theta}_2 T_\alpha s_1 \sqrt{1 - s_\alpha^2 c_1^2}\,\hat{\mathbf{u}}_2 \qquad (2)$$

en donde usamos la notación s_α = sen α, c_α = cos α, T_α = tan α, s_1 = sen θ_1 y c_1 = cos θ_1. También sabemos del Ejemplo 6.2 que

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_1 c_\alpha}{1 - s_\alpha^2 c_1^2} \qquad (3)$$

Sustituyendo $\dot{\theta}_2$ de la Ec. (3) en la (2) y derivando el resultado en $\mathcal{B}_2$ ($\hat{\mathbf{u}}_2$ es constante ahí) se obtiene, después de simplificar,

$${}^{\mathcal{B}_2}\dot{\omega}_{\mathcal{C}/\mathcal{B}_2} = \frac{c_1 s_\alpha c_\alpha^2 \dot{\theta}_1^2}{(1 - s_\alpha^2 c_1^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{u}}_2 \qquad (4)$$

El segundo término en la Ec. (1) es

$$\dot{\theta}_2\hat{\mathbf{n}}_2 \times \dot{\theta}_2 T_\alpha s_1 \sqrt{1 - s_\alpha^2 c_1^2}\,\hat{\mathbf{u}}_2$$

que al simplificar queda

$$\frac{\dot{\theta}_1^2 s_\alpha c_\alpha s_1}{(1 - s_\alpha^2 c_1^2)^{3/2}}\,\hat{\mathbf{v}}_2 \qquad (5)$$

El último término en la Ec. (1) es:

$${}^{\mathcal{I}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}_2/\mathcal{I}} = \ddot{\theta}_2\hat{\mathbf{n}}_2 = \frac{-2\dot{\theta}_1^2 s_\alpha^2 c_\alpha s_1 c_1}{(1 - s_\alpha^2 c_1^2)^2}\,\hat{\mathbf{n}}_2 \qquad (6)$$

en donde hemos derivado la Ec. (3).

La solución para $\alpha_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}$ es, por consiguiente, la suma de los vectores en las Ecs. (4), (5) y (6):

$$\alpha_{\mathcal{C}/\mathcal{I}} = \left[c_\alpha c_1\hat{\mathbf{u}}_2 + s_1\hat{\mathbf{v}}_2 - \frac{2 s_\alpha s_1 c_1}{\sqrt{1 - s_\alpha^2 c_1^2}}\,\hat{\mathbf{n}}_2\right]\frac{s_\alpha c_\alpha \dot{\theta}_1^2}{(1 - s_\alpha^2 c_1^2)^{3/2}}$$

Notemos que hasta ahora en el Capítulo 6 no hemos mencionado velocidades ni aceleraciones. En tanto que las velocidades angulares de un cuerpo a otro sean simples, podemos efectuar un gran número de cálculos con las velocidades y aceleraciones angulares usando simplemente las definiciones y propiedades de ω y α.

Problemas / Sección 6.4

6.17 Sabemos que una de las propiedades del vector velocidad angular es que ${}^{\mathcal{I}}\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = {}^{\mathcal{B}}\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$. Demuestre que esto *no* es una propiedad del vector aceleración angular $\alpha_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$.

6.18 En el Problema 6.6, encuentre la aceleración angular de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{S}$.

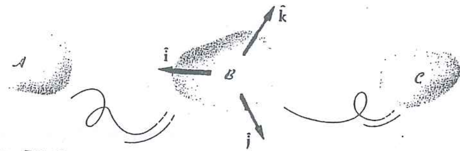


Figura P6.19

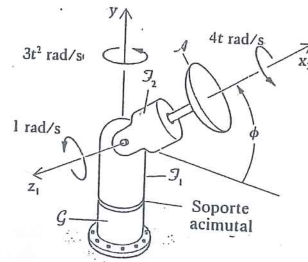


Figura P6.21

6.19 Las componentes de dos vectores de velocidad angular se indican en la siguiente tabla como funciones del tiempo. Los vectores unitarios ortogonales $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ están fijos en dirección en el marco $\mathcal{B}$. Encuentre la aceleración angular de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{A}$: (a) como función del tiempo; (b) en $t = 0$ s; (c) en $t = 0.5$ s (Fig. P6.19).

	$\hat{\mathbf{i}}$	$\hat{\mathbf{j}}$	$\hat{\mathbf{k}}$
$\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{B}}$	$4t^2$	$2t$	6
$\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$	sen t	cos t	$7t$

6.20 Los vectores velocidad angular y aceleración angular, $\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}$ y $\alpha_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}$, respectivamente, están expresados en términos de sus componentes en un tercer marco $\mathcal{B}$ por las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{A}} &= \omega_1\hat{\mathbf{i}} + \omega_2\hat{\mathbf{j}} + \omega_3\hat{\mathbf{k}}\\ \alpha_{\mathcal{C}/\mathcal{A}} &= \alpha_1\hat{\mathbf{i}} + \alpha_2\hat{\mathbf{j}} + \alpha_3\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}\right\}$$ (que los vectores unitarios están fijos en $\mathcal{B}$)

Determine la restricción en el marco $\mathcal{B}$ para la cual $\alpha_i = \dot{\omega}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

6.21 La antena $\mathcal{A}$ en la Fig. P6.21 (Problema 6.7) está orientada con las siguientes tres rotaciones:

1. Azimut, respecto a y fijo en $\mathcal{G}$ con $\omega_{\mathcal{I}_1/\mathcal{G}} = 3t_2$ rad/s.
2. Elevación, respecto a z_1 fijo en un primer marco intermedio $\mathcal{I}_1$ con velocidad constante $\omega_{\mathcal{I}_2/\mathcal{I}_1} = 1$ rad/s.
3. Una rotación de polarización respecto al eje x_2 de la antena (fijo en el segundo marco intermedio $\mathcal{I}_2$ y en $\mathcal{A}$) con $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{I}_2} = 4t$ rad/s.

Si la estructura está en la posición $\phi = 0$ en $t = 0$, encuentre $\alpha_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ en $t = \pi/2$ s. Use vectores unitarios fijos en dirección en $\mathcal{I}_1$.

6.22 En el Problema 6.9 encuentre la aceleración angular de la cápsula $\mathcal{C}$ en $\mathcal{G}$. Considere a ω_z y ω_x como constantes.

***6.23** En el Problema 6.13 encuentre la aceleración angular $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ en $t = 24$ s.

6.24 Vea la Fig. P6.24. Los ejes x y, z están fijos en el cuerpo $\mathcal{A}$ que gira en $\mathcal{I}$ respecto al eje z con velocidad angular $\omega_1\hat{\mathbf{k}}$. El brazo $\mathcal{B}$, unido rigidamente a $\mathcal{A}$, soporta un cojinete sobre el que gira $\mathcal{C}$ con velocidad angular $\omega_2\hat{\mathbf{j}}$ respecto a $\mathcal{A}$. Finalmente, el cuerpo $\mathcal{D}$ gira alrededor de la dirección $\hat{\mathbf{u}}$ (que coincide con los ejes de simetría de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$) con $\omega_3\hat{\mathbf{u}}$ relativa a $\mathcal{C}$. Si ω_1, ω_2 y ω_3 son todas funciones del tiempo, encuentre la aceleración angular de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{I}$ en el instante en que $\hat{\mathbf{u}}$ forma ángulos con x y z de 135° y 45°, respectivamente.

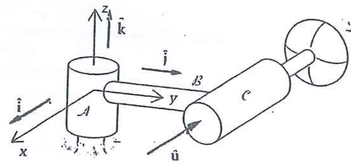


Figura P6.24

6.5 Velocidad y Aceleración en marcos de referencia móviles

En ciertas situaciones prácticas un punto se mueve con respecto a *dos* marcos (o cuerpos) de interés. Por ejemplo, un pasador P puede estar deslizándose en la ranura de un cuerpo $\mathcal{B}$ que a su vez está en movimiento en otro marco $\mathcal{I}$ (Fig. 6.4). En problemas como éste, con frecuencia interesa la relación entre las velocidades (y también las aceleraciones) de P en los

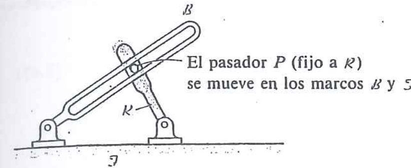


Fig. 6.4 Ejemplo de un punto con movimiento respecto a dos marcos de referencia.

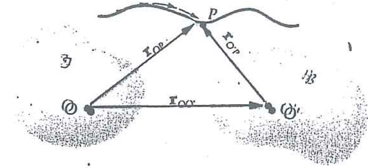


Fig. 6.5 El punto P se mueve con respecto a los marcos de referencia $\mathcal{B}$ y $\mathcal{I}$.

dos marcos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{I}$. Ya estudiamos este problema en movimiento plano en las Secciones 3.7 y 3.8. Ahora se analizará en tres dimensiones.

Escogeremos arbitrariamente $\mathcal{I}$ como un marco de referencia para el cuerpo móvil $\mathcal{B}$, pero enfatizamos que ambos son marcos y también cuerpos; en tanto que se consideren rígidos, los nombres significan lo mismo. La Fig. 6.5 muestra el esquema general.

Sean O y O' puntos fijos de $\mathcal{I}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente; derivando la relación que los une

$$\mathbf{r}_{OP} = \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{r}_{O'P} \tag{6.40}$$

en $\mathcal{I}$ obtenemos*

$${}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{r}}_{OP} = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{r}}_{OO'} + {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} \tag{6.41}$$

Como O está fijo en $\mathcal{I}$, los primeros dos vectores en la Ec. (6.41) son las velocidades en $\mathcal{I}$ de P y O':

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{I}} + {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} \tag{6.42}$$

El último vector en la Ec. (6.42) presenta un problema. No es la velocidad de P en $\mathcal{I}$, porque el punto O' no está fijo en $\mathcal{I}$, ni es la velocidad de P en $\mathcal{B}$ porque la derivada no está tomada ahí. Para resolver este dilema, volveremos a escribir el término desplazando la derivada de $\mathcal{I}$ a $\mathcal{B}$ mediante la Ec. (6.20):

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{I}} + ({}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{O'P}) \tag{6.43}$$

$$= \mathbf{v}_{O'/\mathcal{I}} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{O'P}$$

$$= \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} + (\mathbf{v}_{O'/\mathcal{I}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{O'P}) \tag{6.44}$$

Podemos ahora deducir la ecuación que relaciona las velocidades de dos puntos del mismo cuerpo rígido a partir de la Ec. (6.44). Temporalmente sea P un punto fijo de $\mathcal{B}$; entonces $\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ y

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{I}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{O'P} \tag{6.45}$$

o

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{O'} + \omega \times \mathbf{r}_{O'P} \tag{6.46}$$

que es la misma que la Ec. (3.5) del movimiento plano, sólo que ahora los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ pueden tener también componentes en z y el vector ω puede tener componentes en x y en y, además de la componente en z.

*Los superíndices en la Ec. (6.41) son ahora necesarios para designar el marco de referencia en el que se efectúa la derivación.

Volvamos al caso general en que P no está necesariamente unido a $\mathcal{B}$ o a $\mathcal{J}$; sea P el punto de $\mathcal{B}$ (o de $\mathcal{B}$ extendido) coincidente con $P_{\mathcal{B}}$. La Ec. (6.44) es entonces

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{J}} = \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{v}_{P_{\mathcal{B}}/\mathcal{J}} \tag{6.47}$$

En palabras la Ec. (6.47) se expresa:

$$\begin{bmatrix}\text{Velocidad de}\\ P \text{ en } \mathcal{J}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Velocidad de}\\ P \text{ en } \mathcal{B}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Velocidad en } \mathcal{J} \text{ del}\\ \text{punto fijo de } \mathcal{B}\\ \text{coincidente con } P\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{J}} \quad = \quad \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} \quad + \quad \mathbf{v}_{P_{\mathcal{B}}/\mathcal{J}}$$

La Ec. (6.47) tiene la virtud de ser compacta; sin embargo posee una forma menos conveniente que la Ec. (6.44) para que al derivarla produzca una relación análoga entre aceleraciones.

Pregunta 6.7 ¿Por qué?

Otro modo común de expresar la Ec. (6.44) es considerando al cuerpo $\mathcal{B}$ como un marco móvil, o sea como un cuerpo en movimiento relativo a otro marco $\mathcal{J}$. (Fig. 6.6). Se puede entonces escribir la Ec. (6.44) de la siguiente manera:

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{v}_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{6.48}$$

en donde

$\mathbf{v}_P$ = velocidad de P en el marco $\mathcal{J}$

$\dot{\mathbf{R}}$ = velocidad del origen móvil = $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{J}}$

$\mathbf{v}_{rel}$ = velocidad de P en el marco móvil = $\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$

$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular del marco móvil = $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{J}}$

$\mathbf{r}$ = vector de posición de P en el marco móvil $\mathbf{r}_{O'P}$

Consideremos ahora dos ejemplos sobre el uso de la ecuación de la velocidad para marcos móviles (Ecuación 6.44, 6.47 o 6.48).

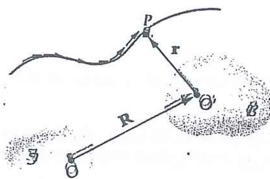
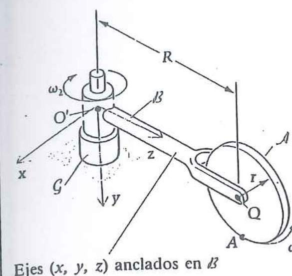


Figura P6.6

Ejemplo 6.5



Ejes (x, y, z) anclados en $\mathcal{B}$

Encuentre la velocidad en $\mathcal{G}$ del punto A en el fondo del disco en el Ejemplo 6.1 (ver la figura).

Solución

Seleccionamos a $\mathcal{B}$ como el marco móvil y de la Ec. (6.44) (en donde $\mathcal{G}$ es $\mathcal{J}$ y A es P) se obtiene:

$$\mathbf{v}_{A/\mathcal{G}} = \mathbf{v}_{A/\mathcal{B}} + \mathbf{v}_{O'/\mathcal{G}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{O'A}$$

En este caso $\mathbf{v}_{O'/\mathcal{G}} = 0$; también $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} = \omega_2\hat{\mathbf{j}}$ del ejemplo anterior. La velocidad de A en $\mathcal{B}$ está dada por

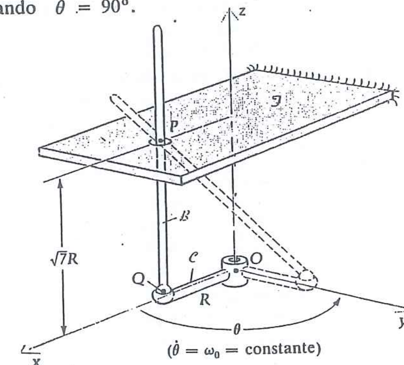
$$\mathbf{v}_{A/\mathcal{B}} = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_{Q/\mathcal{B}}}} + \omega_1\hat{\mathbf{i}} \times r\hat{\mathbf{j}} = r\omega_1\hat{\mathbf{k}}$$

Por lo tanto

$$\mathbf{v}_{A/\mathcal{G}} = r\omega_1\hat{\mathbf{k}} + \omega_2\hat{\mathbf{j}} \times (r\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}}) = R\omega_2\hat{\mathbf{i}} + r\omega_1\hat{\mathbf{k}}$$

Ejemplo 6.6

La manivela $\mathcal{C}$ en el diagrama gira alrededor del eje z que pasa por O. Su otro extremo, Q, está unido a una junta esférica como se muestra. La junta forma el extremo de la barra $\mathcal{B}$ que pasa a través de un agujero en el techo $\mathcal{J}$. Calcular la velocidad del punto P de la barra cuando $\theta = 90°$.



Solución

Denotamos con H el punto de $\mathcal{J}$ en el centro del agujero; entonces:

$$\overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_{H/\mathcal{J}}}} = \mathbf{v}_{H/\mathcal{B}} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{J}} \tag{1}$$

en donde P es el punto de $\mathcal{B}$ coincidente con el punto H. Como el movimiento de H en $\mathcal{B}$ debe ser a lo largo del eje de $\mathcal{B}$, se tiene:

$$0 = v_{H/\mathcal{B}}\left(\frac{R\hat{\mathbf{i}} - R\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{7}R\hat{\mathbf{k}}}{3R}\right) + \overbrace{(\mathbf{v}_{Q/\mathcal{I}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{QP})}^{\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}}}$$

o bien

$$0 = v_{H/\mathcal{B}}\left(\frac{\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \sqrt{7}\hat{\mathbf{k}}}{3}\right)$$
$$+ [-R\omega_0\hat{\mathbf{i}} + (\omega_x\hat{\mathbf{i}} + \omega_y\hat{\mathbf{j}} + \omega_z\hat{\mathbf{k}}) \times (R\hat{\mathbf{i}} - R\hat{\mathbf{j}} + \sqrt{7}R\hat{\mathbf{k}})] \quad (3)$$

Agrupando los coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, respectivamente, resulta

$$\frac{1}{3}v_{H/\mathcal{B}} + \sqrt{7}R\omega_y + R\omega_z = R\omega_0 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{3}v_{H/\mathcal{B}} + R\omega_z - \sqrt{7}R\omega_x = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\sqrt{7}}{3}v_{H/\mathcal{B}} - R\omega_x - R\omega_y = 0 \quad (6)$$

Estas tres ecuaciones no pueden resolverse para obtener valores únicos de las cuatro incógnitas $\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_{H/\mathcal{B}}$. Sin embargo, se puede obtener una respuesta para $v_{H/\mathcal{B}}$ restando la Ec. (5) de la (4) y luego sumando $\sqrt{7}$ veces la Ec. (6). El resultado es

$$v_{H/\mathcal{B}} = \frac{R\omega_0}{3}$$

Sustituyendo este valor en las Ecs. (4) a (6) resultan tres ecuaciones en $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ cuya matriz de coeficientes es singular (su determinante es cero). Entonces no pueden resolverse para determinar las componentes de la velocidad angular. Una explicación física de esto es que la componente de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ a lo largo de la barra $\mathcal{B}$ no puede afectar la respuesta para $\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}}$. En términos matemáticos, lo anterior se manifiesta en que esta componente "axial" de $\mathcal{B}$ es paralela a $\mathbf{r}_{QP}$, y entonces se cancela en la Ec. (2). Sin embargo, esas componentes de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ no se necesitan para la solución porque de la Ec. (1) podemos obtener el resultado deseado:

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}} = -\mathbf{v}_{H/\mathcal{B}} = \frac{-R\omega_0}{3}\left(\frac{\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \sqrt{7}\hat{\mathbf{k}}}{3}\right)$$

Aunque no podemos encontrar la componente de $\mathcal{B}$ a lo largo de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ con la información dada, *podemos* sin embargo, calcular la componente de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ normal a $\mathcal{B}$. Estará formada en términos de ω'_x, ω'_y, ω'_z que refuerzan la relación

$$\boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{r}_{QP} = 0$$

Esto es,

$$R(\omega'_x - \omega'_y + \sqrt{7}\omega'_z) = 0 \quad (7)$$

Esta ecuación establece que esas componentes $\boldsymbol{\omega}'$ forman un vector normal a la recta QP; nuevamente, tal vector es la única parte de $\boldsymbol{\omega}$ que puede afectar a $\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}}$.

Después de agregar primas a $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ en las Ecs. (4-6), la solución de las Ecs. (4-7) es

$$\omega'_x = 0 \qquad \omega'_y = \frac{\sqrt{7}}{9}\omega_0 \qquad \omega'_z = \frac{\omega_0}{9} \qquad v_{H/\mathcal{B}} = \frac{R\omega_0}{3}$$

Ahora podemos calcular la velocidad de P con la Ec. (1) o con la Ec. (2), como sigue:

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{v}_{Q/\mathcal{I}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{QP}$$
$$= -R\omega_0\hat{\mathbf{i}} + \omega_0\left(\frac{\sqrt{7}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}}{9}\right) \times R(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \sqrt{7}\hat{\mathbf{k}})$$
$$= \frac{R\omega_0}{9}(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \sqrt{7}\hat{\mathbf{k}}) \quad \text{(como antes)}$$

Después de haber visto estos ejemplos, estamos listos para obtener las relaciones correspondientes a las *aceleraciones* de P en dos marcos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{I}$. Derivando la Ec. (6.44) se obtiene

$$^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{v}}_{P/\mathcal{I}} = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{v}}_{O'/\mathcal{I}} + {}^{\mathcal{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{O'P} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} + {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{v}}_{P/\mathcal{B}} \quad (6.49)$$

o usando de nuevo la Ec. (6.20) (una vez en cada uno de los dos últimos términos) obtenemos,

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{I}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{O'P} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times ({}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{O'P})$$
$$+ ({}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{v}}_{P/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P}) \quad (6.50)$$

Reordenando términos nos queda,

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} = \underbrace{{}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{v}}_{P/\mathcal{B}}}_{} + \underbrace{\mathbf{a}_{O'/\mathcal{I}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{O'P} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{O'P})}_{} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P}}_{} \quad (6.51)$$

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} = \mathbf{a}_{P/\mathcal{B}} + \mathbf{a}_{P_{\mathcal{B}}/\mathcal{I}} + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} \quad (6.52)$$

Los tres términos intermedios en el lado derecho de la Ec. (6.51) representan la aceleración del punto $P_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ (o de $\mathcal{B}$ extendido) coincidente con P. (La prueba es sencilla: si P *está fijo* a $\mathcal{B}$ en el punto $P_{\mathcal{B}}$, entonces los dos otros términos desaparecen, ya que $\mathbf{r}_{O'P}$ se vuelve un vector constante en $\mathcal{B}$ y lo que queda es necesariamente $\mathbf{a}_{P_{\mathcal{B}}/\mathcal{I}}$.) El término ${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{v}}_{P/\mathcal{B}}$ (que es ${}^{\mathcal{B}}\ddot{\mathbf{r}}_{O'P}$, con las dos derivadas efectuadas en $\mathcal{B}$) es claramente la aceleración de P en $\mathcal{B}$. El último término, $2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$, se denomina **aceleración de Coriolis** de P. Nótese que debido a la presencia de la aceleración de Coriolis *no es cierto* que la aceleración de P en el marco $\mathcal{I}$ es igual a su aceleración en $\mathcal{B}$ más la aceleración del punto de $\mathcal{B}$ con el cual es coincidente (como era el caso con la velocidad $\mathbf{v}_P$ de P). Este resultado es análogo al hecho de que el teorema de la adición para velocidades angulares no se cumple para aceleraciones angulares.

Igual que hicimos con la ecuación de velocidad, se formula ahora la Ec. (6.52):

$$\begin{bmatrix}\text{Aceleración}\\ \text{de } P \text{ en } \mathcal{I}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Aceleración}\\ \text{de } P \text{ en } \mathcal{B}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Aceleración de } \mathcal{I} \text{ del}\\ \text{punto fijo de } \mathcal{B}\\ \text{coincidente con } P\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Aceleración}\\ \text{de Coriolis}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{I}} \quad = \quad \mathbf{a}_{P/\mathcal{B}} \quad + \quad \mathbf{a}_{P_{\mathcal{B}}/\mathcal{I}} \quad + \quad 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{B}}$$

Con la notación abreviada de la Ec. (6.48) tenemos,

$$\mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} \tag{6.53}$$

en donde

$\mathbf{a}_P$ = aceleración de P en el marco $\mathcal{I}$

$\ddot{\mathbf{R}}$ = aceleración del origen móvil = $\mathbf{a}_{O'/\mathcal{I}}$

$\boldsymbol{\alpha}$ = aceleración angular del marco móvil = $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$

$\mathbf{a}_{\text{rel}}$ = aceleración de P en el marco móvil $\mathbf{a}_{P/\mathcal{B}}$

Todos los otros términos de la Ec. (6.53) se definen como en la Ec. (6.48).

Ejemplo 6.7

Calcular la aceleración en $\mathcal{G}$ del punto A en los Ejemplos 6.1, 6.3 y 6.5.

Solución

Usaremos la Ec. (6.51); el marco de referencia $\mathcal{I}$ es $\mathcal{G}$ y el punto móvil P es A:

$$\mathbf{a}_{A/\mathcal{G}} = \mathbf{a}_{A/\mathcal{B}} + \mathbf{a}_{O'/\mathcal{G}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{O'A} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{O'A}) + 2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{B}}$$

Ejes (x, y, x anclados en $\mathcal{B}$

Los diversos términos del segundo miembro se calculan como sigue

1. $\mathbf{a}_{A/\mathcal{B}} = \overset{0}{\cancel{\mathbf{a}_{Q/\mathcal{B}}}} + \overset{0}{\cancel{\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}}} \times \mathbf{r}_{QA} - \underbrace{\omega_1^2 \mathbf{r}_{QA}}$

   Nótese que $\mathcal{A}$ está en movimiento plano relativo a $\mathcal{B}$, por lo que esta forma abreviada es correcta.

   $= -r\omega_1^2\hat{\mathbf{j}}$ (A se mueve sobre una circunferencia con velocidad constante en $\mathcal{B}$)
2. $\mathbf{a}_{O'/\mathcal{G}} = \mathbf{0}$. Nótese que O' está fijo en $\mathcal{G}$ en este ejemplo.
3. $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{O'A} = \mathbf{0}$. Nótese también que $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} = {}^{\mathcal{G}}(d/dt)(\omega_2\,\hat{\mathbf{j}}) = \mathbf{0}$, ya que ω_2 es constante y $\hat{\mathbf{j}}$ no cambia de dirección en $\mathcal{G}$.
4. $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{O'A}) = \omega_2\hat{\mathbf{j}} \times [\omega_2\hat{\mathbf{j}} \times (r\hat{\mathbf{j}} + R\hat{\mathbf{k}})] = -R\omega_2^2\hat{\mathbf{k}}$:
5. $2\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{B}} = 2\omega_2\hat{\mathbf{j}} \times (r\omega_1\mathbf{k}) = 2r\omega_1\omega_2\hat{\mathbf{i}}$.

La aceleración del punto A es entonces:

$$\mathbf{a}_{A/\mathcal{G}} = 2r\omega_1\omega_2\hat{\mathbf{i}} - r\omega_1^2\hat{\mathbf{j}} - R\omega_2^2\hat{\mathbf{k}}$$

En la Sección 6.7 resolveremos este mismo Ejemplo usando otro método.

Problemas / Sección 6.5

6.25 Un automóvil viaja hacia el sur sobre un meridiano; su rapidez relativa a la Tierra es de 60 mi/h, incrementándose a razón de 2 pie/s² (Fig. P6.25). Encuentre la aceleración del automóvil en un marco cuyo origen es el centro de la tierra y el eje z es el eje polar de rotación; los ejes x y y no giran con la Tierra sino que están fijos en el espacio.

6.26 Si en el problema anterior el automóvil se desplaza de oeste a este a 45° de latitud norte, en vez de a lo largo de un meridiano, halle su aceleración en el mismo marco de referencia (Fig. P6.26).

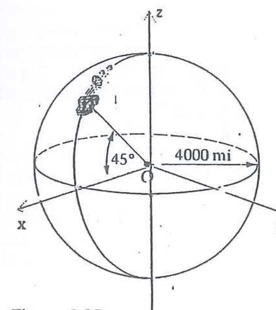


Figura 6.25

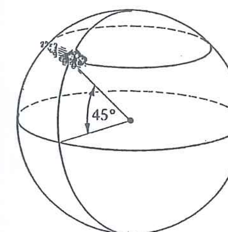


Figura 6.26

6.27 El disco $\mathcal{A}$ en la Fig. P6.27 gira a 10 rad/s en sentido antihorario (mirando desde arriba su superficie horizontal). Un disco $\mathcal{B}$ más pequeño rueda radialmente hacia afuera a lo largo de un radio OD de $\mathcal{A}$. En el instante mostrado, el centro C de $\mathcal{B}$ está a 4 pie del eje de rotación de $\mathcal{A}$, y esta distancia crece a razón de 2 pie/s. Determine la velocidad y aceleración del punto E que se encuentra en la parte superior de $\mathcal{B}$ en el instante dado.

6.28 La barra eje $\mathcal{S}$ en la Fig. P6.28 gira en el gozne $\mathcal{I}$ a 2 rad/s en el sentido indicado. La rueda gira simultáneamente a 3 rad/s alrededor de su eje como se indica. Ambas rapideces son constantes. El insecto se desplaza hacia afuera sobre un rayo de la rueda a 0.2 plg/s con una aceleración de 0.1 plg/s², ambas magnitudes con relación al rayo. Para el instante mostrado, encuentre: (a) la velocidad angular de la rueda; (b) la velocidad del insecto.

6.29 Determine la aceleración angular de la rueda y la aceleración del insecto en el Problema 6.28.

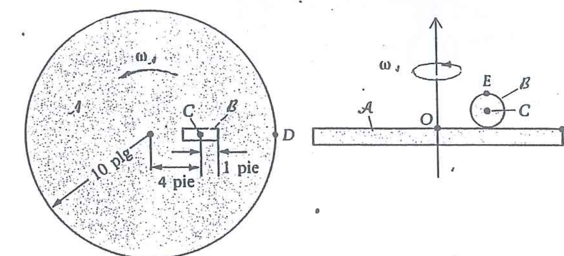


Figura P6.27

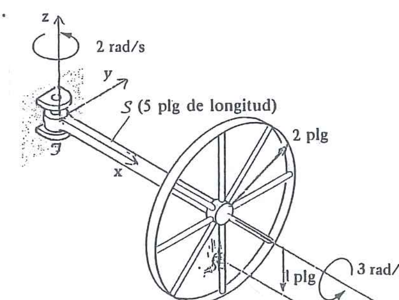


Figura P6.28

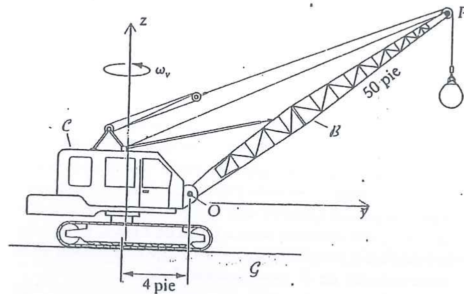


Figura P6.30

*** 6.30** La grúa $\mathcal{C}$ en la Fig. P6.30 gira alrededor de la vertical con $\omega_v = 0.2$ rad/s = constante y simultáneamente su aguilón $\mathcal{B}$ se levanta con la rapidez creciente $\omega_H = 0.1t$ rad/s. Los ejes (x, y, z) están fijos a la grúa $\mathcal{C}$ en O y el aguilón tiene la dirección del eje y cuando $t = 0$. Halle, cuando el aguilón forma un ángulo de 60° con la horizontal, (a) $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{G}}$; (b) $\alpha_{\mathcal{B}/\mathcal{G}}$; (c) $\mathbf{v}_{P/\mathcal{G}}$; (d) $\mathbf{a}_{P/\mathcal{G}}$.

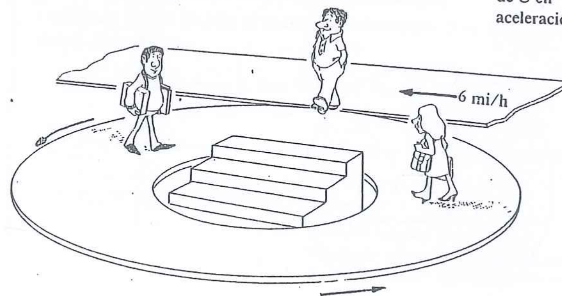


Figura P6.31

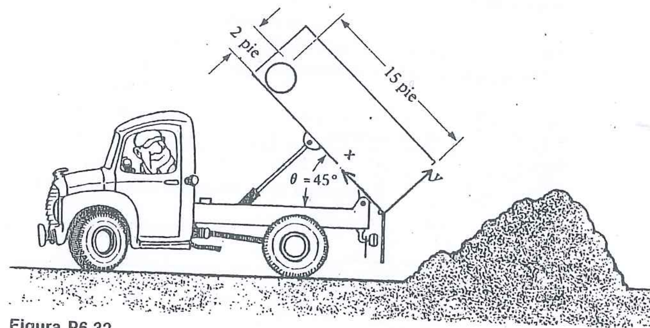


Figura P6.32

6.31 Un andén recto se desplaza frente a una plataforma circular giratoria, a 6 mi/h (Fig. P6.31). La gente se pasa a la plataforma y se dirige en línea recta hacia el centro para salir por la escalera. Entre el andén y la plataforma giratoria hay contacto de rodamiento. Suponga que la gente camina con rapidez constante de 3 mi/h respecto a la plataforma. Si se desea que la gente no experimente una aceleración lateral de más de 3 pie/s^2, calculee el radio requerido de la plataforma.

6.32 El camión en la Fig. P6.32 se mueve hacia la izquierda con rapidez constante de 7.07 pie/s. En el instante mostrado, la caja de carga tiene una rapidez angular $\dot{\theta} = \frac{1}{3}$ rad/s y una aceleración angular $\ddot{\theta} = -\frac{1}{15}$ rad/s^2. El cilindro mostrado dentro de la caja del camión se suelta y rueda hacia el suelo con una velocidad angular, relativa a la caja de 1 ⤼ rad/s en ese instante; su aceleración, también relativa a la caja, es de $\frac{1}{2}$ rad/s^2. Encuentre la velocidad y la aceleración del centro del cilindro respecto al suelo. Use el marco de referencia rotatorio mostrado.

6.33 La barra curva $\mathcal{B}$ en la Fig. P6.33 gira alrededor de la vertical a $2\pi\hat{\mathbf{k}}$ rad/s. El centro C del collarín $\mathcal{C}$ tiene velocidad y aceleración relativa a $\mathcal{B}$ de $20\hat{\mathbf{e}}$ plg/s y $-10\hat{\mathbf{e}}$ plg/s^2, respectivamente; $\hat{\mathbf{e}}$ tiene la dirección de la velocidad de C en $\mathcal{B}$. Para el instante dado calcule la velocidad y la aceleración de C en el marco $\mathcal{I}$ en el que gira $\mathcal{B}$.

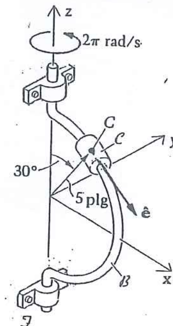


Figura P6.33

6.34 Una bomba centrífuga $\mathcal{P}$ gira a 500 rpm en $\mathcal{I}$; las partículas de agua tienen componentes de velocidad y aceleración tangencial *relativas a los álabes* de 120 pie/s y 80 pie/s^2 hacia afuera cuando alcanzan los puntos extremos de las aspas (Fig. P6.34). Determine los vectores velocidad y aceleración de las partículas de agua en P con respecto al suelo $\mathcal{I}$ justamente antes de que salgan de los álabes.

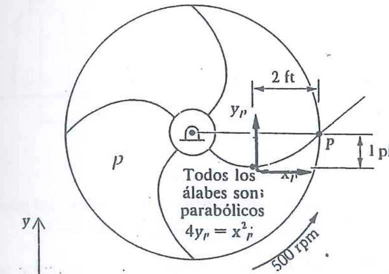


Figura P6.34

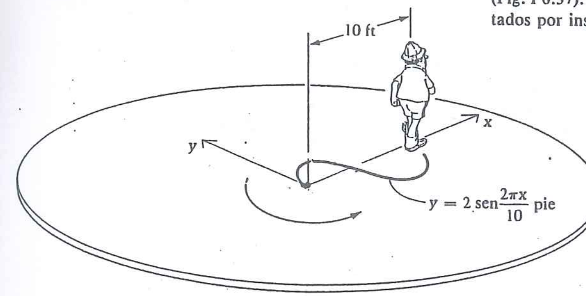


Figura P6.35

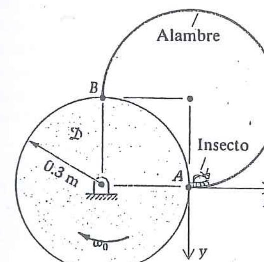


Figura P6.36

6.35 Un hombre camina hacia el exterior de una plataforma giratoria a lo largo de una trayectoria senoidal fija a la plataforma; ésta tiene 40 pie de diámetro y gira a 10 rpm (Fig. P6.35). Si la rapidez del hombre relativa a la plataforma es constante e igual a 2 pie/s, ¿cuál es la magnitud de su aceleración cuando él se encuentra a 10 pie del centro?

6.36 El disco $\mathcal{D}$ gira alrededor de su eje con rapidez angular constante $\omega_0 = 0.1$ rad/s. El alambre de contorno circular está unido rígidamente a $\mathcal{D}$ en los puntos A y B, como se muestra en la Fig. P6.36. Un insecto camina sobre el alambre de A a B; su velocidad relativa al alambre (inicialmente cero) crece a razón de 0.001 m/s^2. Encuentre la velocidad y la aceleración del insecto relativas al marco de referencia $\mathcal{I}$ (en el cual gira el disco) al llegar a B.

6.37 Un pájaro vuela horizontalmente en línea recta pasando por encima de la cabeza de un hombre, con rapidez constante v_O hacia el eje de la plataforma giratoria sobre la que se encuentra de pie el hombre. Los ejes xy tienen su origen en los pies del observador; el eje z es vertical y el eje y está siempre dirigido hacia el centro de la plataforma, que tiene radio = R y velocidad angular $\omega = \omega_0\hat{\mathbf{k}}$. Encuentre la $x(t)$ y la $y(t)$ del pájaro en términos de R, v_O, ω_0 y el tiempo t (Fig. P6.37). Use la Ec. (6.47), integre y verifique sus resultados por inspección.

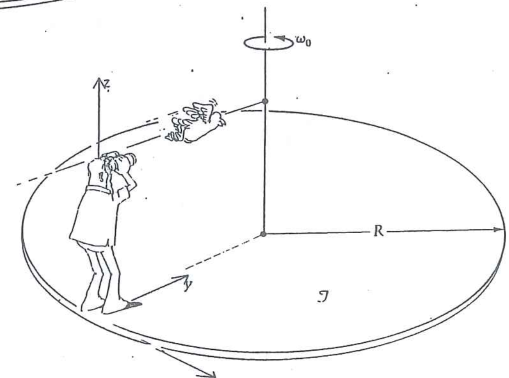


Figura P6.37

* **6.38** En la Fig. P6.38 los ejes x y y y el origen O están fijos sobre la cubierta de un barco. La nave $\mathcal{S}$ tiene una velocidad angular relativa a la Tierra $\mathcal{E}$ de

en donde x y y son los ejes longitudinal y transversal del barco, respectivamente; ω_r es una componente de velocidad angular de balanceo y ω_P es una componente de velocidad angular de cabeceo. El punto T es un satélite geosincrónico fijo relativo a la Tierra. Calcule la $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ requeridos en términos de θ, ϕ, ω_r, ω_P, para rastrear el punto T.

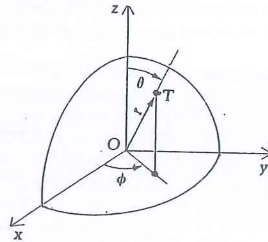


Figura P6.38

* **6.39** En los Problemas 6.9 y 6.22, sea $\omega_z = 0.5$ rad/s y $\omega_x = 0.7$ rad/s en las direcciones indicadas. Con las dimensiones dadas en la Fig. P6.39, determine el valor máximo de ω_y para el cual la magnitud de la aceleración de la cabeza del astronauta no excederá de 5 g en el instante dado; ω_y es constante.

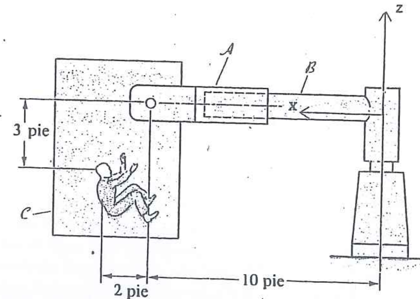


Figura P6.39

* **6.40** En el Problema 6.16 encuentre la velocidad del punto P en el extremo del asidor $\mathcal{G}$ en el instante dado.

* **6.41** Demuestre que si dos cuerpos están en contacto por rodamiento, las líneas onduladas con marcas en la Fig. P6.41, que representan lugares geométricos de puntos de contacto previos, son de la misma longitud. (Note que según el Problema P3.105 no es cierta la proposición inversa.)

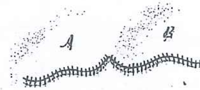


Figura P6.41

6.6 La Tierra como marco móvil

En esta sección haremos uso de la Ec. (6.53) para establecer la ecuación diferencial que rige la posición del centro de masa C de un cuerpo $\mathcal{B}$ en movimiento cerca de la Tierra. Esta ecuación permitirá medir la posición de C con respecto a un sitio O' de latitud λ, que a su vez se encuentra en movimiento al girar la Tierra sobre su eje de oeste a este. Suponemos que para describir ciertos movimientos cerca de nuestro planeta, un marco $\mathcal{I}$ con origen en el centro de masa O de la Tierra está "suficientemente fijo" para llamarlo inercial. El marco $\mathcal{I}$ se mueve así como lo hace el planeta (supuesto rígido) excepto que no participa de la rotación telúrica diaria. Entonces el sitio O' tiene una aceleración $\ddot{\mathbf{R}}$ en $\mathcal{I}$, dirigida hacia el eje polar norte-sur de la Tierra.

Establecemos el marco móvil $\mathcal{E}$ como se muestra en la Fig. 6.7. El marco $\mathcal{E}$ es la Tierra en rotación y los ejes (x, y, z) están anclados a ella en O', con x señalando al este, y al norte y z en la dirección de la vertical local. La aceleración del centro de masa C de un cuerpo $\mathcal{B}$, que se mueve cerca de la Tierra y cuya posición relativa a O' se busca, está dada por la Ec. (6.53):

$$\mathbf{a}_{C/\mathcal{I}} = \ddot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

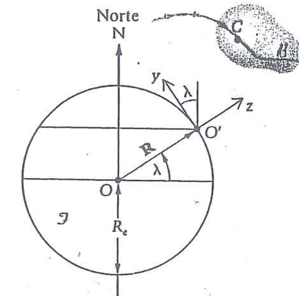


Figura 6.7

en donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de C en $\mathcal{E}$; $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ y $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ son los vectores velocidad y aceleración de C en $\mathcal{E}$. Además $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{E}/\mathcal{I}}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{E}/\mathcal{I}}$. Usamos ahora la ecuación de movimiento del centro de masa vista en el Capítulo 2:

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_{C/\mathcal{I}}$$

para obtener

$$\mathbf{F} - mg\hat{\mathbf{k}} = m[\ddot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}] \tag{6.54}$$

en donde $\mathbf{F}$ representa todas las fuerzas externas sobre $\mathcal{B}$ además de la gravedad, que se expresa por separado.

Pregunta 6.8 ¿Por qué se restringe la Ec. (6.4) a cuerpos en movimiento cerca de la Tierra?

Calculamos ahora los diferentes términos en la Ec. (6.54). Notemos primero que

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$
$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_e(\cos\lambda\hat{\mathbf{j}} + \text{sen}\,\lambda\hat{\mathbf{k}}) \quad (\text{donde } \omega_e = 2\pi \text{ rad/día}, \approx 0.0000727 \text{ rad/s})$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{R} = R_e\hat{\mathbf{k}}$$

Luego calculamos la aceleración $\ddot{\mathbf{R}}$ del sitio O'. Utilizamos otra vez la Ec. (6.53), siendo ahora O' el "punto móvil" y O el origen en el marco móvil:

$$\mathbf{a}_{O'} = \ddot{\mathbf{R}} = \overset{0}{\cancel{\mathbf{a}_O}} + \overset{0}{\cancel{\boldsymbol{\alpha}}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

Nótese que ahora $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ y $\mathbf{a}_{\text{rel}}$ son iguales a cero, ya que O' *no* tiene movimiento relativo al marco móvil (la Tierra). El único término que queda es:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$$

Por lo tanto, de la Ec. (6.54) se obtiene

$$\mathbf{F} - mg\hat{\mathbf{k}} = m\{\omega \times [\omega \times (\mathbf{R} + \mathbf{r})] + 2\omega \times (\dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}) + (\ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}})\}$$

Despreciando $|\mathbf{r}|$ al compararlo con $|\mathbf{R}|$ y expresando $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes (F_x, F_y, F_z), obtenemos un juego de ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de C (el subíndice T significa Tierra):

$$\ddot{x} = 2\omega_e(\dot{y} \operatorname{sen} \lambda - \dot{z} \cos \lambda) + \frac{F_x}{m}$$

$$\ddot{y} = -2\omega_e \dot{x} \operatorname{sen} \lambda - R_e\omega_e^2 \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda + \frac{F_y}{m} \qquad (6.55)$$

$$\ddot{z} = 2\omega_e \dot{x} \cos \lambda + R_e\omega_e^2 \cos^2 \lambda - g + \frac{F_z}{m}$$

Completamos esta breve sección con un Ejemplo que ilustra el uso de las Ecs. (6.55)

Ejemplo 6.8

Debido a la rotación de la Tierra, la fuerza resultante ejercida por ella sobre una partícula P en reposo sobre su superficie, no está dirigida exactamente hacia su centro de masa. Aplicar las Ecs. (6.55) para evaluar esta desviación suponiendo a la Tierra esférica.

Solución

Tenemos que $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ son todas iguales a cero, por lo que las ecuaciones de movimiento de P en el marco inercial $\mathcal{I}$ son:

$$F_x = 0$$

$$F_y = mR_e\omega_e^2 \cos \lambda \operatorname{sen} \lambda = k \operatorname{sen} \lambda$$

$$F_z = -mR_e\omega_e^2 \cos^2 \lambda + mg = mg - k \cos \lambda$$

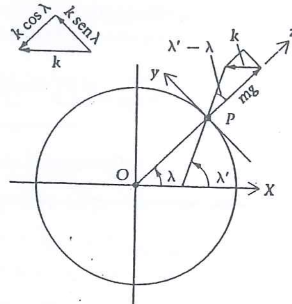


Figura 1

Considerando a $mR_e\,\omega_e^2 \cos \lambda = k$, vemos (Fig. 1) que la Tierra debe empujar a P un ángulo pequeño ($\lambda' - \lambda$) con la *"vertical geométrica"* para que P permanezca en reposo en el "marco móvil" $\mathcal{T}$, rígidamente unido a la superficie del planeta. Es el ángulo λ', y *no* el λ el que define la *"vertical local"*; esto se debe a que λ' es el ángulo que el hilo de una plomada forma con el eje X en el plano ecuatorial.

La Fig. 2 muestra que (con $\phi = \lambda' - \lambda$)

$$\tan \phi \approx \frac{k \operatorname{sen} \lambda}{mg - k \cos \lambda}$$

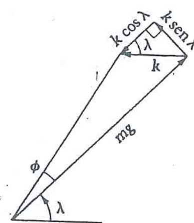


Figura 2

Notemos que k comparado con mg es muy pequeño:

$$\frac{k}{mg} = \frac{R_e\omega_e^2 \cos \lambda}{g} \approx \frac{6370(0.0000727)^2 \cos \lambda}{(9.81/1000)}$$

$$= \frac{6370(1000)(0.0000727)^2 \cos \lambda}{9.81}$$

$$\approx 0.00343 \cos \lambda$$

Esto justifica que usemos aproximaciones para el ángulo ϕ:

$$\phi \approx \tan \phi \approx \frac{k \operatorname{sen} \lambda}{mg} = \frac{R_e\omega_e^2 \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda}{g} = 0.00343 \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda$$

de modo que la desviación de la línea de "plomada" vertical local de la "vertical geométrica" es

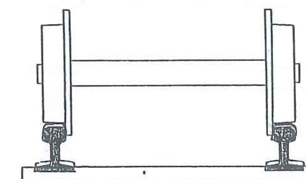
$$\lambda' - \lambda = \phi \approx 0.00343 \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda$$

Por supuesto, en los polos y en el ecuador *no* hay desviación (donde $\cos \lambda = 0$ y $\operatorname{sen} \lambda = 0$ respectivamente). La máxima desviación ocurre a una latitud de 45° y es igual a 0.0017 rad, o aproximadamente 0.1°.

Problemas / Sección 6.6

6.42 Si fuese posible para un tren viajar continuamente alrededor del mundo sobre una ruta meridional como se muestra en la Fig. P6.42a, un lado de los rieles se desgastaría debido a la aceleración de Coriolis. Explique qué lado se desgastaría en cada uno de los cuadrantes numerados de la ruta circular. La Fig. P6.42b muestra cómo se apoyan las ruedas de los vagones del tren sobre los rieles.

6.43 Una rueda horizontal gira alrededor de un eje fijo con velocidad de 10 rad/s, que crece a razón de $\dot{\omega} = 5$ rad/s^2 (Fig. P6.43). Al mismo tiempo una cuenta corrediza está deslizándose hacia el interior sobre un rayo a razón de 5 pie/s (respecto al rayo); esta velocidad decrece 2 pie/s cada segundo. Si la cuenta pesa 0.02 lb y está a 1 pie del centro en la configuración dada, calcule la fuerza externa ejercida sobre la cuenta. ¿Es posible que esta fuerza sea ejercida solamente por el rayo y no en parte por otras fuentes externas?


Figura P6.42b

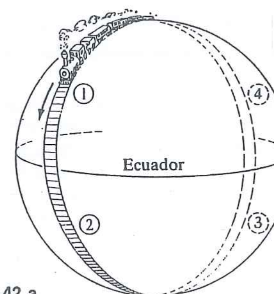


Figura P6.42 a

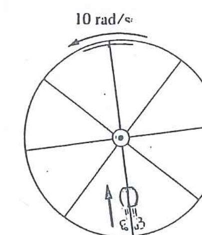


Figura P6.43

6.44 Explique en detalle cómo la aceleración de Coriolis está relacionada con la deflexión del aire atmosférico que irrumpe hacia una zona de baja presión, formando así un huracán (Fig. P6.44). Explíquelo para cada hemisferio.

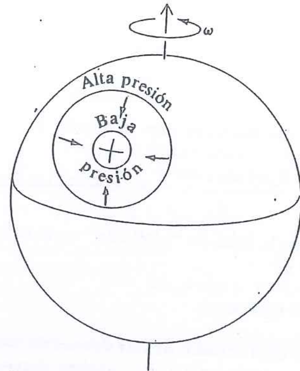


Figura P6.44

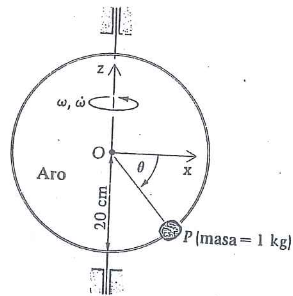


Figura P6.45

* 6.45 Una cuenta se desliza a lo largo de un aro circular liso que en cierto instante tiene $\omega = 2$ rad/s y $\dot{\omega} = 3$ rad/s^2 en la dirección mostrada en la Fig. P6.45. La rapidez angular del segmento $\mathcal{O}P$ en este tiempo es $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s y $\theta = 45°$. Halle el valor de $\ddot{\theta}$ y la fuerza ejercida sobre la cuenta por el aro en el instante dado, si la masa de la cuenta es de 0.1 kg y el radio del aro es de 20 cm.

* 6.46 Un proyectil se dispara desde un sitio con latitud λ y componentes de su velocidad inicial iguales a $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ (en $t = 0$). Determine la altura máxima alcanzada por el proyectil despreciando la resistencia del aire y los términos $R_e\omega_e^2$ en la Ec. (6.55)

* 6.47 Con referencia al Ejemplo 6.8 demuestre que si las ecuaciones en componentes de (6.54) se expresan en términos de los ejes (x', y', z') (Fig. P6.47) en vez de en función de los ejes (x, y, z), tendrán la misma forma que las Ecs. (6.55) sin sus términos $R_e\omega_e^2$ siempre que

$$G = \sqrt{(g - R_e\omega_e^2 C_\lambda^2)^2 + (R_e\omega_e^2 C_\lambda S_\lambda)^2}$$

reemplace a g, λ' reemplace a λ, y que y' y z' respectivamente sustituyan a y y z.

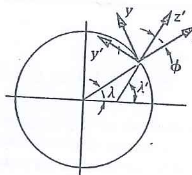


Figura P6.47

* 6.48 Usando ecuaciones del problema anterior encuentre el lugar en el que una roca golpeará a la Tierra si se lanza desde el reposo sobre el eje z' desde una altura H. Desprecie la resistencia del aire y suponga que la roca choca con la Tierra cuando $z' = 0$.

6.7 Ecuaciones de velocidad y aceleración para dos puntos del mismo cuerpo rígido

A continuación aplicaremos los conceptos de posición, velocidad, aceleración angular (desarrollados en el Capítulo 1 y Secciones 6.2 a 6.5) a la cinemática de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento general en un marco $\mathcal{F}$. La ecuación que relaciona las velocidades en $\mathcal{F}$ de dos puntos de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ con su velocidad angular $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{F}}$ es un caso especial de la Ec. (6.44). Hemos visto en el texto que sigue a esa ecuación que si P así como O' es un punto fijo de $\mathcal{B}$ (Fig. 6.8), la relación entre las velocidades de esos dos puntos está dada por la ecuación

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \mathbf{v}_{O'/\mathcal{F}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}_{O'P} \qquad (6.56)$$

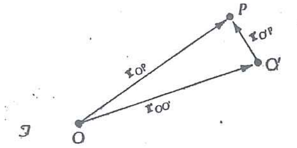


Fig. 6.8 Puntos P y O' de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento general.

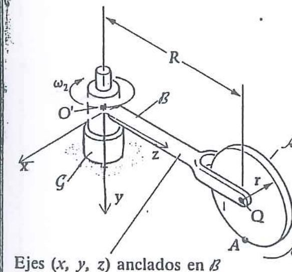
Del texto que sigue a la Ec. (6.52) conocemos también la relación entre las aceleraciones de esos dos puntos de $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{F}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}_{O'P} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{F}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}_{O'P}) \qquad (6.57)$$

Enfatizamos que las Ecs. (6.56) y (6.57) se deducen de las ecuaciones generales (6.44) y (6.51) cuando y si $\mathbf{r}_{O'O}$ es un vector constante en $\mathcal{B}$; en ese caso, $\mathbf{v}_{P/\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{r}}_{O'P} = 0$ y $\mathbf{a}_{P/\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{B}}\ddot{\mathbf{r}}_{O'P} = 0$. Además, los dos puntos P y O' de las Ecs. (6.56) y (6.57) pueden reemplazarse por *cualquier* par de puntos fijos en $\mathcal{B}$, ya que estar fijos en $\mathcal{B}$ es la única restricción para cualquiera de ellos. Con las Ecs. (6.56) y (6.57) tratamos *dos puntos* sobre *un cuerpo*, mientras que con las Ecs. (6.44) y (6.51) tratamos *un punto* en movimiento con relación a *dos cuerpos*. Ahora se presentarán ejemplos que implican el uso de las Ecs. (6.56) y (6.57) relativas a los dos cuerpos rígidos.

Ejemplo 6.9

En el Ejemplo 6.7 trate el punto A como un punto del cuerpo $\mathcal{A}$ en vez de como un punto móvil con movimiento conocido en $\mathcal{B}$.



Ejes (x, y, z) anclados en $\mathcal{B}$

Solución

De la Ec. (6.56) y la figura adjunta tenemos,

$$\mathbf{v}_{A/\mathcal{G}} = \mathbf{v}_{Q/\mathcal{G}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{QA}$$

como Q es también un punto de $\mathcal{B}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{A/\mathcal{G}} &= (\mathbf{v}_{O'/\mathcal{G}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{O'Q}) + \boldsymbol{\omega}_{A/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{QA} \\ &= 0 + \omega_2\hat{\mathbf{j}} \times R\hat{\mathbf{k}} + (\omega_1\hat{\mathbf{i}} + \omega_2\hat{\mathbf{j}}) \times r\hat{\mathbf{j}} \\ &= R\omega_2\hat{\mathbf{i}} + r\omega_1\hat{\mathbf{k}} \qquad \text{(como se obtuvo en el Ej. 6.5)}\end{aligned}$$

Ahora relacionamos las aceleraciones de A y Q con la Ec. (6.57):

$$\mathbf{a}_{A/\mathcal{G}} = \mathbf{a}_{Q/\mathcal{G}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{QA} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{QA})$$

El primer término del segundo miembro, considerando Q y O' como puntos del cuerpo $\mathcal{B}$, es

$$\mathbf{a}_{Q/\mathcal{G}} = \mathbf{a}_{O'/\mathcal{G}} + \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{O'Q} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{G}} \times \mathbf{r}_{O'Q})$$
$$= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \omega_2\hat{\mathbf{j}} \times (R\omega_2\hat{\mathbf{i}})$$
$$= -R\omega_2^2\hat{\mathbf{k}}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{a}_{A/\mathcal{G}} = -R\omega_2^2\hat{\mathbf{k}} + (-\omega_1\omega_2\hat{\mathbf{k}}) \times (r\hat{\mathbf{j}}) + (\omega_1\hat{\mathbf{i}} + \omega_2\hat{\mathbf{j}}) \times (r\omega_1\hat{\mathbf{k}})$$

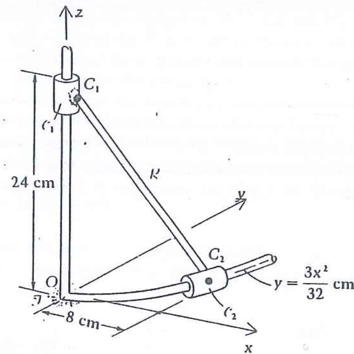
o bien

$$\mathbf{a}_{A/\mathcal{G}} = 2r\omega_1\omega_2\hat{\mathbf{i}} - r\omega_1^2\hat{\mathbf{j}} - R\omega_2^2\hat{\mathbf{k}}$$

que obtuvimos anteriormente en el Ejemplo 6.7 por otro método.

Ejemplo 6.10

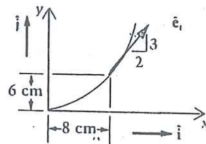
Los collarines C_1 y C_2 están unidos en C_1 y en C_2 a la barra $\mathcal{R}$ por medio de juntas esféricas. En el instante mostrado en la figura, $_2$ se está alejando del origen con rapidez de $\sqrt{13}$ cm/s. Obtener la velocidad de C_2 en el mismo instante. ¿Puede encontrarse la velocidad angular de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{J}$?



Solución

La velocidad de C_2 se determina por

$$\mathbf{v}_{C_2} = \sqrt{13}\,\hat{\mathbf{e}}_t = \sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\hat{\mathbf{j}}\right) = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$$



en donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{32}$$

por lo que

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=8} = \frac{3}{2}$$

Ahora calculamos las velocidades de C_1 y C_2 usando la Ec. (6.56):

$$\overset{v_{C_1}\hat{\mathbf{k}}}{\mathbf{v}_{C_1}} = \overset{(2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})}{\mathbf{v}_{C_2}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{J}} \times \mathbf{r}_{C_2C_1} \qquad (1)$$

Notemos que la componente de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{J}}$ a lo largo de la recta C_1 C_2 no puede determinarse a partir de la información dada, porque cualquier valor de ella no afectará a la Ec. (1). Sin embargo, multiplicando escalarmente esta ecuación porse obtendrá $\mathbf{r}_{C_2C_1} = -8\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}} + 24\hat{\mathbf{k}}$:

$$24v_{C_1} = -8(2) - 6(3) + 0 = -34$$

de manera que

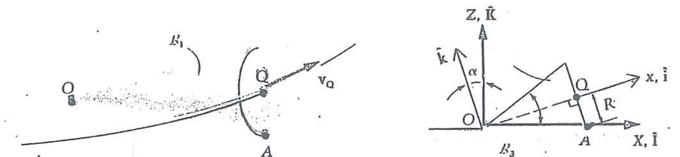
$$v_{C_1} = -1.42$$

y

$$\mathbf{v}_{C_1} = -1.42\hat{\mathbf{k}}\ \text{cm/s}$$

Ejemplo 6.11

El cono $\mathcal{B}_1$ mostrado en las figuras adjuntas, rueda sobre el piso en forma tal que el centro Q de la base del cono viaja sobre una circunferencia horizontal con velocidad constante $v_Q\hat{\mathbf{j}}$. Sea $\mathcal{B}_2$ un marco de referencia intermedio ("entre" el cono $\mathcal{B}_1$ y el piso $\mathcal{B}_3$) en el cual están fijos los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$. El vector $\hat{\mathbf{i}}$ está siempre dirigido a lo largo de OQ, $\hat{\mathbf{j}}$ es normal al plano formado por $\hat{\mathbf{i}}$ y la línea de contacto en una dirección paralela a $\mathbf{v}_Q$; finalmente $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{j}}$. Calcular la velocidad angular de $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_3$.



Solución

Denotaremos $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_3}$ simplemente por $\boldsymbol{\omega}_{1/3}$. Como $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O = \mathbf{0}$, entonces su diferencia, $\boldsymbol{\omega}_{1/3} \times \mathbf{r}_{OA}$ debe también ser cero; esto requiere que $\boldsymbol{\omega}_{1/3}$ sea paralelo en todo instante a la línea de contacto de $\mathcal{B}_1$ con el piso. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\omega}_{1/3} = \omega(-\cos\alpha\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{\mathbf{k}})$$

Usando la Ec. (6.56),

$$v_Q = v_A + \omega_{1/3} \times r_{AQ}$$

$$v_Q\hat{j} = 0 + \omega(-\cos\alpha\hat{\imath} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{k}) \times R\hat{k}$$

En consecuencia

$$v_Q = \omega R\cos\alpha$$

Finalmente

$$\omega = v_Q/(R\cos\alpha)$$

de modo que

$$\omega_{1/3} = \frac{v_Q}{R}(-\hat{\imath} + \tan\alpha\,\hat{k})$$

Queremos hacer algunos comentarios adicionales sobre el ejemplo anterior. Según el teorema de la adición:

$$\omega_{1/3} = \omega_{1/2} + \omega_{2/3} \tag{1}$$

en donde $\omega_{2/3}$ está dado por

$$\omega_{2/3} = \underbrace{\left[\frac{v_Q}{\text{proyección horizontal de } OQ}\right]}_{(R/\tan\alpha)\cos\alpha}\underbrace{(\operatorname{sen}\alpha\hat{\imath} + \cos\alpha\hat{k})}_{\hat{K}}$$

Introduciendo $\omega_{2/3}$ y $\omega_{1/3}$ en la Ec. (1),

$$\omega_{1/2} = \frac{v_Q}{R\cos^2\alpha}(-\hat{\imath})$$

Notemos que la dirección resultante $(-\hat{\imath})$ es la correcta, ya que la única manera en que $\mathcal{B}_1$ puede moverse con respecto a $\mathcal{B}_2$ es girando alrededor de OQ.

Consideremos finalmente dos maneras de representar las componentes de $\omega_{1/3}$. En la Fig. 6.9, observamos que la suma vectorial de las dos componente de $\omega_{1/3}$ es paralela a la línea de contacto pues

$$\frac{\frac{v_Q}{R}\tan\alpha}{v_Q/R} = \tan\alpha$$

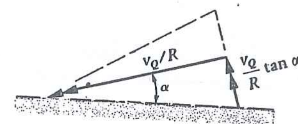


Figura 6.9a

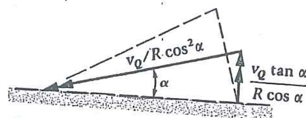


Figura 6.9b

La Fig. 6.9b ilustra el teorema de la adición; nuevamente se comprueba que $\omega_{1/3}$ se encuentra a lo largo de la línea de contacto, esta vez porque

$$\frac{\left(\frac{v_Q\tan\alpha}{R\cos\alpha}\right)}{\left(\frac{v_Q}{R\cos^2\alpha}\right)} = \operatorname{sen}\alpha$$

Ejemplo 6.12

Calcular la aceleración angular de $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_3$ en el Ejemplo 6.11.

Solución

Derivando $\omega_{1/3}$,

$$\alpha_{1/3} = {}^{\mathcal{B}_3}\dot{\omega}_{1/3} = {}^{\mathcal{B}_2}\dot{\omega}_{1/3} + \omega_{2/3} \times \omega_{1/3}$$

Se tenía que

$$\omega_{1/3} = \frac{v_Q}{R}(-\hat{\imath} + \tan\alpha\hat{k})$$

y

$$\omega_{2/3} = \frac{v_Q}{R}(\tan^2\alpha\hat{\imath} + \tan\alpha\hat{k})$$

Entonces

$${}^{\mathcal{B}_2}\dot{\omega}_{1/3} = 0$$

y obtenemos

$$\alpha_{1/3} = \left(\frac{v_Q}{R}\right)^2\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \tan^2\alpha & 0 & \tan\alpha\\ -1 & 0 & \tan\alpha\end{vmatrix}$$

$$= \frac{v_Q^2}{R^2}(-\hat{\jmath})(\tan^3\alpha + \tan\alpha)$$

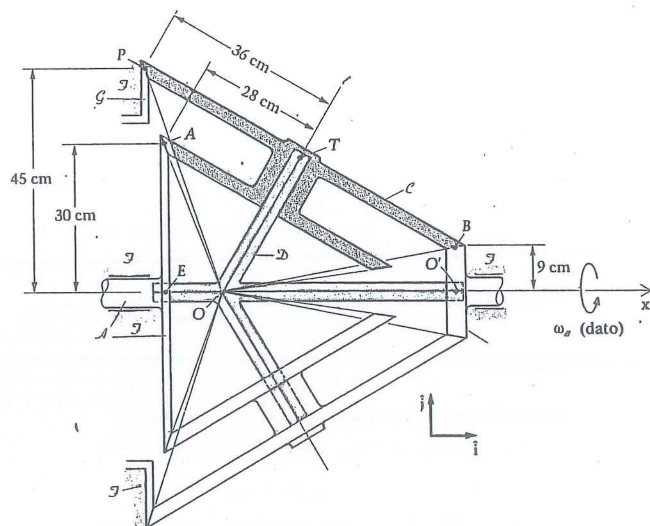
o bien

$$\alpha_{1/3} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^3\alpha}\frac{v_Q^2}{R^2}(-\hat{\jmath})$$

Vemos en el ejemplo anterior que no es necesario usar las ecuaciones de aceleración para calcular α si se conoce ω.

Ejemplo 6.13

Se pueden obtener cambios muy grandes de rapidez o velocidad en una dirección dada utilizando la disposición de engranes mostrada en el diagrama. Los engranes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ giran alrededor del eje x en $\mathcal{I}$, pero $\mathcal{C}$ tiene un movimiento más complicado:



1. Rueda sobre el engrane $\mathcal{G}$, fijo (a $\mathcal{I}$), comúnmente en contacto con él con el punto P.
2. Rueda sobre $\mathcal{A}$. (Los dientes en contacto lo están en A en la figura.)
3. Rueda sobre $\mathcal{B}$ (en B en la figura).
4. Gira con respecto a $\mathcal{D}$ alrededor de la recta ℓ, que está fija en $\mathcal{C}$ y en $\mathcal{D}$.

Considerando que $\mathcal{B}$ es el engrane impulsado, encuentre la relación de $\omega_{\mathcal{A}}$ a $\omega_{\mathcal{B}}$.

Solución

La velocidad de los puntos de contacto entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ es, utilizando el cuerpo $\mathcal{B}$,

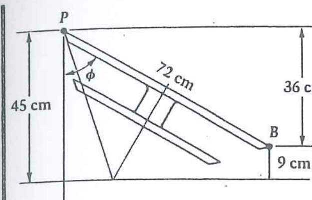
$$\mathbf{v}_B = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_{O'}}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{O'B} \tag{1}$$

$$\mathbf{v}_B = \omega_{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{i}} \times 9\hat{\mathbf{j}} = 9\omega_{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{k}} \text{ cm/s}$$

Usaremos sólo un subíndice en ω cuando se trate de la velocidad angular de un cuerpo respecto a $\mathcal{I}$.

Encontramos ahora otra expresión para $\mathbf{v}_B$ relacionando esta vez la velocidad del punto del diente de $\mathcal{C}$ en B con el punto de $\mathcal{C}$ que entra en contacto con el marco de referencia ($\mathcal{G}$ está fijo a $\mathcal{I}$) en P:

$$\mathbf{v}_B = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_P}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}} \times \mathbf{r}_{PB} \tag{2}$$



Para obtener $\mathbf{r}_{PB}$, usamos el croquis anexo y vemos que

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{36}{72}\right) = 60°$$

Por tanto,

$$\mathbf{r}_{PB} = 72\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}\right) \text{ cm} \tag{3}$$

Por el teorema de la adición,

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}/\mathcal{D}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{D}/\mathcal{I}}$$

$$= \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}\left(\frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}}\right) + \omega_{\mathcal{D}}\hat{\mathbf{i}} \tag{4}$$

en donde se tomó en cuenta que conocemos las direcciones (pero todavía no las magnitudes) de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}$ y $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{D}/\mathcal{I}}$

Sustituyendo las Ecs. (3) y (4) en (2), y sustituyendo el resultado en la Ec. (1) obtenemos

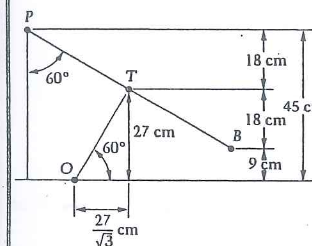
$$9\omega_{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{k}} = \left[\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}\left(\frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{j}}\right) + \omega_{\mathcal{D}}\hat{\mathbf{i}}\right] \times 72\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$= \left\{\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}\left[72\left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)\right] + \omega_{\mathcal{D}}\left[72\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\hat{\mathbf{k}}$$

o simplificando,

$$\omega_{\mathcal{B}} = -8\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{D}} - 4\omega_{\mathcal{D}} \tag{5}$$

Para obtener otra ecuación con esas variables se emplea el punto T, que pertenece a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, y se muestra en el diagrama junto con algunas relaciones geométricas básicas. Primero, como punto de $\mathcal{D}$ se tiene



$$\mathbf{v}_T = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_O}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{D}} \times \mathbf{r}_{OT}$$

$$= \omega_{\mathcal{D}}\hat{\mathbf{i}} \times \left(\frac{27}{\sqrt{3}}\hat{\mathbf{i}} + 27\hat{\mathbf{j}}\right) \tag{6}$$

$$= 27\omega_{\mathcal{D}}\hat{\mathbf{k}} \text{ cm/s}$$

Luego, como punto de $\mathcal{C}$,

$$\mathbf{v}_T = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_P}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{C}} \times \mathbf{r}_{PT} \tag{7}$$

El producto vectorial en la Ec. (7) es la mitad del producto vectorial en la Ec. (2).

Pregunta 6.9 ¿Por qué pasa esto?

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_T = (-36\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{D}} - 18\omega_{\mathcal{D}})\hat{\mathbf{k}} \tag{8}$$

Igualando los segundos miembros de las Ecs. (6) y (8) obtenemos,

$$27\omega_{\mathcal{D}} = -36\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{D}} - 18\omega_{\mathcal{D}}$$

o bien

$$5\omega_{\mathcal{D}} = -4\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{D}} \tag{9}$$

Sustituyendo la Ec. (9) en la (5) da

$$\omega_{\mathcal{D}} = \frac{\omega_{\mathcal{B}}}{6}\ \text{rad/s} \tag{10}$$

y

$$\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{D}} = -\frac{5}{24}\omega_{\mathcal{B}}\ \text{rad/s} \tag{11}$$

Reemplazando las Ecs. (10) y (11) en la (4) da $\omega_{\mathcal{C}}$, que necesitaremos en la última etapa del problema. El resultado es:

$$\omega_{\mathcal{C}} = \left(-\frac{5}{24}\omega_{\mathcal{B}}\right)\left(\frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right) + \left(\frac{\omega_{\mathcal{B}}}{6}\right)\hat{\imath}$$

$$\omega_{\mathcal{C}} = \frac{\omega_{\mathcal{B}}}{16}\hat{\imath} - \frac{5\sqrt{3}}{48}\omega_{\mathcal{B}}\hat{\jmath} \tag{12}$$

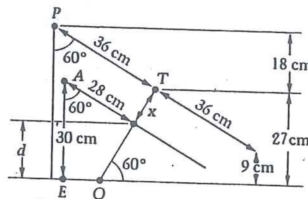
Podemos ahora relacionar las velocidades de los puntos de contacto entre los cuerpos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$ en el punto A; primero, usando los puntos A y E de $\mathcal{A}$, obtenemos

$$\mathbf{v}_A = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_E}} + \omega_{\mathcal{A}}\hat{\imath} \times 30\hat{\jmath}$$
$$\mathbf{v}_A = 30\omega_{\mathcal{A}}\hat{\mathbf{k}}\ \text{cm/s} \tag{13}$$

Para tener otra expresión para $\mathbf{v}_A$ relacionamos las velocidades de los dos puntos A y P sobre el cuerpo $\mathcal{C}$:

$$\mathbf{v}_A = \overset{0}{\cancel{\mathbf{v}_P}} + \omega_{\mathcal{C}} \times \mathbf{r}_{PA} \tag{14}$$

Para obtener el vector de posición $\mathbf{r}_{PA}$ se recurre a las relaciones geométricas mostradas en el diagrama. La distancia x requerida para formar $\mathbf{r}_{PA}$ es igual a (27-d)/sen 60°:



$$x = \frac{27 - d}{\sqrt{3}/2} = \frac{27 - [30 - 28(\frac{1}{2})]}{\sqrt{3}/2} = \frac{22}{\sqrt{3}} \tag{15}$$

Entonces

$$\mathbf{r}_{PA} = (36 - 28)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right) + \frac{22}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\jmath}\right)$$
$$= 0.577\hat{\imath} - 15.0\hat{\jmath}\ \text{cm} \tag{16}$$

Sustituyendo las Ecs. (12) y (16) en la (14),

$$\mathbf{v}_A = \omega_{\mathcal{B}}\left(\frac{1}{16}\hat{\imath} - \frac{5\sqrt{3}}{48}\hat{\jmath}\right) \times (0.577\hat{\imath} - 15.0\hat{\jmath})$$

$$\mathbf{v}_A = -0.833\omega_{\mathcal{B}}\hat{\mathbf{k}}\ \text{cm/s} \tag{17}$$

Igualando las dos expresiones para $\mathbf{v}_A$ en las Ecs. (13) y (17), resulta:

$$\omega_{\mathcal{A}} = -0.0278\omega_{\mathcal{B}}\ \text{rad/s} \tag{18}$$

Se ve que la rapidez angular del engrane $\mathcal{B}$ es 36 veces la del $\mathcal{A}$ y tiene dirección opuesta.

Pregunta 6.10 Explique por qué $\mathcal{A}$ tiene que estar girando en dirección opuesta a la de $\mathcal{B}$. (*Sugerencia:* Use la figura original y centre su atención en los puntos P y O de $\mathcal{C}$.)

Recordemos que en el Capítulo 3 pudimos demostrar que en movimiento plano un cuerpo rígido $\mathcal{B}$, excepto cuando su velocidad angular es nula, siempre tiene un punto de velocidad cero (el centro instantáneo $Ⓘ$). Demostraremos ahora que en el movimiento general (tridimensional), tal no es el caso. Comenzamos con un punto arbitrario P con velocidad $\mathbf{v}_P$ y se traza su velocidad junto con el vector velocidad angular $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = \omega$ de $\mathcal{B}$ en el marco de referencia $\mathcal{I}$. (Fig. 6.10a).

Nótese que en la Fig. 6.10a hay un plano $\mathcal{P}$ definido por los vectores $\mathbf{v}_P$ y ω dibujados a través de P, a menos que los dos vectores sean paralelos. Si lo son, entonces el movimiento de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{I}$ es como el de un destornillador (el cuerpo gira alrededor de una recta axial o central y se traslada a lo largo de ella). El caso general ($\mathbf{v}_P$ no paralelo a ω) puede también reducirse al movimiento de un destornillador de la manera siguiente. Primero reemplazamos $\mathbf{v}_P$ por sus componentes paralela $v_{P_\parallel}$) y perpendicular ($v_{P_\perp}$) a ω (Fig. 6.10b.) Luego consideramos un plano $\mathcal{R}$ paralelo a $\mathcal{P}$, a una distancia d de éste como se muestra en la Fig. 6.10b. El punto Q es la proyección de P sobre $\mathcal{R}$ y podemos expresar su velocidad en términos de P con la Ec. (6.46):

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \omega \times \mathbf{r}_{PQ}$$
$$= v_{P_\parallel}\hat{\mathbf{u}}_\parallel + v_{P_\perp}\hat{\mathbf{u}}_\perp + \omega \times d\underbrace{(\hat{\mathbf{u}}_\parallel \times \hat{\mathbf{u}}_\perp)}$$

Obsérvese en la Fig. 6.10b que éste es el vector unitario dirigido de P a Q.

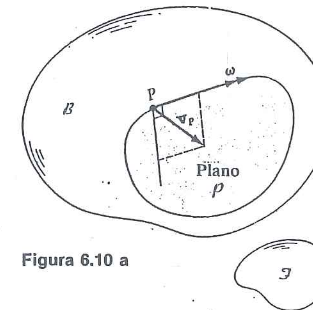


Figura 6.10 a

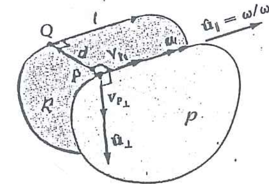


Figura 6.10b

El triple producto vectorial es igual a

$$d\hat{\mathbf{u}}_{\parallel}(\omega \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\perp}) - d\hat{\mathbf{u}}_{\perp}(\omega \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\parallel}) = 0 - d\hat{\mathbf{u}}_{\perp}(\omega)$$

de modo que

$$\mathbf{v}_Q = v_{P_\parallel}\hat{\mathbf{u}}_{\parallel} + \hat{\mathbf{u}}_{\perp}(v_{P_\perp} - d\omega)$$

Por lo tanto si d se escoge igual a $v_{P\perp}/\omega$, la recta ℓ será un "eje de destornillador" y el movimiento de $\mathcal{B}$ será como se muestra en la Fig. 6.10c.

Todos los puntos *sobre* ℓ tienen velocidades *a lo largo* de ℓ en el instante dado, mientras que aquellos fuera de ℓ tienen la misma componente de velocidad paralela a $\mathcal{B}$; además ellos giran alrededor de ella. Esta es la reducción más simple posible del movimiento de $\mathcal{B}$, y es claro que a menos que $v_{P_\parallel} = 0$, *ningún* punto puede tener velocidad nula. Entonces en tres dimensiones no se tiene necesariamente un centro instantáneo Ⓘ como en el movimiento plano.

Sin embargo, hay casos especiales en tres dimensiones en que Ⓘ existe; un caso tal es el de un cono rodando sobre un plano (Fig. 6.11). Nótese que en este caso la *línea entera* de contacto está en cada instante en reposo sobre el plano. Como la velocidad angular del cono es paralela a esta línea, *todos* los puntos de contacto tienen $v_{P_\parallel} = 0$; hemos demostrado ya que lo anterior debe ser cierto para que Ⓘ exista en tres dimensiones.

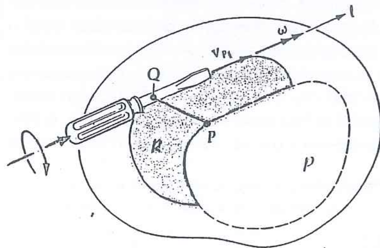


Figura 6.10c

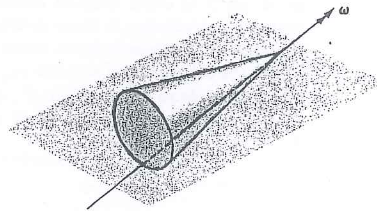


Figura 6.11

Problemas / Sección 6.7

6.49 Un joven empuja una rueda $\mathcal{W}$ cuyo centro C se mueve entonces con velocidad constante en un círculo horizontal (Fig. P6.49a). Si el extremo O del eje permanece fijo mientras C regresa a su punto de partida en T segundos, obtenga el vector de velocidad angular de la rueda $\omega_{W/\mathcal{I}}$, donde $\mathcal{I}$ es el marco de referencia representado por el terreno (Fig. P6.49b). Dé el resultado en función de b, β y T.

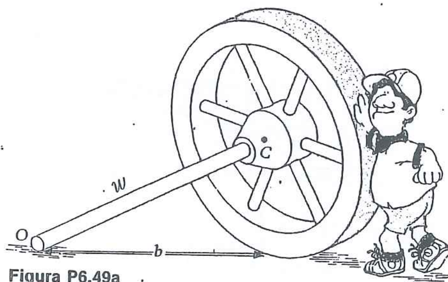


Figura P6.49a

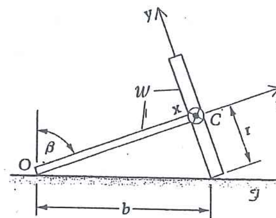


Figura P6.49b

6.50 Los engranes cónicos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ en la Fig. P6.50 soportan el árbol giratorio $\mathcal{S}$, cuya velocidad angular está dada por $\omega_{S/\mathcal{I}} = 30\hat{\mathbf{k}}$ rad/s; $\hat{\mathbf{k}}$ es paralelo a la dirección z en ambos marcos $\mathcal{I}$ y $\mathcal{S}$. (Los engranes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ son parte de $\mathcal{I}$.). Determine $\omega_{\mathcal{B}_1/\mathcal{I}}$ y $\omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{I}}$.

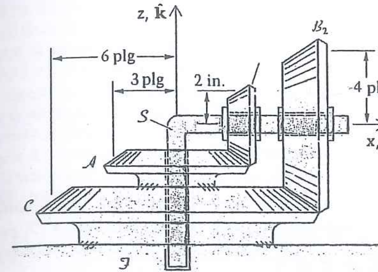


Figura P6. 50

6.51 En el problema anterior encuentre $\alpha_{\mathcal{B}_1/\mathcal{I}}$ y $\alpha_{\mathcal{B}_2/\mathcal{I}}$.

6.52 Calcule la aceleración angular de la rueda del Problema 6.49.

6.53 Encuentre la aceleración angular del engrane $\mathcal{C}$ respecto al marco $\mathcal{I}$ en el Ejemplo 6.13 si $\omega_{\mathcal{B}} =$ constante.

6.54 La velocidad angular de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$, en movimiento en el marco , es $\omega = 3\hat{\mathbf{i}} = 2\hat{\mathbf{j}}$ rad/s. Si es posible, localice (desde P un punto Q de $\mathcal{B}$ con velocidad cero cuando:

a. $\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}} = 5\hat{\mathbf{i}}$ plg/s
b. $\mathbf{v}_{P/\mathcal{I}} = 6\hat{\mathbf{i}} - 9\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ plg/s

En ambos casos explique por qué existe o no Q en vista del análisis sobre puntos de velocidad nula vista al final de la sección anterior.

6.55 El disco $\mathcal{D}$ en la Fig. P6.55 gira respecto al eje doblado $\mathcal{B}$ con velocidad angular constante Ω_1 rad/s; gira en el marco de referencia $\mathcal{I}$ con velocidad angular constante Ω_2 rad/s. (Las direcciones se indican en la figura.) Usando las ecuaciones de cuerpo rígido (6.56) y (6.57), encuentre $\mathbf{v}_{Q/\mathcal{I}}$ y $\mathbf{a}_{Q/\mathcal{I}}$ para el punto Q en la periferia del disco. Exprese el resultado en términos de componentes a lo largo de los ejes (x, y, z) fijos en $\mathcal{B}$.

6.56 Repita el problema anterior usando esta vez el concepto de marco móvil de la Sección 6.5. Considere que la barra $\mathcal{B}$ es el marco en movimiento con respecto a $\mathcal{I}$ y que Q es el punto de movimiento relativo a $\mathcal{B}$ y a $\mathcal{I}$.

6.57 Una rueda de radio r gira sobre un árbol que rota con velocidad angular $\omega_1\hat{\mathbf{k}}$ alrededor de un eje vertical (z) fijo respecto al suelo (Fig. P6.57). Si la rueda tiene rodamiento sobre el plano horizontal y ω_1 es constante, encuentre:

a. La velocidad angular y la aceleración angular de la rueda respecto al suelo.
b. La aceleración respecto al suelo del punto sobre la rueda en contacto con el plano horizontal.

6.58 Repita el Ejemplo 6.13, pero esta vez suponga que el radio del engrane $\mathcal{A}$ es de 44 cm en vez de 30 cm (y que su centro está en el mismo punto de $\mathcal{I}$). Explique por qué ahora los engranes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ están moviéndose en la misma dirección.

6.59 El engrane $\mathcal{A}$ en la Fig. P6.59 está fijo a un marco de referencia en el que se mueve el engrane $\mathcal{B}$. El eje OC de $\mathcal{B}$ gira alrededor del eje z con $\Omega = 0.2$ rad/s y el ángulo OQC es de 30°. Encuentre la velocidad angular de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$.

6.60 En el problema anterior encuentre la aceleración angular de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$ para el mismo movimiento ahí descrito.

6.61 Un engranaje diferencial de fricción puede hacerse con engranes cónicos, como se muestra en la parte superior de

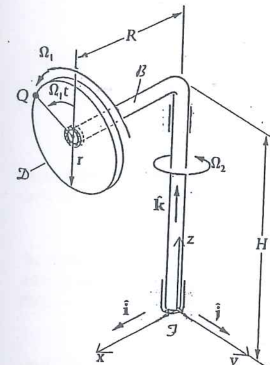


Figura P6.55

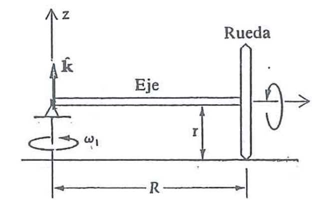


Figura P6.57

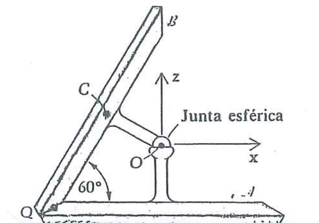


Figura P6.59

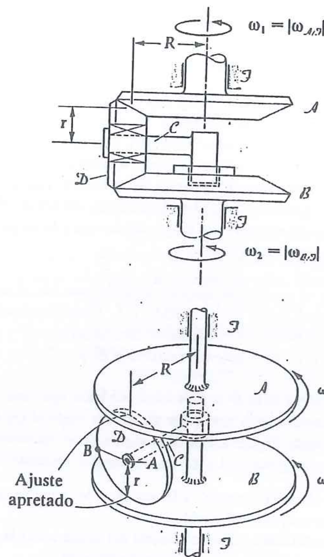


Figura P6.61

la Fig. P6.61 o bien con discos de fricción como se muestra en la parte inferior. En cada caso, el cuerpo $\mathcal{D}$ rueda sobre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, y puede girar sin resistencia alrededor del brazo $\mathcal{C}$. Encuentre $\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}$, $\omega_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}$ y las velocidades de los puntos A y B de $\mathcal{D}$.

6.62 El cono $\mathcal{C}$ circular recto uniforme y macizo en la Fig. P6.62 rueda sobre el plano horizontal $\mathcal{I}$. Se tiene $\mathcal{P}$ representa un marco en el que el eje vertical z y el eje ℓ del cono están fijos. (P tiene entonces velocidad angular simple en $\mathcal{P}$ respecto a la vertical.) Demuestre que el cono puede rodar de modo que $|\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}| = \omega$ y $|\omega_{\mathcal{P}/\mathcal{I}}| = n$ son constantes, y también que

$$\omega \operatorname{sen} \alpha = n \cos \alpha$$

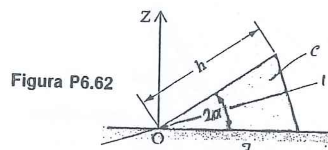


Figura P6.62

6.63 El centro C del engrane cónico $\mathcal{C}$ en la Fig. P6.63 gira en un círculo horizontal con rapidez constante de 40 mm/s (en sentido horario cuando se ve desde arriba). El contraengrane $\mathcal{D}$ está fijo al marco de referencia $\mathcal{I}$; la barra eje $\mathcal{S}$, unida rígidamente a $\mathcal{C}$, está conectada a $\mathcal{I}$ por medio de una junta esférica. Halle el vector de velocidad angular de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{I}$.

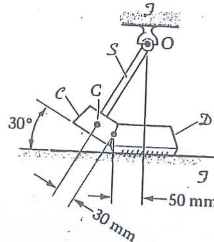


Figura P6.63

6.64 Encuentre $\alpha_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}$ para el engrane del Problema 6.63.

* 6.65 La placa $\mathcal{P}$ en la Fig. P6.65 tiene el siguiente movimiento:

1. La esquina A se mueve sobre el eje x.
2. La esquina B se mueve sobre el eje y con velocidad constante de $6\hat{\jmath}$ plg/s.
3. Algún punto del borde superior de $\mathcal{P}$ (punto Q en el instante mostrado) está siempre en contacto con el eje z.

Encuentre el vector de velocidad angular de la placa cuando $x_A = 3$ plg.

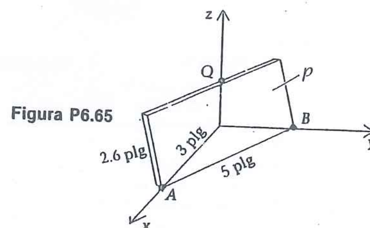


Figura P6.65

6.66 En el Ejemplo 6.13 encuentre el radio del engrane para el cual éste permanecerá estacionario en $\mathcal{A}$ al girar $\mathcal{I}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$.

6.67 En el Ejemplo 6.13 sean H el radio del engrane $\mathcal{A}$ y R el radio del engrane de 28 cm. Demuestre que la relación entre $\omega_{\mathcal{A}}$ y $\omega_{\mathcal{B}}$ está dada por $96\,\omega_{\mathcal{A}}H = (16H - 20R)\,\omega_{\mathcal{B}}$. (El centro de $\mathcal{A}$ está fijo en $\mathcal{I}$.)

6.68 Si la rapidez del punto C_2 es constante en el Ejemplo 6.10, encuentre la aceleración de C_1 en el instante dado.

6.69 Los casquillos o collarines $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en la Fig. P6.69 están unidos en C_1 y C_2 a la barra $\mathcal{R}$ por juntas esféricas. El punto C_2 tiene un movimiento a lo largo del eje x dado por $x_2 = -0.012t^3$ m. Calcule la velocidad de C_1 en función del tiempo.

* 6.70 El cono $\mathcal{C}_1$ rueda sobre el cono $\mathcal{C}_2$ de manera que su eje de simetría (x) se mueve en un plano horizontal que pasa por O, girando alrededor de z a Ω_2 rad/s (Fig. P6.70). El cono $\mathcal{C}_2$ gira alrededor de ($-z$) a Ω_1 rad/s. Encuentre, con respecto al marco $\mathcal{I}$ en que $\mathcal{C}_2$ gira, la velocidad angular y la aceleración angular de $\mathcal{C}_1$, así como la aceleración del punto A. (Los ejes (x, y, z) están fijos en el marco $\mathcal{B}$, que gira de modo que x está siempre dirigido a lo largo del eje de simetría de $\mathcal{C}_1$, y z está siempre en posición vertical. Ω_1 y Ω_2 son constantes.)

6.71 Los dos árboles $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ están fijos a engranes cónicos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, como se muestra en la Fig. P6.71. (a) Pruebe que si las velocidades de cada par de puntos en contacto van a ser iguales a lo largo de la línea de contacto de los engranes, entonces los puntos A, B y C deben coincidir.

(b) Suponga que A, B y C coinciden; encuentre la relación de ω a ω'.

6.72 (a) En el problema anterior muestre si $0 < \beta < 90°$, el resultado sigue siendo cierto si A, B y C coinciden. (b) Determine ω/ω' para este caso.

6.73 En la Fig. P6.73 se muestran los principales elementos de un diferencial de automóvil. Los ejes izquierdo y derecho, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$, están engarzados a los engranes cónicos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. El engrane $\mathcal{G}$ está fijo a la caja $\mathcal{C}$, y el conjunto tiene libertad para girar sobre chumaceras alrededor de la recta ℓ. El engrane $\mathcal{G}$ está conectado con el engrane $\mathcal{D}$ que se encuentra unido al árbol o eje principal del automóvil. Cuando la caja gira alrededor del eje común ℓ de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$, sus pasadores presionan a los otros dos engranes cónicos dentro de $\mathcal{C}$; estos son $\mathcal{B}_3$ y $\mathcal{B}_4$. (Observe que estos dos engranes no giran alrededor de sus ejes cuando la marcha del vehículo es en línea recta.)

Suponga que el automóvil toma una curva de 30 pie de radio con una velocidad de 20 mi/h (Fig. P6.73b). Si el radio de la llanta es de 14 plg, encuentre las velocidades an-

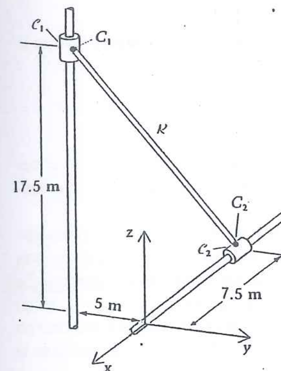


Figura P6.69

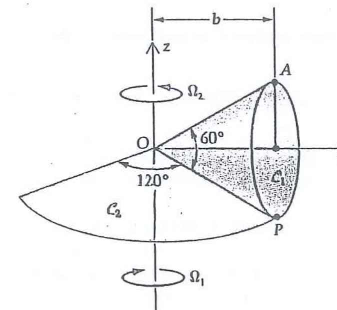


Figura P6.70

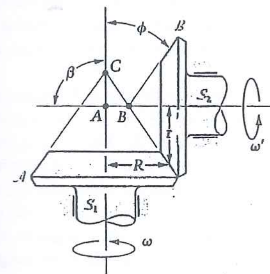


Figura P6.71

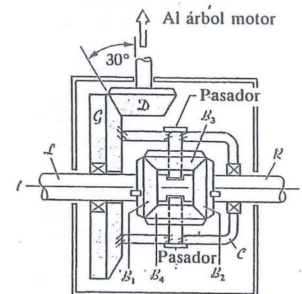


Figura P6.73a

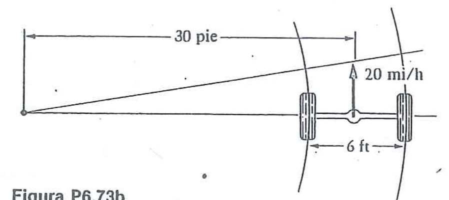


Figura P6.73b

gulares de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$, y úselas para calcular la velocidad angular de $\mathcal{D}$. Nótese que el diferencial permite que las ruedas con tracción giren con diferentes rapideces angulares.

Suponga en los tres problemas siguientes que no todos los puntos del cuerpo $\mathcal{B}$ tienen aceleración nula.

6.74 Demuestre que para un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento general, existe un punto Q de aceleración nula si $\omega \neq 0$, $\alpha \neq 0$, y α no es paralelo a ω. *Sugerencia*: Sea P un punto arbitrario, $\omega = \omega\hat{\mathbf{i}}$, $\alpha = \alpha_1\hat{\mathbf{i}} + \alpha_2\hat{\mathbf{j}}$, y $\mathbf{a}_P = a_{P_1}\hat{\mathbf{i}} + a_{P_2}\hat{\mathbf{j}} + a_{P_3}\hat{\mathbf{k}}$, nótese que no se pierde generalidad al definir así las variables. Tome $\mathbf{a}_Q = \mathbf{0} = \mathbf{a}_P + \alpha \times \mathbf{r}_{PQ} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}_{PQ})$, $x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, despeje los valores de x, y, z.

6.75 (a) Como continuación del problema anterior, demuestre que si $\omega = 0$ y $\alpha \neq 0$ en un instante específico, entonces en tal momento existe un punto Q de aceleración nula si y sólo si las aceleraciones de todos los puntos de son perpendiculares a α. (b) Investigue el caso $\omega \neq 0$ y $\alpha = 0$.

6.76 Continuación del Problema 6.74: Demuestre que en cualquier instante cuando los dos vectores ω y α son paralelos, existe un punto de $\mathcal{B}$ con aceleración nula si y solo si las aceleraciones de todos sus puntos son perpendiculares ω y α.

* **6.77** Obtenga la aceleración angular de la placa del Problema 6.65 en el mismo instante.

6.8 Descripción de la orientación de un cuerpo rígido

En el caso del movimiento plano de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$, si conocemos la velocidad angular

$$\omega = \omega\hat{\mathbf{k}} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$$

en función del tiempo, podemos integrar para encontrar la orientación de $\mathcal{B}$ en cualquier tiempo t:

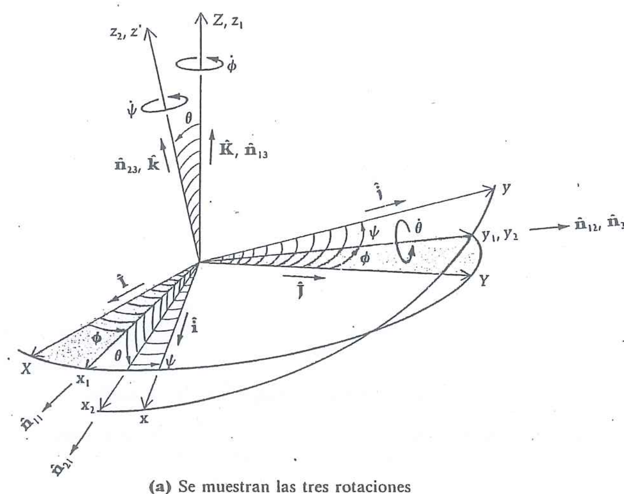
$$\int_0^t \dot{\theta}(\xi)\, d\xi = \theta(t) - \theta(0)$$

En el movimiento plano es posible especificar por completo la posición de $\mathcal{B}$ dando las coordenadas xy de un punto (generalmente se escoge el centro de masa C) y el ángulo θ de orientación.

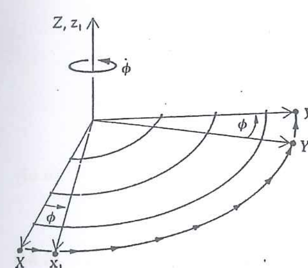
Una diferencia importante entre el movimiento plano y el general es que los ángulos que determinan la orientación de un cuerpo en el espacio en el movimiento tridimensional, *no* son integrales por simples cuadraturas de las componentes de la velocidad angular del cuerpo. De hecho, encontrar (en general) la orientación de un cuerpo $\mathcal{B}$ en forma cerrada, dada $\omega(t)$ y la orientación de $\mathcal{B}$ en $t = 0$, es un problema aún no resuelto en la cinemática del cuerpo rígido. Introducimos ahora los **ángulos de Euler** para mostrar la dificultad de determinar la orientación de un cuerpo en el espacio cuando el movimiento no es plano.

Comenzamos con el cuerpo $\mathcal{B}$ orientado de manera que los ejes (x, y, z) fijos al cuerpo, inicialmente coinciden respectivamente con ejes (X, Y, Z) anclados en el marco de referencia $\mathcal{I}$. Sean $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ e $(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{K}})$ conjuntos de vectores unitarios paralelos respectivamente a (x, y, z) y (X, Y, Z). Se describirán ahora tres rotaciones sucesivas alrededor de ejes específicos para orientar $\mathcal{B}$ en $\mathcal{I}$ (Fig. 6.12a).

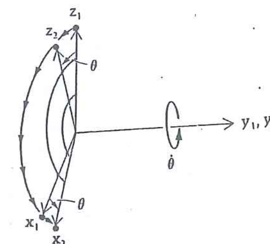
En la Fig. 6.12b la primera rotación en el ángulo ϕ alrededor del eje Z. Denotemos las nuevas posiciones de (x, y, z) después de esta primera rotación por (x, y_1, z_1), como se indica en la figura; estas posiciones están ancladas en un marco intermedio $\mathcal{I}_1$. Nótese que los ejes Z y z_1 son idénticos y que $\mathcal{I}_1$ tiene una velocidad angular simple $\dot{\phi}\hat{\mathbf{K}}$ en $\mathcal{I}$. Note también en la Fig. 6.12 que $\hat{\mathbf{n}}_{11}$, $\hat{\mathbf{n}}_{12}$ y $\hat{\mathbf{n}}_{13}$ son vectores unitarios respectivamente y siempre paralelos a x_1, y_1, z_1. A continuación (Fig. 6.12c), una rotación en el ángulo θ alrededor del eje y_1 mueve los ejes del cuerpo hacia las direcciones coordenadas (x_2, y_2, z_2) de un segundo marco intermedio, $\mathcal{I}_2$ que tiene vectores unitarios $(\hat{\mathbf{n}}_{21}, \hat{\mathbf{n}}_{22}, \hat{\mathbf{n}}_{23})$. Una rotación final de magnitud ψ alrededor de z_2 (Fig. 6.12d) gira los ejes del cuerpo hasta sus posiciones finales en $\mathcal{B}$, indicadas por (x, y, z).



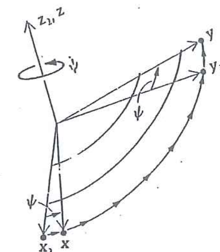
(a) Se muestran las tres rotaciones



(b) Primer ángulo de rotación de Euler (ϕ)) alrededor de Z.



(c) Segúndo ángulo de rotación de Euler (θ) alrededor de y_1.



(d) Tercer ángulo de rotación de Euler (ψ) alrededor de z_2.

Figura 6.12 Angulos de Euler

Es claro que podemos usar el teorema de la adición para expresar la velocidad angular de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{I}$ de la manera siguiente:

$$\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}_2} + \omega_{\mathcal{I}_2/\mathcal{I}_1} + \omega_{\mathcal{I}_1/\mathcal{I}}$$

$$\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = \dot{\psi}\hat{\mathbf{k}} + \dot{\theta}\hat{\mathbf{n}}_{12} + \dot{\phi}\hat{\mathbf{K}} \tag{6.58}$$

en donde $\hat{\mathbf{n}}_{ij}$ es un vector unitario en la dirección coordenada j del marco $\mathcal{I}_i (i = 1, 2)$.

Si queremos que la expresión anterior para $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ sea útil operativamente, sus tres términos deben expresarse en el *mismo marco*, o sea en términos de componentes asociadas con las direcciones de vectores base fijos en dirección en un marco común. Sin embargo, en la práctica estos términos se expresan a veces por componentes asociadas a direcciones fijas al cuerpo, otras veces a direcciones fijas en el espacio y también en ocasiones a direcciones fijas en marcos

intermedios como $\mathcal{F}_1$ o $\mathcal{F}_2$. Por ejemplo, expresemos $\omega_{B/\mathcal{F}}$ en componentes del cuerpo. Esto significa que en la Ec. (6.58) debemos expresar $\hat{n}_{12}$ y $\hat{K}$ en términos de $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$. Vemos en la Fig. 6.12 que

$$\hat{n}_{12} = \text{sen}\,\psi\hat{i} + \cos\psi\hat{j} \tag{6.59}$$

y que

$$\begin{aligned}\hat{K} &= -\text{sen}\,\theta\hat{n}_{21} + \cos\theta\hat{k}\\ &= -\text{sen}\,\theta(\cos\psi\hat{i} - \text{sen}\,\psi\hat{j}) + \cos\theta\hat{k}\end{aligned}$$

o bien

$$\hat{K} = -s_\theta c_\psi\hat{i} + s_\theta s_\psi\hat{j} + c_\theta\hat{k} \tag{6.60}$$

en donde $s_\theta = \text{sen}\,\theta$, $c_\psi = \cos\psi$, etc. Sustituyendo estas expresiones en la Ec. (6.58) se obtiene $\omega_{B/\mathcal{F}}$ en componentes del cuerpo:

$$\omega_{B/\mathcal{F}} = (s_\psi\dot{\theta} - s_\theta c_\psi\dot{\phi})\hat{i} + (c_\psi\dot{\theta} + s_\theta s_\psi\dot{\phi})\hat{j} + (\dot{\psi} + c_\theta\dot{\phi})\hat{k} \tag{6.61}$$

Alternativamente, podemos expresar $\omega_{B/\mathcal{F}}$ en términos de sus componentes en el marco $\mathcal{F}$ escribiendo $\hat{k}$ y $\hat{n}_{12}$ en términos de $\hat{I}$, $\hat{J}$ y $\hat{K}$. En la Fig. 6.12, vemos que

$$\hat{n}_{12} = -s_\phi\hat{I} + c_\phi\hat{J} \tag{6.62}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{k} &= \text{sen}\,\theta\hat{n}_{11} + \cos\theta\hat{K}\\ &= \text{sen}\,\theta(\cos\phi\hat{I} + \text{sen}\,\phi\hat{J}) + \cos\theta\hat{K}\end{aligned}$$

o bien

$$\hat{k} = s_\theta c_\phi\hat{I} + s_\theta s_\phi\hat{J} + c_\theta\hat{K} \tag{6.63}$$

Sustituyendo en la Ec. (6.58) obtenemos $\omega_{B/\mathcal{F}}$ en $\mathcal{F}$:

$$\omega_{B/\mathcal{F}} = (-s_\phi\dot{\theta} + s_\theta c_\phi\dot{\psi})\hat{I} + (c_\phi\dot{\theta} + s_\theta s_\phi\dot{\psi})\hat{J} + (\dot{\phi} + c_\theta\dot{\psi})\hat{K} \tag{6.64}$$

Finalmente, es aún más fácil expresar $\omega_{B/\mathcal{F}}$ en los marcos *intermedios*; para expresarla en términos de sus componentes en $\mathcal{F}_1$ observemos que

$$\hat{K} \equiv \hat{n}_{13} \tag{6.65}$$

y

$$\hat{k} = c_\theta\hat{n}_{13} + s_\theta\hat{n}_{11} \tag{6.66}$$

De la Ec. (6.58) obtenemos entonces

$$\omega_{B/\mathcal{F}} = s_\theta\dot{\psi}\hat{n}_{11} + \dot{\theta}\hat{n}_{12} + (c_\theta\dot{\psi} + \dot{\phi})\hat{n}_{13} \tag{6.67}$$

Todas estas expresiones para $\omega_{B/\mathcal{F}}$ tienen apariencia diferente, pero por supuesto representan el *mismo vector* expresado en marcos diferentes. Las componentes pueden variar de marco a marco pero el vector es el mismo. En el primer ejercicio al final de esta sección se pedirá al lector expresar $\omega_{B/\mathcal{F}}$ en otro marco, $\mathcal{F}_2$.

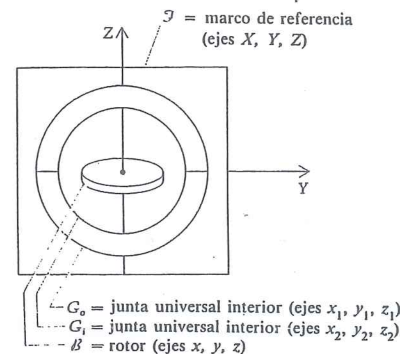


Figura 6.13

Los ángulos (ϕ, θ, ψ) se conocen como **ángulos de Euler**. Representan una manera de orientar un cuerpo rígido en el espacio. Desafortunadamente para los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) no se emplean los mismos símbolos universalmente; peor aún es que el orden y los sentidos de las rotaciones o giros varían de autor a autor. Obviamente es muy importante entonces escoger una convención y usarla consistentemente.

Se puede obtener un sentido físico de los ángulos de Euler considerando un giróscopo B que gira en una suspensión de Cardán o cardánica, como se muestra en la Fig. 6.13. En este sistema los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) pueden emplearse como sigue para fijar la orientación del rotor B en el espacio:

1. Primera rotación: Se gira un ángulo ϕ, con respecto al marco $\mathcal{F}$, el plano del soporte exterior G_0 (marco $\mathcal{F}_1$, en la teoría anterior) alrededor del eje Z. El eje X gira hasta el x_1 y el eje Y hasta el y_1; los marcos (cuerpos) G_i y B no se muestran aún, pero se mueven rígidamente con G_0 éste primer giro (Fig. 6.14).
2. Segunda rotación: Luego giramos un ángulo θ el plano del soporte interior G_i ($\mathcal{F}_2$) alrededor del eje y_1, inclinándose entonces G_i con respecto a G_0. El eje z_1 gira hasta el eje z_2 y el x_1 hasta el x_2. El cuerpo B (no se muestra en la Fig. 6.15) participa del movimiento.
3. Tercera rotación: La tercera y última rotación desplaza al rotor B un ángulo ψ alrededor del eje z_2 (Fig. 6.16). Esto permite a B girar con respecto a G_i. El eje x_2 gira hasta el eje x y el y_2 hasta el y.

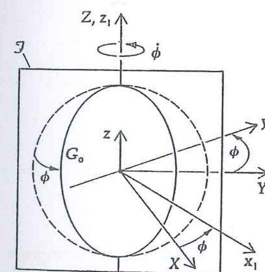


Figura 6.14 Primera rotación

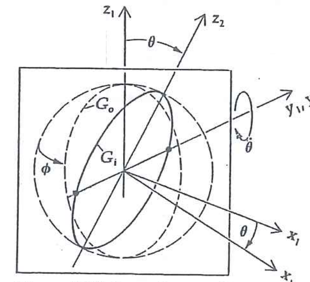


Figura 6.15 Segunda rotación

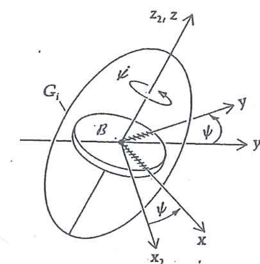


Figura 6.16 Tercera rotación

Por medio de esas tres rotaciones en los ángulos de Euler, el cuerpo ($\mathcal{B}$) puede colocarse en cualquiera orientación deseada en el espacio ($\mathcal{I}$). Podemos ahora ver la dificultad de encontrar una solución para la orientación de un cuerpo rígido en movimiento general. Si expresemos $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ como $\omega_1\hat{\mathrm{i}} + \omega_2\hat{\mathrm{j}} + \omega_3\hat{\mathrm{k}}$, la Ec. (6.61) es equivalente a

$$\begin{aligned} s_\psi\dot{\theta} - s_\theta c_\psi\dot{\phi} &= \omega_1 \\ c_\psi\dot{\theta} + s_\theta s_\psi\dot{\phi} &= \omega_2 \\ \dot{\psi} + c_\theta\dot{\phi} &= \omega_3 \end{aligned} \tag{6.68}$$

Despejando las derivadas de los ángulos de Euler se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega_1 s_\psi + \omega_2 c_\psi \\ \dot{\phi} &= \frac{\omega_2 s_\psi - \omega_1 c_\psi}{s_\theta} \\ \dot{\psi} &= \frac{\omega_3 s_\theta - \omega_2 c_\theta s_\psi + \omega_1 c_\theta c_\psi}{s_\theta} \end{aligned} \tag{6.69}$$

Vemos en estas ecuaciones que aunque conociéramos las componentes de ω como funciones del tiempo en forma cerrada,* aún sería una tarea enorme la integración de las Ecs. (6.69) para obtener los ángulos de Euler y determinar así la orientación del cuerpo en el espacio. Esto no es posible en general, y usualmente se utilizan computadoras para efectuar integraciones numéricas basadas en métodos paso a paso como el de Runge-Kutta.

Incidentalmente, las expresiones sen θ que aparecen en los denominadores de las Ecs. (6.69) presentan serios obstáculos en la dinámica de los vehículos espaciales: siempre que θ es cero o un múltiplo de π, en las ecuaciones se desarrolla una singularidad. Para vencer esas dificultades en la orientación de un cuerpo se recurre a una programación sumamente elaborada, y en algunos casos a medios matemáticos completamente diferentes.

Mencionaremos que el uso de los ángulos de Euler tal como se definieron requiere que se mantenga el *orden* de rotación. Para ilustrar la importancia del orden mencionado observemos que si se gira este libro en de dos ángulos $\pi/2$ alrededor de los ejes espaciales Y y Z, en órdenes opuestos como se muestra en la Fig. 6.17, la posición final del libro será diferente.

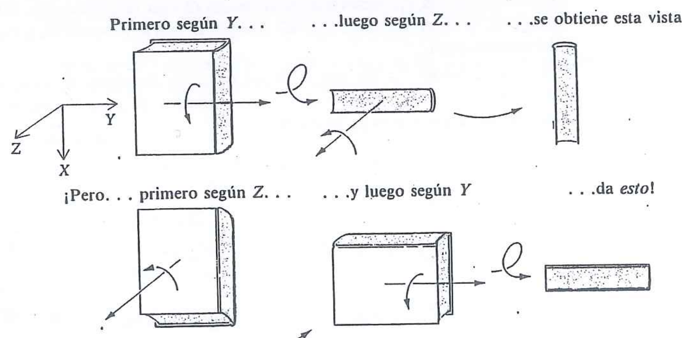


Fig. 6.17 Rotaciones finitas.

*Las ecuaciones que rigen a esas tres componentes de la velocidad angular son las ecuaciones de Euler para la cinética del cuerpo rígido; son ecuaciones no lineales e insolubles en forma cerrada para el movimiento tridimensional, excepto en unos cuantos casos. Estudiaremos esas ecuaciones en el Capítulo 7.

Debemos señalar que hay maneras de establecer los ejes y los ángulos para que la orientación final sea independiente del orden. Por ejemplo, consideremos que Z está fijo en $\mathcal{I}$, z fijo en $\mathcal{B}$ y y siempre perpendicular tanto a Z como a z; ahora restringimos a Z a no ser paralelo a z. (Una posibilidad es que el eje de $\mathcal{B}$ coincida inicialmente con el eje X.) En este caso, los ángulos (ϕ, θ, ψ) tal como se definieron antes pueden ser girados en cualquiera de las seis maneras ordenadas posibles y la orientación resultante del cuerpo en $\mathcal{I}$ será cada vez la misma*.

Un conjunto alternativo de tres giros se ha vuelto muy utilizado recientemente:

1. Rotación θ_1 respecto a X.
2. Luego, rotación θ_2 respecto a y_1.
3. Finalmente, rotación θ_3 respecto a z_2.

Esta sucesión o secuencia de rotaciones da como resultado componentes de velocidad angular en $\mathcal{B}$ (o sea en el sistema de ejes de cuerpo (x, y, z)) iguales a:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin\theta_3 \\ \omega_2 &= -\dot{\theta}_1 \cos\theta_2 \sin\theta_3 + \dot{\theta}_2 \cos\theta_3 \\ \omega_3 &= \dot{\theta}_1 \sin\theta_2 + \dot{\theta}_3 \end{aligned} \tag{6.70}$$

Aunque las Ecs. (6.70) no están formadas con base en los ángulos de Euler clásicos, el resultado es un conjunto igualmente válido de relaciones entre las componentes de $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ y los ángulos θ_i de rotación. El orden y los ejes de las rotaciones θ_i en este sistema son muy fáciles de recordar.

Existen alternativas al uso de los ángulos de Euler o de los ángulos de la Ec. (6.70) para orientar un cuerpo en el espacio. Una alternativa tal es usar los cuaterniones de Hamilton que cancelan las singularidades que ocurren debido a los denominadores nulos que aparecen para ciertos valores de los ángulos de Euler. (Por esta razón se usaron cuaterniones en el sistema de control de actitud del Skykab Orbital Assembly.) Otra posibilidad para orientar un cuerpo en el espacio es determinar los cosenos directores de un vector unitario, fijo en dirección en el espacio $\mathcal{I}$, con respecto a un conjunto de ejes fijos en el cuerpo $\mathcal{B}$. Sea $\hat{\mathrm{u}}$ este vector unitario con cosenos directores (p, q, r) referidos a los ejes (x, y, z) fijos en $\mathcal{B}$. Sean también $(\hat{\mathrm{i}}, \hat{\mathrm{j}}, \hat{\mathrm{k}})$ vectores unitarios paralelos respectivamente a los ejes (x, y, z). Se tiene entonces

$$\hat{\mathrm{u}} = p\hat{\mathrm{i}} + q\hat{\mathrm{j}} + r\hat{\mathrm{k}}$$

Derivando en $\mathcal{I}$ obtenemos

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{I}}\dot{\hat{\mathrm{u}}} = 0 &= {}^{\mathcal{B}}\dot{\hat{\mathrm{u}}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \hat{\mathrm{u}} \\ &= (\dot{p}\hat{\mathrm{i}} + \dot{q}\hat{\mathrm{j}} + \dot{r}\hat{\mathrm{k}}) + (\omega_x\hat{\mathrm{i}} + \omega_y\hat{\mathrm{j}} + \omega_z\hat{\mathrm{k}}) \times (p\hat{\mathrm{i}} + q\hat{\mathrm{j}} + r\hat{\mathrm{k}}) \\ &= (\dot{p} + \omega_y r - \omega_z q)\hat{\mathrm{i}} + (\dot{q} + \omega_z p - \omega_x r)\hat{\mathrm{j}} + (\dot{r} + \omega_x q - \omega_y p)\hat{\mathrm{k}} \end{aligned}$$

Este vector tiene las siguientes ecuaciones en componentes escalares:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \omega_z q - \omega_y r \\ \dot{q} &= \omega_x r - \omega_z p \\ \dot{r} &= \omega_y p - \omega_x q \end{aligned} \tag{6.71}$$

*Reorientaciones subsecuentes serán igualmente independientes del orden en que se efectúen; véase T.R. Kane y D.A. Levinson, "Successive Finite Rotations", *Journal of Applied Mechanics*, Dic. 1978, vol. 45, pág. 945-946.

Si las componentes de ω son dadas u obtenibles de las ecuaciones de la cinética (que se estudiará en el Capítulo 7), entonces en las Ecs. (6.71) pueden despejarse las cosenos directores, lográndose así orientar $\mathcal{B}$ en $\mathcal{J}$. Las Ecs. (6.71) son las llamadas *Ecuaciones de Poisson*, que son alternativas de las Ecs. (6.68) y (6.70).

Problemas / Sección 6.8

6.78 Usando los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) vistos en esta sección, exprese $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{J}}$ en (términos de sus componentes en) el marco $\mathcal{J}_2$.

6.79 Demuestre que las magnitudes de $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{J}}$ son todas iguales a las expresadas (a) en $\mathcal{B}$ por la Ec. (6.61), (b) en $\mathcal{J}$ por la Ec. (6.64), y (c) en $\mathcal{J}_1$ por la Ec. (6.67).

6.80 Deduzca las Ecs. (6.70).

6.81 Exprese $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{J}}$ en $\mathcal{J}$ usando rotaciones sucesivas θ_1, θ_2 y θ_3, que conducen a las Ecs. (6.70) cuando se expresan en $\mathcal{B}$.

6.82 El teorema de Euler para rotaciones finitas se expresa como sigue: la rotación más general de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ con respecto a un punto A es equivalente a una rotación respecto a algún eje que pase por A. Demuestre el teorema. *Sugerencia*: considere A fijo en el marco de referencia en que se mueve $\mathcal{B}$ (Fig. P6.82). Considere que antes de la rotación P está en P_1, y en P_2 después; suponga lo mismo para Q (en Q_1 antes, en Q_2 después). Biseque el ángulo P_1AP_2 con un plano normal al plano del ángulo. Haga lo mismo para Q_1AQ_2 y considere la intersección de los dos planos.

6.83 El teorema de Chasle establece que: El desplazamiento más general de un cuerpo rígido es equivalente a la traslación de algún punto A seguida de una rotación alrededor de un eje que pase por A. Demuestre que este enunciado es una consecuencia inmediata del problema anterior.

6.84 El tambor circular de radio R en la Fig. P6.84 pivotea sobre un soporte en O; este punto O se encuentra a una distancia $R/2$ del centro C del tambor. Un peso W (partícula) cuelga de una cuerda enrollada alrededor del tambor, el cual es girado lentamente $\pi/2$ rad en sentido horario alrededor de O. Encuentre el desplazamiento de W. *Sugerencia*: Use el resultado del problema anterior, siendo C el punto A y con la rotación $\pi/2$ ⤼ en seguida de la traslación. Sume los desplazamientos de W durante cada parte.

6.85 En la Fig. P6.85, la esfera $\mathcal{S}$ rueda sobre el plano y su velocidad angular en el marco de referencia $\mathcal{J}$, en el que (x, y, z) están fijos, está dada por la Ec. (6.64). Observando que $\mathbf{v}_C = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}}$, escriba las ecuaciones de restricción (condiciones de resbalamiento nulo), relacionado $\dot{x}$ y $\dot{y}$ con los ángulos de Euler (ϕ, θ, ψ) y sus derivadas.

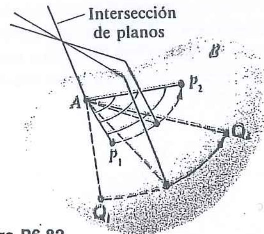


Figura P6.82

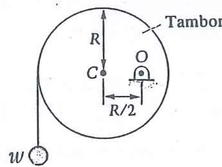


Figura P6.84

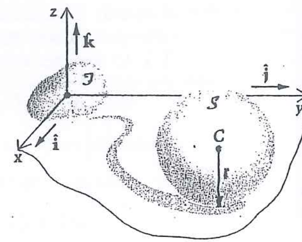


Figura P6.85

6.9 Matrices de rotación

Suponga que un vector Q se expresa en un marco $\mathcal{J}$ y que sus componentes son elementos de una matriz columna $\{Q\}_{\mathcal{J}}$. Es posible desarrollar un conjunto de matrices (3 × 3) designadas $[T_x]$, $[T_y]$ y $[T_z]$ que al posmultiplicar cada una de ellas por $\{Q\}_{\mathcal{J}}$ dan las componentes de $\mathbf{Q}$ en un nuevo marco girado alrededor de un eje x, y o z, respectivamente, de $\mathcal{J}$. Estas matrices reducen el trabajo implicado, por ejemplo, en pasar de la Ec. (6.58) a la (6.61) o a la (6.64), a un par de simples multiplicaciones matriciales.

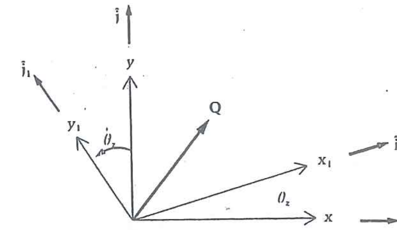


Figura 6.18

Desarrollaremos $[T_z]$ y luego daremos las expresiones para $[T_x]$ y $[T_y]$ que se deducen en forma similar. Sea $\mathbf{Q} = Q_x\hat{\mathbf{i}} + Q_y\hat{\mathbf{j}} + Q_z\hat{\mathbf{k}}$, en donde $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ es una tríada de vectores unitarios con direcciones fijas a lo largo de los ejes (x, y, z) del marco $\mathcal{J}$. Supongamos además que $\mathcal{B}$ es un marco cuya orientación puede obtenerse a partir de la de $\mathcal{J}$ mediante una rotación en un ángulo θ_z respecto a z. Los ejes girados, que estaban alineados con (x, y, z) antes de la rotación, serán denotados por (x_1, y_1, z_1) con vectores unitarios asociados $(\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{j}}_1, \hat{\mathbf{k}}_1)$.

Notemos que en el marco "nuevo" $\mathcal{B}$, podemos escribir $\mathbf{Q} = Q_{x1}\hat{\mathbf{i}}_1 + Q_{y1}\hat{\mathbf{j}}_1 + Q_{z1}\hat{\mathbf{k}}_1$, en donde $Q_{z1} = Q_z$ y $\hat{\mathbf{k}}_1 = \hat{\mathbf{k}}$ ya que la rotación es respecto a este eje, común a ambos marcos. Para obtener Q_{x1} y Q_{y1} en términos de Q_x, Q_y y θ_z (Fig. 6.18) usamos:

$$\begin{aligned} Q_{x_1} &= \mathbf{Q}\cdot\hat{\mathbf{i}}_1 = (Q_x\hat{\mathbf{i}} + Q_y\hat{\mathbf{j}} + Q_z\hat{\mathbf{k}})\cdot\hat{\mathbf{i}}_1 \\ &= Q_x(\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}}_1) + Q_y(\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{i}}_1) + Q_z\cancelto{0}{(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{i}}_1)} \\ &= Q_x\cos\theta_z + Q_y \operatorname{sen}\theta_z \end{aligned} \tag{6.72}$$

e igualmente

$$\begin{aligned} Q_{y_1} &= \mathbf{Q}\cdot\hat{\mathbf{j}}_1 = Q_x(\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}}_1) + Q_y(\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}}_1) + Q_z\cancelto{0}{(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{j}}_1)}\,. \\ &= Q_x(-\operatorname{sen}\theta_z) + Q_y\cos\theta_z \end{aligned} \tag{6.73}$$

Junto con $Q = Q_z$, las Ecs. (6.72, 6.73) dan las componentes de $\mathbf{Q}$ en el marco girado $\mathcal{B}$ en términos de sus componentes (Q_x, Q_y, Q_z) en $\mathcal{J}$. Podemos observar ahora que si la matriz $[T_z]$ se define como

$$[T_z] = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & \operatorname{sen}\theta_z & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se obtendrán los mismos resultados para las componentes de $\mathbf{Q}$ en el marco girado $\mathcal{B}$ a partir del producto matricial $[T_z]\ \{Q\}_{\mathcal{J}}$:

$$\{Q\}_{\mathcal{B}} = [T_z]\,\{Q\}_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & \operatorname{sen}\theta_z & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_x\cos\theta_z + Q_y\operatorname{sen}\theta_z \\ -Q_x\operatorname{sen}\theta_z + Q_y\cos\theta_z \\ Q_z \end{Bmatrix}$$

Las matrices para las rotaciones de θ_x alrededor de x, y de θ_y alrededor de y están dadas respectivamente por $[T_x]$ y $[T_y]$:

$$[T_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \operatorname{sen}\theta_x \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \qquad [T_y] = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\operatorname{sen}\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}$$

El lector puede verificar una o ambas matrices, como se hizo con la $[T_z]$ es un ejercicio conveniente. Nótese el cambio en el "signo del seno" en la matriz $[T_y]$. Si giramos alrededor de un eje un ángulo negativo, sólo será necesario cambiar el signo de los dos términos que contienen al seno; esto se debe a que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$. Veremos ahora ejemplos del uso de las matrices de rotación. Usaremos algunas abreviaturas "taquigráficas" comunes en cinemática: s_θ en vez de sen θ, c_ϕ en vez de cos ϕ, etc.

Ejemplo 6.14

Use matrices de rotación para obtener las componentes de $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ en coordenadas de cuerpo, dada su representación (Ec. 6.64) en el marco de referencia espacial $\mathcal{I}$.

Solución

Premultiplicamos $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ expresada matricialmente en $\mathcal{I}$, con las matrices de rotación de ϕ respecto al eje 3, después θ respecto al nuevo eje 2, y luego ψ respecto al nuevo eje 3 final:

$$\{\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}\}_{\mathcal{B}} = \underset{(\text{ángulo } \psi)}{[T_z]}\ \underset{(\text{ángulo } \theta)}{[T_y]}\ \underset{(\text{ángulo } \phi)}{[T_z]}\ \{\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}\}_{\mathcal{I}}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\phi & s_\phi & 0 \\ -s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{Bmatrix} s_\theta c_\phi \dot\psi - s_\phi \dot\theta \\ c_\phi \dot\theta + s_\theta s_\phi \dot\psi \\ \dot\phi + c_\theta \dot\psi \end{Bmatrix}}^{\text{Componentes de } \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \text{ en } \mathcal{I}}}_{\text{Esto da los componentes de de } \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \text{ en } \mathcal{I}_1}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_\theta \dot\psi \\ \dot\theta \\ \dot\phi + c_\theta \dot\psi \end{Bmatrix}}_{\text{Esto da los componentes de de } \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \text{ en } \mathcal{I}_2}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -s_\theta \dot\phi \\ \dot\theta \\ \dot\psi + c_\theta \dot\phi \end{Bmatrix}$$

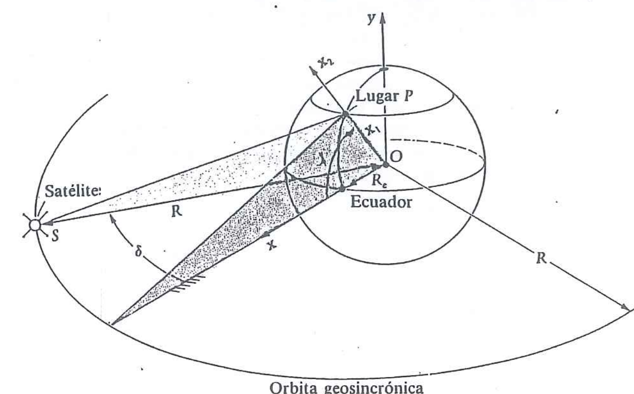
Finalmente obtenemos las componentes de $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ en $\mathcal{B}$:

$$= \begin{Bmatrix} -s_\theta c_\psi \dot\phi + s_\psi \dot\theta \\ s_\psi s_\theta \dot\phi + c_\psi \dot\theta \\ \dot\psi + c_\theta \dot\phi \end{Bmatrix}$$

Comparando los elementos de esta matriz con las componentes en la Ec. (6.61), vemos que las matrices de rotación proporcionan una manera rápida de "convertir" un vector de un marco a otro. Nótese que la primera llave horizontal señala a $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ expresada en $\mathcal{I}_1$, obtenida antes como la Ec. (6.67). La segunda llave horizontal señala las componentes de $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ en $\mathcal{I}_2$.

Ejemplo 6.15

Usando matrices de rotación, determinar los ángulos A (acimut o azimut) y E (elevación) que una antena debe, respectivamente, girar alrededor (a) de la dirección negativa de la vertical del lugar, y luego (b) del nuevo eje de elevación en su posición girada, para visar un satélite en órbita geosincrónica (ver el problema 2.67). El ángulo acimutal A es función de la latitud local λ y de la longitud oeste relativa δ del satélite: el ángulo E de elevación depende adicionalmente de R_e/R, la relación de los radios de la Tierra y la órbita. (Ver el diagrama.) (Los ángulos A y E se denominan *ángulos de visado*, y una antena que es girada primero en acimut y luego en elevación se dice que *visa* o se apunta según "elevación sobre acimut".)

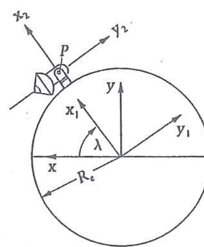


Solución

El marco $\mathcal{I}_1(x, y, z)$ tiene su origen en el centro de la Tierra; el plano xy contiene el sitio de observación P y su meridiano. Las coordenadas del satélite en este marco están dadas por el vector de posición

$$\mathbf{r}_{OS} = R\cos\delta\hat{\mathbf{i}} + R\operatorname{sen}\delta\hat{\mathbf{k}}$$

Primero se gira el marco $\mathcal{I}$ el ángulo de latitud λ respecto a z para alinear el nuevo eje x_1 con la vertical local en el sitio P. Llamamos $\mathcal{I}_1$ el marco girado resultante y obtenemos lo siguiente para las nuevas componentes de $\mathbf{r}_{OS}$ ($c_\lambda = \cos\lambda$, $s_\delta = \operatorname{sen}\delta$, etc.):



$$\{r_{OS}\}_{\mathcal{I}_1} = \underset{(\text{ángulo } \lambda)}{[T_z]} \{r_{OS}\}_{\mathcal{I}}$$

$$\{r_{OS}\}_{\mathcal{I}_1} = \begin{bmatrix} c_\lambda & s_\lambda & 0 \\ -s_\lambda & c_\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Rc_\delta \\ 0 \\ Rs_\delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Rc_\lambda c_\delta \\ -Rs_\lambda c_\delta \\ Rs_\delta \end{Bmatrix}$$

Luego trasladamos los ejes al sitio, como se muestra en el diagrama. La única componente de $\{r_{OS}\}_{\mathcal{I}_1}$ que cambia es x_1 y, por inspección,

$$\{r_{PS}\}_{\mathcal{I}_2} = \begin{Bmatrix} Rc_\lambda c_\delta - R_e \\ -Rs_\lambda c_\delta \\ Rs_\delta \end{Bmatrix}$$

Nótese que debemos restar el radio de la Tierra x_1 R_t de para obtener la coordenada correcta x_2 del satélite.

La segunda rotación es la azimutal alrededor de x_2; si llamamos el marco girado $\mathcal{I}_3$, las coordenadas (x_3, y_3, z_3) de S en este marco están dadas por

$$\{r_{PS}\}_{\mathcal{I}_3} = \underset{(\text{ángulo } -A)}{[T_x]} \{r_{PS}\}_{\mathcal{I}_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_A & -s_A \\ 0 & s_A & c_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Rc_\lambda c_\delta - R_e \\ -Rs_\lambda c_\delta \\ Rs_\delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Rc_\lambda c_\delta - R_e \\ -Rs_\lambda c_\delta c_A - Rs_\delta s_A \\ -Rs_\lambda c_\delta s_A + Rs_\delta c_A \end{Bmatrix}$$



Ahora daremos un paso importante. Se desea que la componente z_3 de $\mathbf{r}_{PS}$ sea cero porque queremos girar luego en elevación respecto a z_3 y terminar con el eje (apuntador) de la antena señalando hacia el satélite. Entonces el ángulo A se determina haciendo igual a cero: el tercer elemento de la matriz precedente

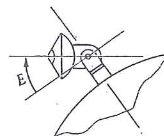
$$-Rs_\lambda c_\delta s_A + Rs_\delta c_A = 0$$

$$\tan A = \tan\delta \csc\lambda$$

$$A = \tan^{-1}(\tan\delta \csc\lambda) \tag{1}$$

Finalmente giramos el ángulo E respecto al eje z_3:

$$\{r_{PS}\}_{\mathcal{I}_4} = \underset{(\text{ángulo } E)}{[T_z]} \{r_{PS}\}_{\mathcal{I}_3}$$



$$= \begin{bmatrix} c_E & s_E & 0 \\ -s_E & c_E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Rc_\lambda c_\delta - R_e \\ -Rs_\lambda c_\delta c_A - Rs_\delta s_A \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} c_E(Rc_\lambda c_\delta - R_e) - s_E(Rs_\lambda c_\delta c_A + Rs_\delta s_A) \\ -s_E(Rc_\lambda c_\delta - R_e) - c_E(Rs_\lambda c_\delta c_A + Rs_\delta s_A) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Llegamos ahora a la condición que permitirá determinar el valor del ángulo E: se desea que la antena apunte directamente al satélite. Como el eje de la antena está ahora en la dirección $-y_3$, el giro para elevación debe detenerse cuando la coordenada x_3 sea cero:

$$c_E(Rc_\lambda c_\delta - R_e) - s_E(Rs_\lambda c_\delta c_A + Rs_\delta s_A) = 0$$

$$E = \tan^{-1}\left(\frac{Rc_\lambda c_\delta - R_e}{Rs_\lambda c_\delta c_A + Rs_\delta s_A}\right) \tag{2}$$

(Continuad)

Si $r = R_e/R($ $1/6.61)$, entonces (2) proporciona

$$E = \tan^{-1}\left(\frac{c_\lambda c_\delta - r}{s_\lambda c_\delta c_A + s_\delta s_A}\right)$$

en donde el ángulo acimutal A está dado por la Ec. (1), por lo que

$$E = \tan^{-1}\left(\frac{c_\lambda c_\delta - r}{\sqrt{1 - c_\delta^2 c_\lambda^2}}\right) \tag{3}$$

Existe un solo círculo en el cielo en el que pueden hallarse los satélites geosincrónicos. Tal círculo, que fue examinado en el Problema 2.67, se encuentra actualmente "abarrotado". En el verano de 1988 había aproximadamente 60 satélites meteorológicos y de comunicaciones de Estados Unidos y Canadá en órbita geosincrónica entre 67° y 140° de longitud oeste. Los soviéticos tenían 30 satélites de comunicación en la órbita geosincrónica y había otros 25 más de otros países.

Problemas / Sección 6.9

6.86 En Estados Unidos, los límites oriental y occidental de posiciones utilizables en el arco geosincrónico (Problema 2.67) para la instalación de satélites, son aproximadamente 70° y 143° de longitud oeste, respectivamente. Encuentre los intervalos de acimut y elevación requeridos para que la antena del Ejemplo 6.15 pueda barrer del límite oriental al occidental desde un sitio localizado en (a) 34° de latitud norte y 84° de longitud oeste; (b) en su lugar de origen. (Seleccione una ciudad contigua a Estados Unidos si el lector reside en otro país.)

6.87 Use las Ecs. (6.70) junto con matrices de rotación para calcular las componentes de velocidad angular en ejes fijos en el espacio.

6.88 Una antena $\mathcal{P}$ tiene tres grados de libertad rotacional (Fig. P6.88):

1. Ángulo acimutal A respecto a la vertical local z.
2. Ángulo de elevación E respecto a un eje originalmente paralelo a x.
3. Ángulo de polarización P respecto al eje de simetría del paraboloide (inicialmente paralelo a y).

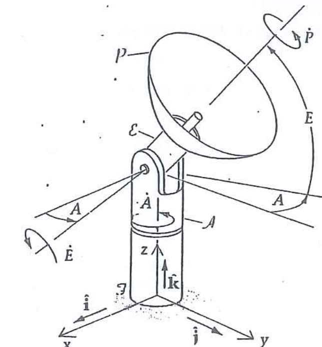


Figura P6.88

Use el teorema de la adición junto con matrices de rotación para calcular $\omega_{\mathcal{P}/\mathcal{I}}$ en términos de sus componentes en $\mathcal{I}$.

6.89 En el problema anterior calcule $\omega_{\mathcal{P}/\mathcal{I}}$ en términos de sus componentes en $\mathcal{P}$

* **6.90** Grafique el ángulo de elevación E contra el ángulo δ del satélite (ver Ejemplo 6.15) para los siguientes valores de λ (sobre la misma gráfica): $\lambda = 0°, 20°, 40°, 60°, 80°$. ¿Qué representan físicamente en esas curvas los cruces del eje δ ?

* **6.91** Calcule los ángulos de visado (ver el Ejemplo 6.15) para el caso en que la rotación en elevación se efectúe *antes* que la rotación azimutal. (Es decir, se tiene un visado de "acimut desde elevación".)

6.92 Para definir la posición de un planeta respecto a un marco fijo en el espacio se requieren *seis parámetros orbitales* (Fig. P6.92). Para encontrar su trayectoria orbital primero giramos el ángulo Ω en el plano de la eclíptica (el que contiene la trayectoria del Sol como se ve desde la Tierra) hasta el *nodo ascendente* (la intersección del plano de la eclíptica con la trayectoria del planeta cuando éste viaja hacia el norte). Luego se gira el ángulo i respecto al eje x_1 para obtener la inclinación del plano del planeta. (Por tanto, la inclinación de la Tierra se define como igual a cero.) Finalmente, el ángulo θ_o localiza el perihelio de la órbita del planeta. Este es el punto de la órbita más cercano al centro S del Sol. Dos cantidades más dan la forma de la órbita y una sexta localiza al planeta en su órbita respecto al perihelio. $\mathcal{I}$, aplique matrices de rotación para obtener las componentes de v en el marco $\mathcal{B}$ (x, y, z) situado, como se muestra, sobre la trayectoria orbital en P, en términos de Ω, i y θ_o. Si $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ *es un vector definido en el marco espacial*

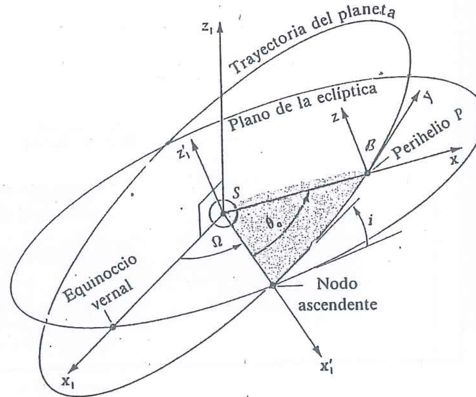


Figura P6.92

Respuestas a las preguntas / Capítulo 6

P6.1 Sí, como se vio en la Sección 1.6.

P6.2 Como $\alpha_x\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0}$, α_x puede tener cualquier valor y no afecta entonces a la primera de las ecuaciones (6.6).

P6.3 Porque entonces los ángulos (argumentos de los senos y cosenos) no son simplemente $\omega_1 t$ o $\omega_2 t$, sino integrales de ω_1 ó ω_2 respecto al tiempo.

P6.4 El plano (xy) de la página puede escogerse como el que contiene a $\hat{\mathbf{n}}_1$ y a $\hat{\mathbf{n}}_2$ sin pérdida de generalidad.

P6.5 Para θ_1 en el segundo cuadrante y con $0 <$ cos $\alpha \leq$, vemos en la Ec. (12) que tan θ_2 es un número "más" negativo que tan θ_1 (a menos que $\alpha = 0$; en tal caso $\theta_2 = \theta_1$). Por ello, θ_1 y θ_2 son ángulos entre 90° y 180°, y $\theta_2 < \theta_1$.

P6.6 ω_1 y ω_2 son escalares constantes e $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ son vectores unitarios fijos en dirección en $\mathcal{B}$.

P6.7 Si dirivamos la Ec. (6.47) en $\mathcal{I}$, encontramos el término ${}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{v}}_{P_B/\mathcal{I}} (\neq \mathbf{a}_{P_B/\mathcal{I}})$, que no es una cantidad cinemática normal o común; esto se debe a que P_B denota una *sucesión* de puntos de $\mathcal{B}$ que son en cada instante coincidentes con P.

P6.8 Se ha supuesto que la intensidad del campo gravitacional es constante pero, por supuesto ésta disminuye al alejarse C de la superficie de la Tierra.

P6.9 Porque $\mathbf{r}_{PT} = \mathbf{r}_{PB}/2$.

P6.10 Cada punto de $\mathcal{C}$ (extendido) que se encuentre sobre la recta $\overline{PO}$ tiene velocidad nula. Entonces la velocidad de B es su distancia desde $\overline{PO}$ multiplicada por $|\omega_C|$ y

lo mismo es cierto para el punto A. La velocidad de ω_A sale del papel y la de A entra. Por consiguiente, ω_A, determinada por la dirección $\mathbf{v}_A$, tiene la dirección negativa de x, opuesta a la de ω_B.

Cuestionario de repaso / Capítulo 6

¿Verdadero o falso?

1. La velocidad angular del cuerpo $\mathcal{B}$ en el marco $\mathcal{I}$ depende sólo de los cambios de orientación de $\mathcal{B}$ respecto a $\mathcal{I}$.
2. El teorema de la adición para velocidades angulares se aplica también a las aceleraciones angulares.
3. La fórmula $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{AB}$, que relaciona las velocidades de dos puntos de un cuerpo rígido en movimiento plano, se aplica también a problemas tridimensionales siempre que ω , $\mathbf{r}_{AB}$ y las $\mathbf{v}$ sean vectores tridimensionales.
4. La fórmula $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \times \mathbf{r}_{AB} - \omega^2\mathbf{r}_{AB}$ relaciona las aceleraciones de dos puntos de un cuerpo rígido en movimiento plano, es aplicable también a problemas tridimensionales, siempre que α, $\mathbf{r}_{AB}$, ω y las $\mathbf{a}$ sean vectores tridimensionales.
5. La ecuación $\omega_z = \dot{\theta}$ del movimiento plano se extiende a tres ecuaciones lineales similares en el movimiento general para determinar los ángulos de orientación.
6. Para que un punto P tenga aceleración de Coriolis diferente de cero, debe existir una velocidad relativa de P respecto al "marco móvil" y una velocidad angular del marco móvil relativa al marco de referencia.
7. Si premultiplicamos un vector $\{v\}$ por una matriz de rotación $[T]$, el vector (3×1) que obtenemos contiene las componentes "nuevas" de $\mathbf{v}$ en el marco girado.
8. Los ángulos de Euler sirven para orientar un cuerpo en el espacio tridimensional.
9. Los ángulos de Euler son tres rotaciones (ϕ, θ, ψ alrededor de ejes que inicialmente estaban bien definidos y ortogonales.
10. Es posible, para cualquier punto móvil P, escoger un marco móvil tal que la aceleración de Coriolis de P sea siempre nula.
11. El vector velocidad angular sirve para relacionar las derivadas de un vector en dos marcos.
12. Si una horquilla de una unión o junta universal desalineada gira con rapidez angular constante, también lo hace así la otra.
13. En el movimiento general de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$, en tanto $\omega \neq 0$, existe un punto de velocidad nula en $\mathcal{B}$ o en $\mathcal{B}$ extendido.
14. El orden de las rotaciones es importante al orientar un cuerpo si se usan los ángulos de Euler tal como se definieron en este capítulo (en relación con la suspensión cardánica del giróscopo o giróstato).

Respuestas: 1V; 2 F; 3 V; 4 F; 5 F; 6 V; 7 V; 8 V; 9 F; 10 V; 11 V; 12 F; 13 F; 14 V.

Capítulo 7 Cinética de un cuerpo rígido en movimiento general

7.1 Introducción

En los Capítulos 2 y 4 postulamos la existencia de marcos de referencia (inerciales, newtonianos o galileanos) en los que el movimiento de un cuerpo está regido por las ecuaciones.

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \tag{7.1}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_C = \frac{d\mathbf{H}_C}{dt} \tag{7.2}$$

Estas ecuaciones generales se particularizaron en el Capítulo 4 para el estudio del movimiento *plano* de un cuerpo rígido y se usarán ahora para estudiar el movimiento *general* de $\mathcal{B}$ en tres dimensiones.

Como indicamos en el Capítulo 2, la primera de las dos ecuaciones vectoriales describe el movimiento del centro de masa de un sistema *cualquiera**. Es aplicable, por ejemplo, a sólidos rígidos o deformables, a sistemas de masas pequeñas, a líquidos y a gases. Para un cuerpo en movimiento general (tridimensional), la Ec. (7.1) contiene tres ecuaciones no triviales en componentes escalares cuyas soluciones permiten localizar el centro de masa C (Fig. 7.1).

Hacemos ver, que tal como fue el caso en el movimiento plano, el centro de masa puede moverse independientemente de la orientación variable del cuerpo (siempre que las fuerzas externas no dependan del movimiento angular del cuerpo, lo que sucede con frecuencia). Vimos un ejemplo tal en la Sección 6.6 cuando examinamos el movimiento del centro de masa de un cuerpo cerca de la Tierra en rotación. Enfatizamos que tal simple y natural extensión de dos a tres dimensiones *no* ocurrirá con el movimiento angular u *orientación* de $\mathcal{B}$, como se vera en la Sección 7.5. La razón es que $\mathbf{H}_C$ en la Ec. (7.2) *no puede* expresarse como la suma de tres términos de la forma $I_{zz}^{c}\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$.

En el resto del capítulo desarrollaremos primero la expresión para la cantidad de movimiento (i ímpetu) angular de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en movimiento general. Esto conducirá a un estudio de las propiedades de inercia de $\mathcal{B}$; extenderemos lo estudiado en el Capítulo 4 al análisis de las transformaciones en un punto y de los ejes y momentos principales de inercia. Sólo entonces estaremos totalmente preparados para deducir las ecuaciones de Euler que rigen el movimiento rotacional de un cuerpo rígido en movimiento general. También examinaremos, como en el Capítulo 5 para el movimiento plano, algunas integrales especiales de las ecuaciones de movimiento que se conocen como Principios de Impulso y Cantidad de Movimiento, de Impulso Angular y Cantidad de Movimiento Angular, y del Trabajo y Energía Cinética.

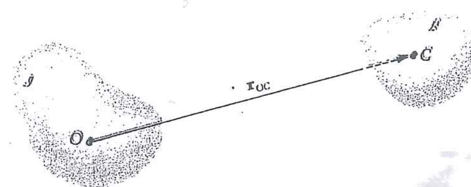


Figura 7.1 Posición del centro de masa en movimiento general

*Se excluyen los efectos relativistas que se presentan cuando las velocidades consideradas no son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz.

7.2 Cantidad de movimiento angular en tres dimensiones

Vimos en el Capítulo 4 que cuando es razonable tratar un cuerpo $\mathcal{B}$ como rígido, las ecuaciones de movimiento de $\mathcal{B}$ se simplifican grandemente. El centro de masa permanece fijo en el cuerpo y la cantidad de movimiento (o ímpetu) angular es expresable en términos de la velocidad angular y de las propiedades de inercia de $\mathcal{B}$. Procedemos ahora a estudiar la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_P$ de $\mathcal{B}$ respecto a un punto P en el movimiento general (tridimensional). Veremos que las ecuaciones que resultan son mucho más complicadas que las correspondientes al movimiento plano.

Comenzamos introduciendo un sistema de ejes rectangulares (x, y, z) con origen en P. La velocidad angular de $\mathcal{B}$ en el marco de referencia $\mathcal{I}$ puede expresarse en términos de sus componentes a lo largo de esos ejes,

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = \omega &= (\omega \cdot \hat{\mathbf{i}})\hat{\mathbf{i}} + (\omega \cdot \hat{\mathbf{j}})\hat{\mathbf{j}} + (\omega \cdot \hat{\mathbf{k}})\hat{\mathbf{k}} \\ &= \omega_x\hat{\mathbf{i}} + \omega_y\hat{\mathbf{j}} + \omega_z\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{7.3}$$

La posición, relativa a P, de un punto típico en el cuerpo está dada por

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \tag{7.4}$$

La cantidad de movimiento angular de $\mathcal{B}$ relativa a P se define como (Secciones 2.5 y 4.2)

$$\mathbf{H}_P = \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm \tag{7.5}$$

en donde $\mathbf{v}$, la velocidad del elemento de masa dm, no es la derivada de $\mathbf{r}$ sino del vector de posición del elemento dm, considerado desde un punto fijo en el marco de referencia $\mathcal{I}$, como se muestra en la Fig. 7.2.

Como $\mathcal{B}$ es un cuerpo rígido, sabemos por la Ec. (6.56), que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \omega \times \mathbf{r}$; podemos introducir esta expresión en la Ec.(7.5) para obtener,

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_P &= \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}_P\, dm + \int \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})\, dm \\ &= \left(\int \mathbf{r}\, dm\right) \times \mathbf{v}_P + \int \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})\, dm\end{aligned} \tag{7.6}$$

Usando la definición del centro de masa, la integral en el primer término del lado derecho es $m\mathbf{r}_{PC}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{H}_P = m\mathbf{r}_{PC} \times \mathbf{v}_P + \int \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})\, dm \tag{7.7}$$

En los casos en que (a) P se escoge como el centro de masa, o (b) $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$, ó (c) $\mathbf{r}_{PC}$ es paralelo a $\mathbf{v}_P$, es nulo el primer término del segundo miembro de la Ec. (7.7). Para estos casos

$$\mathbf{H}_P = \int \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})\, dm \tag{7.8}$$

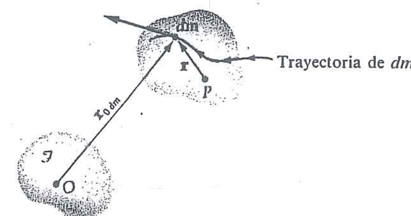


Figura 7.2

Sustituyendo ω y $\mathbf{r}$ de las Ecs. (7.3) y (7.4) y usando la identidad

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \equiv (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \tag{7.9}$$

obtenemos el siguiente resultado: (7.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_P = {} & [\omega_x \int (y^2 + z^2)\, dm - \omega_y \int xy\, dm \quad - \omega_z \int xz\, dm]\hat{\mathbf{i}} \\ & + [-\omega_x \int xy\, dm + \omega_y \int (x^2 + z^2)\, dm - \omega_z \int yz\, dm]\hat{\mathbf{j}} \\ & + [-\omega_x \int xz\, dm - \omega_y \int yz\, dm \quad + \omega_z \int (x^2 + y^2)\, dm]\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{7.10}$$

Pregunta 7.1 ¿Porqué pueden sacarse fuera de las integrales las distintas componentes ω en la Ec. (7.10)?

Para el caso en que P es C, esta expresión para la cantidad de movimiento angular se convierte en (Sección 4.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_C = {} & (I^C_{xx}\omega_x + I^C_{xy}\omega_y + I^C_{xz}\omega_z)\hat{\mathbf{i}} \\ & + (I^C_{xy}\omega_x + I^C_{yy}\omega_y + I^C_{yz}\omega_z)\hat{\mathbf{j}} \\ & + (I^C_{xz}\omega_x + I^C_{yz}\omega_y + I^C_{zz}\omega_z)\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{7.11}$$

La *forma* de la ecuación es idéntica si P no es el punto C, pero se debe cumplir entonces que $\mathbf{v}_P = 0$ o bien que $\mathbf{r}_{PC}$ sea paralelo a $\mathbf{v}_P$; la única diferencia es que las propiedades de inercia se calculan respecto a ejes que pasen por P y no por C:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_P = {} & (I^P_{xx}\omega_x + I^P_{xy}\omega_y + I^P_{xz}\omega_z)\hat{\mathbf{i}} \\ & + (I^P_{xy}\omega_x + I^P_{yy}\omega_y + I^P_{yz}\omega_z)\hat{\mathbf{j}} \\ & + (I^P_{xz}\omega_x + I^P_{yz}\omega_y + I^P_{zz}\omega_z)\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \tag{7.12}$$

Ambas expresiones para la cantidad de movimiento angular (Ecs. (7.11) y (7.12)) serán de utilidad en las secciones que siguen.

Problemas / Sección 7.2

7.1 Determine el vector cantidad de movimiento angular (o ímpetu angular) $\mathbf{H}_o$ de la rueda del Problema 6.49.

7.2 Determine el vector cantidad de movimiento angular del disco $\mathcal{B}$ en el Problema 6.27 respecto (a) a C y (b) a O.

7.3 Determine el vector cantidad de movimiento angular para la barra doblada del Ejemplo 4.13 respecto al centro de masa cuando la barra gira alrededor del eje Z con rapidez angular ω.

7.4 Un disco homogéneo delgado $\mathcal{D}$ de masa M y radio r gira con velocidad angular constante ω_2 sobre del eje $\mathcal{S}$ (Fig. P7.4). Este eje es un voladizo apoyado en el eje vertical $\mathcal{R}$ y gira con velocidad angular constante ω_1 alrededor del eje $\mathcal{R}$. Encuentre el ímpetu angular del disco respecto al punto Q y muestre la dirección del vector en un croquis.

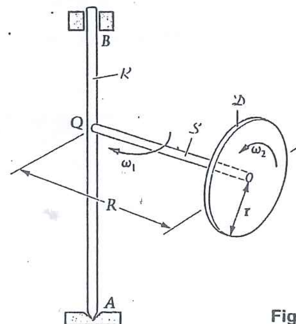


Figura P7.4

7.5 En la Fig. P7.5 se muestra un molino que está compuesto de tres partes principales:

1. El eje vertical $\mathcal{S}$ que gira con velocidad angular constante Ω.
2. El eje inclinado $\mathcal{B}$ de longitud ℓ, que está articulado a $\mathcal{S}$ y gira con él.
3. La muela $\mathcal{D}$ de radio r, que gira sobre cojinetes en C alrededor de $\mathcal{B}$ y rueda sobre la superficie interior de $\mathcal{T}$.

Cuando el eje $\mathcal{S}$ alcanza la velocidad Ω, el cuerpo $\mathcal{B}$ se muere hacia afuera un ángulo ϕ que permanece constante durante la operación. Considere a la muela $\mathcal{D}$ como si fuera un disco y encuentre su vector $\mathbf{H}_c$ de momento angular en coordenadas convenientes. (Se sugiere en la figura un posible sistema coordenado.)

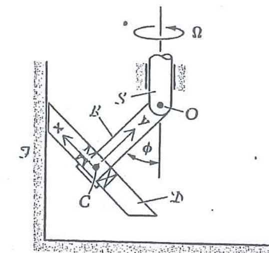


Figura P7.5

7.6 En el problema anterior note que el punto O es un punto fijo de los tres cuerpos: $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ extendido. Halle el ímpetu angular $\mathbf{H}_O$ de $\mathcal{D}$ y verifique que $\mathbf{H}_o = \mathbf{H}_c + \mathbf{r}_{oc} \times \mathbf{L}$.

7.3 Transformaciones de las propiedades de inercia

Algunas veces se necesitan los momentos y productos de inercia en puntos que no coinciden con el centro de masa C de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$. Estas propiedades pueden encontrarse sin integraciones adicionales usando los teoremas de los ejes paralelos que se analizaron en el Capítulo 4. Tales teoremas se enuncian a continuación, en donde ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$) son las coordenadas del centro de masa C respecto a ejes en P. Para el momento de inercia en P:

$$I^P_{xx} = I^C_{xx} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \tag{7.13a}$$

$$I^P_{yy} = I^C_{yy} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \tag{7.13b}$$

$$I^P_{zz} = I^C_{zz} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \tag{7.13c}$$

Para los productos de inercia en P:

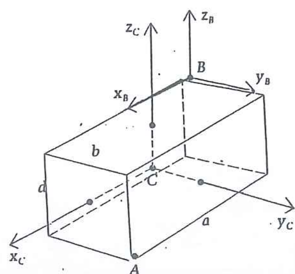
$$I^P_{xy} = I^C_{xy} - m\bar{x}\bar{y} \tag{7.14a}$$

$$I^P_{yz} = I^C_{yz} - m\bar{y}\bar{z} \tag{7.14b}$$

$$I^P_{zx} = I^C_{zx} - m\bar{z}\bar{x} \tag{7.14c}$$

Ejemplo 7.1

Como ejemplo de repaso, calcula las propiedades de inercia en la esquina B del paralelepípedo rectangular uniforme de masa m mostrado en el diagrama.



Solución

Para los momentos de inercia obtenemos

$$I^B_{xx} = I^C_{xx} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \frac{m}{12}(b^2 + d^2) + m\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right] = \frac{m}{3}(b^2 + d^2)$$

Nótese que la distancia entre X_B y X_C es $\sqrt{(b/2)^2 + (d/2)^2}$. De la misma manera:

$$I^B_{y_B} = \frac{m}{3}(d^2 + a^2) \qquad \text{y} \qquad I^B_{z_B} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$$

Para los productos de inercia se obtiene:

$$I^B_{xy} = I^C_{xy} - m\bar{x}\bar{y} = 0 - m\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{-mab}{4}$$

$$I^B_{yz} = I^C_{yz} - m\bar{y}\bar{z} = 0 - m\left(\frac{b}{2}\right)\left(-\frac{d}{2}\right) = \frac{mbd}{4}$$

$$I^B_{xz} = I^C_{xz} - m\bar{x}\bar{z} = 0 - m\left(\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{d}{2}\right) = \frac{mad}{4}$$

Consideraremos ahora una segunda e igualmente importante transformación, que mostrará que si conocemos los momentos y productos de inercia asociados a un conjunto de ejes ortogonales con centro en P, podemos entonces calcular fácilmente los momentos y productos de inercia asociados a cualquier otro conjunto de ejes que tenga el mismo origen. Consideremos dos conjuntos de ejes con un origen común en P (Fig. 7.3). Sean ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z los cosenos directores de x' respecto a X, y Z, respectivamente. Entonces la coordenada ortogonal x' de un punto Q en el cuerpo se relaciona con las coordenadas ortogonales x, y z por medio de

$$x' = \mathbf{r}_{PQ} \cdot \underbrace{(\ell_x\hat{\mathbf{i}} + \ell_y\hat{\mathbf{j}} + \ell_z\hat{\mathbf{k}})}_{\text{vector unitario de lo largo del eje } x'}$$

$$= (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}) \cdot (\ell_x\hat{\mathbf{i}} + \ell_y\hat{\mathbf{j}} + \ell_z\hat{\mathbf{k}})$$

$$x' = x\ell_x + y\ell_y + z\ell_z \tag{7.15}$$

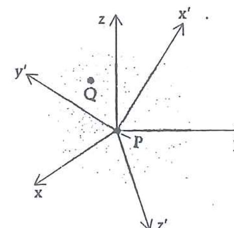


Figura 7.3

Se busca encontrar una fórmula para $I^P_{x'x'}$ en términos de las propiedades de inercia expresadas respecto a los ejes (x, y Z). La definición de $I^P_{x'x'}$ es

$$I^P_{x'x'} = \int (y'^2 + z'^2)\, dm \tag{7.16}$$

Como $X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ (cada uno es el cuadrado de la longitud de $\mathbf{r}_{PQ}$), podemos sumar y restar $'^2$ para producir esta cantidad en la Ec. (7.16):

$$\begin{aligned} I^P_{x'x'} &= \int [(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x'^2]\, dm \\ &= \int [(x^2 + y^2 + z^2) - x'^2]\, dm \end{aligned} \tag{7.17}$$

Sustituyendo X' dado por la Ec. (7.15) en la Ec. (7.17) da:

$$I^P_{x'x'} = \int [x^2 + y^2 + z^2 - (x\ell_x + y\ell_y + z\ell_z)^2]\, dm$$

Desarrollando el trinomio y reordenando términos obtenemos:

$$\begin{aligned} I^P_{x'x'} = \int [&(1 - \ell_x^2)x^2 + (1 - \ell_y^2)y^2 + (1 - \ell_z^2)z^2 \\ &- 2xy\ell_x\ell_y - 2xz\ell_x\ell_z - 2yz\ell_y\ell_z]\, dm \end{aligned} \tag{7.18}$$

Como las ℓ' son los cosenos directores del vector en la dirección del eje X_I, se cumple que

$$\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2 = 1$$

Usando esta relación en los primeros tres términos del integrando en la Ec. (7.18) resulta:

$$\begin{aligned} I^P_{x'x'} = \int [&(\ell_y^2 + \ell_z^2)x^2 + (\ell_x^2 + \ell_z^2)y^2 + (\ell_x^2 + \ell_y^2)z^2 \\ &- 2xy\ell_x\ell_y - 2xz\ell_x\ell_z - 2yz\ell_y\ell_z]\, dm. \end{aligned}$$

Reagrupando términos,

$$\begin{aligned} I^P_{x'x'} &= \ell_x^2 \int (y^2 + z^2)\, dm + \ell_y^2 \int (x^2 + z^2)\, dm + \ell_z^2 \int (x^2 + y^2)\, dm \\ &\quad + 2\ell_x\ell_y\left(-\int xy\, dm\right) + 2\ell_x\ell_z\left(-\int zx\, dm\right) + 2\ell_y\ell_z\left(-\int yz\, dm\right) \end{aligned} \tag{7.19}$$

Las seis integrales en la Ec. (7.19) son las propiedades de inercia asociadas a las direcciones (x, y, z) en P, por lo que finalmente:

$$I^P_{x'x'} = \ell_x^2 I^P_{xx} + \ell_y^2 I^P_{yy} + \ell_z^2 I^P_{zz} + 2\ell_x\ell_y I^P_{xy} + 2\ell_x\ell_z I^P_{xz} + 2\ell_y\ell_z I^P_{yz} \tag{7.20}$$

Esta fórmula permite calcular el momento de inercia de la masa de $\mathcal{B}$ respecto a cualquier recta por P si conocemos las propiedades en P de cualquier conjunto de ejes ortogonales. Ilustraremos su empleo con un ejemplo.

Ejemplo 7.2

Calcule el momento de inercia respecto a la diagonal BA del paralelepípedo del rectangular Ejemplo 1.

Solución

Definimos el eje x' a partir de B y señalando hacia A. Las propiedades de inercia en B se calcularon en el ejemplo anterior.
Los cosenos directores de x' son

$$\ell_x = \frac{a}{H} \qquad \ell_y = \frac{b}{H} \qquad \ell_z = \frac{-d}{H}$$

en donde

$$H = \sqrt{a^2 + b^2 + d^2} = |\mathbf{r}_{BA}|$$

Sustituyendo las ℓ_i y las propiedades de inercia en B en la Ec. (7.20) se obtiene:

$$I^B_{x'x'} = \frac{m}{3H^2}\,[(b^2 + d^2)a^2 + (d^2 + a^2)b^2 + (a^2 + b^2)d^2]$$
$$+ \frac{2m}{H^2}\left[(ab)\left(\frac{-ab}{4}\right) + (-ad)\left(\frac{ad}{4}\right) + (-bd)\left(\frac{bd}{4}\right)\right]$$
$$= \frac{m(a^2b^2 + b^2d^2 + d^2a^2)}{6(a^2 + b^2 + d^2)}$$

En este ejemplo observamos que la recta BA también pasa por el centro de masa C. El momento de inercia respecto a la recta BA es, por supuesto, el mismo irrespectivamente de qué punto sobre la línea se use para el cálculo. (En este caso sería más fácil calcular en el punto C porque las ℓ_i son las mismas mientras que los *productos* de inercia se anulan.)

Un resultado similar a la Ec. (7.20) para productos de inercia se derivará ahora. Sean n_x, n_y y n_z los cosenos directores del eje y'. Nótese que la coordenada ortogonal y puede entonces escribirse, igual que la Ec. (7.15), de la siguiente manera:

$$y' = xn_x + yn_y + zn_z \tag{7.21}$$

Por definición

$$I^P_{x'y'} = -\int x'y'\,dm = -\int (x\ell_x + y\ell_y + z\ell_z)(xn_x + yn_y + zn_z)\,dm$$

En consecuencia, desarrollando y reconociendo las integrales de producto de inercia,

$$I^P_{x'y'} = \int -(x^2\ell_x n_x + y^2\ell_y n_y + z^2\ell_z n_z)\,dm + (\ell_x n_y + \ell_y n_x)I^P_{xy}$$
$$+ (\ell_x n_z + \ell_z n_x)I^P_{xz} + (\ell_y n_z + \ell_z n_y)I^P_{yz}. \tag{7.22}$$

Ya que (ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z) y (n_x, n_y, n_z) son componentes de vectores unitarios a lo largo de los ejes mutuamente perpendiculares x', y', podemos multiplicar escalarmente esos vectores y obtener

$$\ell_x n_x + \ell_y n_y + \ell_z n_z = 0$$

El integrando en la Ec. (7.22) puede entonces escribirse de la siguiente manera:

$$-(x^2\ell_x n_x + y^2\ell_y n_y + z^2\ell_z n_z)$$
$$= x^2(\ell_y n_y + \ell_z n_z) + y^2(\ell_x n_x + \ell_z n_z) + z^2(\ell_x n_x + \ell_y n_y)$$
$$= \ell_x n_x(y^2 + z^2) + \ell_y n_y(x^2 + z^2) + \ell_z n_z(x^2 + y^2) \tag{7.23}$$

Sustituyendo la Ec. (7.23) en la (7.22) se obtiene la ecuación de transformación para productos de inercia:

$$I^P_{x'y'} = \ell_x n_x I^P_{xx} + \ell_y n_y I^P_{yy} + \ell_z n_z I^P_{zz} + (\ell_x n_y + \ell_y n_x)I^P_{xy}$$
$$+ (\ell_x n_z + \ell_z n_x)I^P_{xz} + (\ell_y n_z + \ell_z n_y)I^P_{yz} \tag{7.24}$$

Ejemplo 7.3

En los Ejemplos 7.1 y 7.2 sea el cuerpo sólido un cubo ($a = b = d$) y y' definida como sigue:

1. y' es perpendicular a x'.
2. y' está en el mismo plano que z_B y x'.

Determinar $I^B_{x'y'}$.

Solución

De las ecuaciones en el Ejemplo 7.2 tenemos $\hat{\ell} = (\ell_x, \ell_y, \ell_z) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ para el vector unitario a lo largo de x'; ahora forzamos las componentes de $\hat{n}$, o sea (n_x, n_y, n_z) a tener un valor tal que las condiciones 1 y 2 se satisfagan:

1. $\hat{\ell} \perp \hat{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}n_x + \frac{1}{\sqrt{3}}n_y - \frac{1}{\sqrt{3}}n_z = 0 \Rightarrow n_x + n_y - n_z = 0$

2. $\underbrace{(\hat{\ell} \times \hat{n})}\cdot\hat{k} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}n_y - \frac{1}{\sqrt{3}}n_x = 0 \Rightarrow n_y - n_x = 0$

vector perpendicular al plano de x' y y'.

Esas dos ecuaciones dan $n_y = n_y$ y $n_z = 2n_x$. Debemos verificar también que $\hat{n}$ es un vector unitario:

$$1 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n_x^2(1 + 1 + 4) = 6n_x^2$$

Entonces $n_x = 1/\sqrt{6}$, de modo que

$$n_x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n_y = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$n_z = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Sustituyendo las componentes de $\hat{\ell}$ y $\hat{n}$ y las propiedades de inercia en B [siendo el punto general P en la Ec. (7.24) el B en este problema] en la Ec. (7.24) obtenemos

$$I^{B}_{x'y'} = \frac{2ma^2}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right]$$

$$+ \frac{ma^2}{4}\left[-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right] = 0$$

Notemos que el resultado nulo del Ejemplo 7.3 no es obvio en esta etapa de nuestro estudio. En este ejemplo, $a = b = d$ por lo que el plano $x'y'$ es de simetría y esto garantiza (Sección 4.3) que $I^{B}_{x'z'}$ e $I^{B}_{y'z'}$ son iguales a cero, pero no necesariamente lo es $I^{B}_{x'y'}$. Nótese también que hay dos direcciones (a 180° entre sí) para y' que satisfacen las condiciones 1 y 2 en este último Ejemplo.

Pregunta 7.2 ¿En qué parte de la solución escogimos una de esas direcciones? (¿Importa esto?)

Terminamos esta seccion haciendo ver que las Ecs. (7.20) y (7.24) son ecuaciones de transformación satisfechas por un tensor simétrico de segundo orden; las propiedades de inercia ciertamente constituyen un tensor. Debemos también mencionar que sólo si los productos de inercia se definen con el signo negativo (Ec. 4.2) se obtendrán las ecuaciones de transformación tensorial correctas.

Problemas / Sección 7.3

7.7 Las tres barras homogéneas en la Fig. P7.7 están soldadas entre sí en O para formar un cuerpo rígido. Encuentre los momentos y productos de inercia en el punto Q con respecto a ejes paralelos a x, y, z.

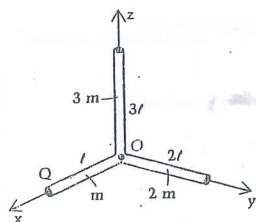


Figura P7.7

7.8 Encuentre los momentos y productos de inercia del cuerpo en la Fig. P7.8, con respecto a un conjunto de ejes que pasen por el punto P situado en $\left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right)$, y paralelos respectivamente a los ejes x, y, z. Cada una de las dos barras perpendiculares de la "T" tiene masa m y longitud ℓ.

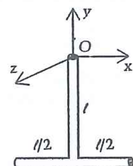


Figura P7.8

7.9 En el problema anterior encuentre el momento de inercia respecto a la recta OP.

7.10 Calcule el momento de inercia respecto a la recta AB de la barra doblada en la Fig. P7.10. La barra es plana y tiene masa de 4 m.

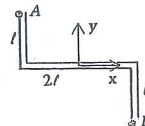


Figura P7.10

7.11 Encuentre el producto de inercia I^{c}_{yz} del aro $\mathcal{H}$ de masa m y radio R en la Fig. P7.11. El plano de $\mathcal{H}$ forma un ángulo ϕ con el plano xy.

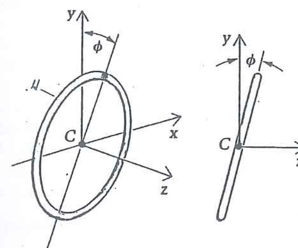


Figura P7.11

7.12 Calcule el momento de inercia respecto a la recta BA en el Ejemplo 7.2 usando la Ec.(7.20) en C y no en B. Demuestre que si $a = b = d$, la respuesta resulta igual a I^{c}_{xx} (que es igual a $I^{c}_{yy} = I^{c}_{zz}$ en este caso).

7.13 Los momentos de inercia centroidales para el elipsoide sólido $\mathcal{E}$ en la Fig. P7.13 son

$$I^{C}_{xx} = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)$$

$$I^{C}_{yy} = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$$

$$I^{C}_{zz} = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)$$

La masa de $\mathcal{E}$ es $(4\pi/3)\,\rho abc$, en donde ρ es la densidad. Encuentre el momento de inercia de la masa de respecto a la recta que forma ángulos iguales con x, y, z.

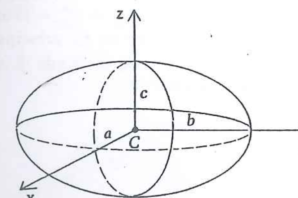


Figura P7.13

7.14 Demuestre que la suma de dos cualesquiera de los momentos de inercia I^{P}_{xx}, I^{P}_{yy}, I^{P}_{zz} siempre excede al tercero.

7.15 Una parte de una antena de doble transmisión para uso especial consiste de un girador octagonal, como se muestra en la Fig. P7.15. Cada una de las ocho secciones iguales es un tubo cuadrado de acero con las dimensiones indicadas y espesor de $\frac{1}{8}$ plg. Calcule el momento de inercia del girador respecto al eje de rotación. (Considere que cada sección tiene sus extremos a escuadra en la longitud promedio de 18 plg y no considere los pequeños traslapes. Use una densidad de 15.2 slug/pie³.)

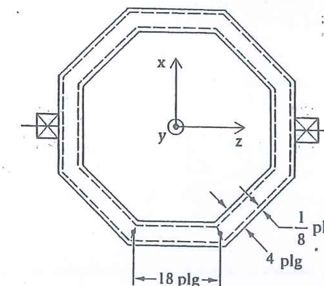
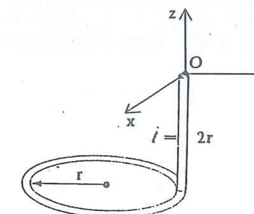


Figura P7.15

7.16 Encuentre las propiedades de inercia en O para el cuerpo mostrado en la Fig. P6.16 que está compuesto de una barra y un anillo que tienen iguales densidades y secciones transversales. La barra es perpendicular al plano del anillo.

Figura P7.16



* **7.17** Determine $I^{B}_{x'y'}$ en el problema del Ejemplo 7.3 si $b = d = a/2$.
Los ejes tienen su origen en B igual que en el ejemplo.

* **7.18** Para el cuerpo rígido $\mathcal{B}$ de la Fig. P7.18, sean conocidas en P las propiedades de inercia (I^{P}_{xx}, . . ., I^{P}_{yz}) y las cantidades

$$X = \frac{\ell_x}{\sqrt{I^{P}_{x'x'}}}$$

$$Y = \frac{\ell_y}{\sqrt{I^{P}_{x'x'}}}$$

$$Z = \frac{\ell_z}{\sqrt{I^{P}_{x'x'}}}$$

en donde $I^P_{x'x'}$, y (ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z) tal como se definieron en la Sección 7.3 Demuestre que la Ec. (7.20) implica:

$$I^P_{xx}X^2 + I^P_{yy}Y^2 + I^P_{zz}Z^2 + 2XYI^P_{xy} + 2XZI^P_{xz} + 2YZI^P_{yz} = 1$$

Esta es la ecuación de un elipsoide con centro en P; fue desarrollada por Cauchy en 1827 y se llama *elipsoide de inercia*. Demuestre que el momento de inercia respecto a cualquier línea x' que pase por P es igual al recíproco del cuadrado de la distancia de P al punto en que X' corta al elipsoide.

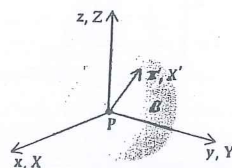


Figura P7.18

7.19 En el problema anterior, si los productos de inercia son nulos, la ecuación del elipsoide de inercia en términos de los momentos de inercia resultantes (I^P_1, I^P_2, I^P_3) es

$$I^P_1X^2 + I^P_2Y^2 + I^P_3Z^2 = 1$$

Demuestre que no todos los elipsoides de la forma $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ pueden ser elipsoides de inercia. *Sugerencia*: La suma de dos cualesquiera de los momentos de inercia debe siempre ser mayor que el tercero restante, como se estableció en el Problema 7.14.

** 7.20 Calcule las propiedades de inercia en O de las tres aspas o paletas circulares de un ventilador conectadas por barras ligeras (Fig. P7.20). Las paletas están inclinadas 30° respecto a los ejes OC_1, OC_2 y OC_3; las mitades sombreadas de cada una se encuentran detrás del plano del dibujo y las no sombreadas, delante de él.

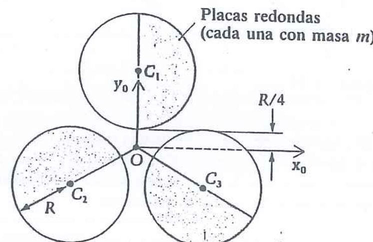


Figura P7.20

7.4 Ejes Principales de Inercia y Momentos Principales de Inercia

En esta sección describiremos una manera particularmente útil de describir las características de inercia de un cuerpo rígido ℬ. Sucede que en un punto cualquiera P de ℬ, siempre es posible encontrar un conjunto de ejes rectangulares tales que los productos de inercia en P respecto a esos ejes sean iguales a cero. Dichos ejes se llaman **ejes principales de inercia** en P, y los momentos de inercia con respecto a ellos son los **momentos principales de inercia** para el punto.

Específicamente, un eje x es un eje principal en P si $I^P_{x\beta} = 0$, en donde β es cualquier eje por P que sea perpendicular a x (Fig. 7.4). Podemos demostrar que si $I^P_{xy} = I^P_{xz} = 0$ en donde (x,y,z) forman una tríada de ejes rectangulares en P, entonces x es un eje principal en P. Para demostrarlo veremos que $I^P_{xy} = 0 = I^P_{xz}$ implica que $I^P_{x\beta} = 0$, en donde β es el eje arbitrario por P normal a x. Usando la Ec. (7.24) podemos escribir.

$$I^P_{x\beta} = \ell_x n_x I^P_{xx} + \ell_y n_y I^P_{yy} + \ell_z n_z I^P_{zz} + (\ell_x n_y + \ell_y n_x)I^P_{xy} + (\ell_x n_z + \ell_z n_x)I^P_{xz} + (\ell_y n_z + \ell_z n_y)I^P_{yz}$$

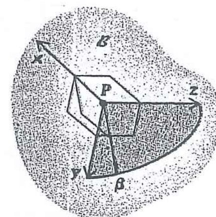


Figura 7.4

En esta ecuación (ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z) = (1,0,0) son los cosenos directores de x (el primer subíndice en $I_{x\beta}$) con respecto a x, y, z respectivamente mientras que $(n_x n_y, n_z)$ son los cosenos directores de β (el segundo subíndice en $I_{x\beta}$), también con respecto a x, y, z. Como $\beta \perp x$, se tiene que $(n_x, n_y, n_z) = (0, n_y, n_z)$. Sustituyendo estos valores de ℓ' y n obtenemos

$$I^P_{x\beta} = 0 + 0 + 0 + (\ell_x n_y + 0)I^P_{xy} + (\ell_x n_z + 0)I^P_{xz} + 0$$

Pero $I^P_{xy} = I^P_{xz} = 0$, por lo que $I^P_{x\beta} = 0$ y vemos que todo lo que se requiere para que un eje como el x sea principal en un punto es que $I^I_{xy} = 0$ e $I^P_{xz} = 0$, en donde (x, y, z) forman una tríada ortogonal en P. Necesitaremos este resultado en lo que sigue.

Procedemos ahora a encontrar un procedimiento de cálculo que permita determinar los ejes y momentos principales de inercia. Haremos la deducción cuando P es C y luego explicaremos como se aplica igualmente a *todo* punto de ℬ.

Por ahora consideremos (x, y, z) con centro en C y en algún instante sea x paralelo a la velocidad angular $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = \omega$ de ℬ en un marco de referencia $\mathcal{I}$. Entonces $\omega = \omega\hat{\mathbf{i}}$ y la Ec. (7.11) da, para la cantidad de movimiento angular de ℬ respecto a C, la expresión simplificada

$$\mathbf{H}_C = I^C_{xx}\omega\hat{\mathbf{i}} + I^C_{xy}\omega\hat{\mathbf{j}} + I^C_{xz}\omega\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.25)$$

Observemos en la Ec. (7.25) que $\mathbf{H}_c$ es paralelo a w si y solo si $I^c_{xy} = I^c_{xz} = \omega$, o sea si x es un eje principal en C. Vemos entonces, como lo vio el eminente Leonhard Euler a mediados del siglo XVIII, que los ejes principales tienen la propiedad de que cuando la velocidad angular está a lo largo de uno de ellos, así sucederá también con la cantidad de movimiento angular. Euler buscaba un eje a través de C para el cual, cuando ℬ girase alrededor de él, el movimiento se mantendría respecto a este eje sin necesidad de aplicar momentos externos. Notemos además que cuando $\mathbf{H}_C \parallel \omega$ o sea $\mathbf{H}_c$ paralelà a ω, la constante de proporcionalidad es necesariamente el momento de inercia I respecto a este eje común.

Estamos ahora listos para dar el gran paso hacia adelante. Sea $\hat{\mathbf{n}} = n_x\hat{\mathbf{i}} + n_y\hat{\mathbf{j}} + n_z\hat{\mathbf{k}}$ un vector unitario y busquemos la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ que lo hará un eje principal. En otras palabras, hay que encontrar los valores de los cosenos directores de $\hat{\mathbf{n}}$ (n_x, n_y, n_z) tales que si $\omega = \omega\hat{\mathbf{n}}$, entonces $\mathbf{H} = I\omega$. Escribiendo ω en términos de sus componentes obtenemos

$$\omega = \omega n_x\hat{\mathbf{i}} + \omega n_y\hat{\mathbf{j}} + \omega n_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.26)$$

Sustituyendo para $\mathbf{H}_c$ el valor dado por la Ec. (7.11), la relación vectorial da las siguientes tres ecuaciones escalares de componentes:

$$\begin{aligned} I^C_{xx}\omega_x + I^C_{xy}\omega_y + I^C_{xz}\omega_z &= I\omega n_x \\ I^C_{xy}\omega_x + I^C_{yy}\omega_y + I^C_{yz}\omega_z &= I\omega n_y \\ I^C_{xz}\omega_x + I^C_{yz}\omega_y + I^C_{zz}\omega_z &= I\omega n_z \end{aligned} \qquad (7.27)$$

Si dividimos las Ecs. (7.27) entre ω y como $\omega = \omega\hat{\mathbf{n}}$, se tiene que $n_x = \omega_x/\omega$, $n_y = \omega_y/\omega$ y $n_z = \omega_z/\omega$; *podemos escribir las ecuaciones del modo siguiente:*

$$\begin{aligned} (I^C_{xx} - I)n_x + I^C_{xy}n_y + I^C_{xz}n_z &= 0 \\ I^C_{xy}n_x + (I^C_{yy} - I)n_y + I^C_{yz}n_z &= 0 \\ I^C_{xz}n_x + I^C_{yz}n_y + (I^C_{zz} - I)n_z &= 0 \end{aligned} \qquad (7.28)$$

*La regla de Cramer da $n_x = n_y = n_z = 0$ como la única solución si las ecuaciones son independientes, en cuyo caso no es cero el determinante D de los coeficientes. Si $D = 0$, la regla de Cramer proporciona la forma indeterminada 0/0 para las n y pueden esperarse entonces otras soluciones, ya que las ecuaciones son dependientes.

Tenemos ahora un sistema de ecuaciones que son algebraicas, lineales y homogéneas en las tres variables n_x, n_y, n_z. Se sabe que tal sistema tiene solución no trivial si y sólo es cero* si el determinante de los coeficientes de las variables. En este caso podemos suprimir el calificativo "no trivial" porque la solución trivial ($n_x = n_y = n_z = 0$) no satisface la condición.

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \tag{7.29}$$

que debe siempre cumplirse para los cosenos directores de un vector.

Haciendo igual a cero el determinante de los coeficientes ello dará los valores de I para los cuales las tres ecuaciones tienen una solución. Cada valor de I se denomina *eigenvalor*, o bien *valor característico*, y será un momento principal de inercia; el correspondiente $\hat{\mathbf{n}}$ (con componentes n_x, n_y, n_z) es el *eigenvector* asociado al eigenvalor I. El vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ apunta en la dirección de un eje principal de inercia en C. A continuación escribimos el determinante igualado a cero:

$$\begin{vmatrix} I_{xx}^C - I & I_{xy}^C & I_{xz}^C \\ I_{xy}^C & I_{yy}^C - I & I_{yz}^C \\ I_{xz}^C & I_{yz}^C & I_{zz}^C - I \end{vmatrix} = 0 \tag{7.30}$$

Si desarrollamos este determinante característico obtenemos un polinomio cúbico en I:

$$I^3 + a_1 I^2 + a_2 I + a_3 = 0 \tag{7.31}$$

Los coeficientes a_i son funciones de las propiedades de inercia. Sabemos que si polinomios con coeficientes reales tienen raíces complejas, éstas deben presentarse en parejas conjugadas. Entonces el polinomio obtenido arriba debe tener por lo menos una raíz real I_I. (Es positiva debido a la definición del momento de inercia que representa). Estamos entonces seguros de tener por lo menos un momento principal de inercia y un correspondiente eje principal de inercia.

Para demostrar que existen otros dos, reorientamos la tríada ortogonal de ejes de referencia de modo que uno de ellos (el x) coincida con el ya identificado eje principal; esto permite escribir $I_{xy}^c = 0$, $I_{xz}^c = 0$ e $I_{xx}^c = I_I$, donde y, z son un nuevo par de ejes normales al nuevo eje (principal) x. Las ecuaciones (7.28) son ahora:

$$\begin{aligned} (I_1 - I)n_x &+ 0n_y &&+ 0n_z &&= 0 \\ 0n_x &+ (I_{yy}^C - I)n_y &&+ I_{yz}^C n_z &&= 0 \\ 0n_x &+ I_{yz}^C n_y &&+ (I_{zz}^C - I)n_z &&= 0 \end{aligned} \tag{7.32}$$

El determinante igualado a cero es

$$\begin{vmatrix} I_1 - I & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^C - I & I_{yz}^C \\ 0 & I_{yz}^C & I_{zz}^C - I \end{vmatrix} = 0 \tag{7.33}$$

Esta vez la ecuación cúbica resultante se puede factorizar. Desarrollando el determinante,

$$(I_1 - I)[(I_{yy}^C - I)(I_{zz}^C - I) - I_{yz}^{C2}] = 0 \tag{7.34}$$

Los momentos principales de inercia en C son las raíces de las Ecs. (7.34). La primera raíz (que ya conocemos) se confirma haciendo el primer factor igual a cero:

$$I = I_1 \qquad (= I_{xx}^C)$$

*Esto fue demostrado en 1755 por primera vez por Segner, un contemporáneo de Euler. Signer también demostró que los ejes principales (para momentos de inercia principales distintos) son ortogonales.

Las otras dos se obtienen al igualar a cero el segundo factor:

$$I^2 - (I_{yy}^C + I_{zz}^C)I + (I_{yy}^C I_{zz}^C - I_{yz}^{C2}) = 0 \tag{7.35}$$

Esta es una ecuación cuadrática en I. Las dos raíces de la ecuación

$$aI^2 + bI + c = 0$$

son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y vemos que se tendrán dos raíces reales más I_2 e I_3 si el discriminante es positivo o nulo:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= (I_{yy}^C + I_{zz}^C)^2 - 4(1)(I_{yy}^C I_{zz}^C - I_{yz}^{C2}) \\ &= I_{yy}^{C2} - 2I_{yy}^C I_{zz}^C + I_{zz}^{C2} + 4I_{yz}^{C2} \\ &= (I_{yy}^C - I_{zz}^C)^2 + 4I_{yz}^{C2} \geq 0 \end{aligned} \tag{7.36}$$

Por lo tanto las tres raíces de la ecuación cúbica característica son reales (y positivas) y siempre se tienen tres momentos principales de inercia en C, cada uno con su correspondiente eje principal*.

Mencionaremos ahora el procedimiento para obtener la dirección principal, dada por n_x, n_y, n_z, para *cada uno* de los momentos principales de inercia (I_I, I_2, I_3). Las Ecs. (7.32), siendo dependientes, no pueden resolverse para evaluar las tres componentes de cada $\hat{\mathbf{n}}$; sin embargo, puede encontrarse una solución si se toma en cuenta la identidad $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. La idea es despejar digamos n_y y n_z en función de n_x de dos de las Ecs. (7.32); luego sustituimos esto en la Ec. (7.29) y se halla n_x. Cualquier signo puede usarse al calcular la raíz cuadrada final porque obviamente hay dos conjuntos legítimos de cosenos directores. Esos conjuntos tienen signo opuesto y cada uno da el eje principal correcto. En la Fig. 7.5, $\hat{\mathbf{n}}$ o bien $(-\hat{\mathbf{n}})$ define un eje principal a través de C. El eje principal es una recta no dirigida.

En el primero de los dos ejemplos siguientes veremos nuevamente que si por lo menos dos de los productos de inercia son nulos, entonces la ecuación cúbica (7.31) es factorizable. En tal caso no hay que resolverla numéricamente.

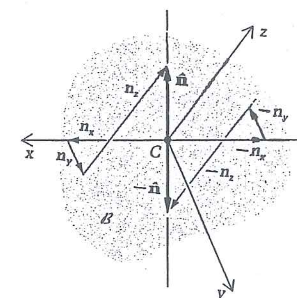


Figura 7.5

* Esto fue demostrado en 1755 por Segner, un contemporáneo de Euler. Segner demostró también que los ejes principales (para distintos momentos de inercia principales) son ortogonales.

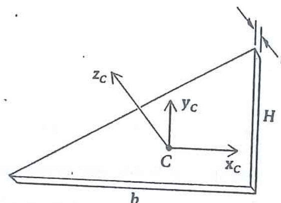
Ejemplo 7.4

Las propiedades de inercia de una placa triangular recta son (Ver el diagrama):

$$I^C_{xx} = \frac{mH^2}{18} \qquad I^C_{xy} = \frac{-mbH}{36}$$

$$I^C_{yy} = \frac{mb^2}{18} \qquad I^C_{xz} = 0$$

$$I^C_{zz} = \frac{m(H^2 + b^2)}{18} \qquad I^C_{yz} = 0$$



Determinar los momentos principales de inercia de la placa. Luego hallar los ejes principales asociados cuando $b = H$.

Solución

Las Ecs. (7.28) que conducen a los ejes y momentos principales de inercia, son para la placa:

$$\left(\frac{mH^2}{18} - I\right)n_x - \frac{mbH}{36}n_y + 0n_z = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{-mbH}{36}n_x + \left(\frac{mb^2}{18} - I\right)n_y + 0n_z = 0 \qquad (2)$$

$$0n_x + 0n_y + \left(\frac{m(b^2 + H^2)}{18} - I\right)n_z = 0 \qquad (3)$$

El álgebra se simplifica dividiendo entre $mH^2/36$ y definiendo

$$B = \frac{b}{H} \quad \text{y} \quad I^* = \frac{I}{(mH^2/36)} \qquad (4)$$

Esto da en términos de los parámetros adimensionales B e I^* :

$$(2 - I^*)n_x + (-B)n_y + 0n_z = 0 \qquad (5)$$

$$(-B)n_x + (2B^2 - I^*)n_y + 0n_z = 0 \qquad (6)$$

$$0n_x + 0n_y + [2(B^2 + 1) - I^*]n_z = 0 \qquad (7)$$

La ecuación característica es entonces:

$$\begin{vmatrix} 2 - I^* & -B & 0 \\ -B & 2B^2 - I^* & 0 \\ 0 & 0 & 2(B^2 + 1) - I^* \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

Desarrollando el determinante a lo largo de la tercera fila (o columna) obtenemos:

$$[2(B^2 + 1) - I^*][(2 - I^*)(2B^2 - I^*) - B^2] = 0 \qquad (9)$$

Uno de los paréntesis debe ser cero y las raíces se obtienen de

$$I^* = 2(B^2 + 1) \qquad (10)$$

e

$$I^{*2} - 2I^*(B^2 + 1) + 3B^2 = 0 \qquad (11)$$

La Ec. (10) da, usando las Ecs. (4),

$$I_3 = \frac{m(b^2 + H^2)}{18} \qquad (12)$$

La Ec. (11) da, con la fórmula cuadrática:

$$I^*_{1,2} = \frac{2(B^2 + 1) \pm \sqrt{4(B^2 + 1)^2 - 12B^2}}{2} \qquad (13)$$

Por lo tanto

$$I_{1,2} = \frac{mH^2}{36}\left(\frac{b^2}{H^2} + 1 \pm \sqrt{\frac{b^4}{H^4} - \frac{b^2}{H^2} + 1}\right)$$
$$= \frac{m(b^2 + H^2)}{36} \pm \frac{m}{36}\sqrt{b^4 - b^2H^2 + H^4} \qquad (14)$$

Los tres momentos principales de inercia de la placa están dados por las Ecs. (12) y (14). En el caso en que el triángulo es isósceles ($b = H$), se tiene que $B = 1$ por lo que con la Ec. (13):

$$I^*_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1$$

o bien

$$I^*_1 = 3 \quad \text{y} \quad I^*_2 = 1 \qquad (15)$$

También de la Ec. (10),

$$I^*_3 = 2(1^2 + 1) = 4$$

Volviendo a la Ec. (4) para las inercias dimensionales, se obtiene para la placa triangular isósceles,

$$I_1 = \frac{mH^2}{12} \qquad I_2 = \frac{mH^2}{36} \qquad I_3 = \frac{mH^2}{9} \qquad (16)$$

Determinaremos ahora los ejes principales asociados a estos momentos principales de inercia. Primero sustituimos $I^*_1 = 3$ (con $B = 1$) en cada una de las ecuaciones (5),(6) y (7):

$$-n_x - n_y = 0$$
$$-n_x - n_y = 0 \qquad (17)$$
$$n_z = 0$$

La tercera de esas ecuaciones dice que el eje principal para I_1 se localiza en el plano de la placa (xy); las otras dos ecuaciones dan

$$n_x = -n_y \qquad (18)$$

Sustituyendo este resultado en

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \tag{19}$$

resulta

$$(-n_y)^2 + n_y^2 = 1 \tag{20}$$

$$n_y^2 = \frac{1}{2}$$

$$n_y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{21}$$

Según la Ec.(18):

$$n_x = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{22}$$

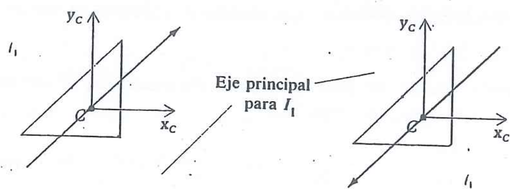
Por lo que

$$(n_x, n_y, n_z) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \tag{23}$$

o bien

$$(n_x, n_y, n_z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \tag{24}$$

Las rectas ℓ_1 líneas definidas por esos dos conjuntos de cosenos directores se muestran en los siguientes diagramas; se ve que los dos resultados anteriores representan la *misma recta*; su dirección positiva es opuesta pero no tiene importancia. El valor de la inercia, siendo la integral de $r^2\,dm$, es independiente de la dirección de la línea.

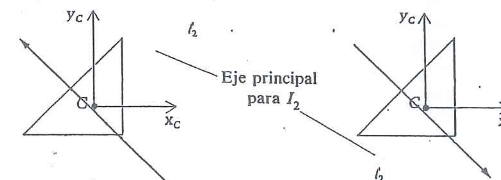


(a) Recta de la ec. (7.12) (b) Recta de la ec. (7.13)

De las ecuaciones (5), (6) y (7) obtenemos para I_2^*:

$$\begin{aligned} n_x - n_y &= 0 \\ -n_x + n_y &= 0 \\ n_z &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Esta vez $n_x = n_y$, con n_z *de nuevo igual a cero, por lo que este eje principal forma ángulos iguales con* x_c y y_c (vea los diagramas siguientes). Nótese en los diagramas precedentes que hay mucho más inercia alrededor del eje principal para I_1 que para I_2; la masa está más concentrada alrededor de ℓ_2 que de ℓ_1.



El tercer eje principal se encuentra con las ecuaciones (5), (6) y (7) cuando, para $B = 1$,

$$I^* = I_3^* = 2(B^2 + 1) = 4 \tag{26}$$

Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} -2n_x - n_y &= 0 \\ -n_x - 2n_y &= 0 \\ [2(2) - 4]n_z &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

La primera de esas ecuaciones tiene la solución $n_x = n_{yg} = O$. *La tercera deja a* n_z *indeterminado. Pero por la Ec.(19) tenemos que* $n_z = I$ *o* — *Ik. Entonces el eje principal para* I_3 es la recta normal a la placa en C. Esto será de hecho siempre cierto: cuando un cuerpo es una *placa* (o sea un cuerpo plano con espesor despreciable respecto a sus otras dimensiones), el momento de inercia respecto al eje normal a la placa en cualquier punto es principal para ese punto. Es también cierto que es la suma de los otros dos y, por consiguiente, el mayor.

Queremos ahora subrayar que un conjunto de ejes principales existe en *todo* punto de $\mathcal{B}$, no sólo en el centro de masa C. Para demostrar esto recordamos primero que la Ec.(7.7) junto con la Ec. (7.12) da la cantidad de movimiento (o ímpetu) angular $\mathbf{H}_P$ respecto de cualquier punto P del cuerpo $\mathcal{B}$:

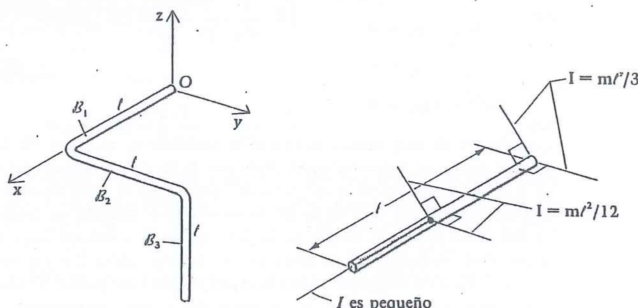
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_P = m\mathbf{r}_{PC} \times \mathbf{v}_P &+ [I_{xx}^P\omega_x + I_{xy}^P\omega_y + I_{xz}^P\omega_z]\hat{\mathbf{i}} \\ &+ [I_{xy}^P\omega_x + I_{yy}^P\omega_y + I_{yz}^P\omega_z]\hat{\mathbf{j}} \\ &+ [I_{xz}^P\omega_x + I_{yz}^P\omega_y + I_{zz}^P\omega_z]\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Siempre que se anula el término con el producto vectorial en $\mathbf{H}_P$ desaparece, los términos que quedan son idénticos a los de la Ec. (7.11) si P reemplaza a C. Por consiguiente, para los casos en que $\mathbf{r}_{PC} \times \mathbf{v}_P = O$, necesitamos sólo recordar el análisis hecho para C y obtendremos por un procedimiento análogo, los ejes y momentos principales de inercia para *cualquier* punto P de $\mathcal{B}$.

Por lo tanto, necesitamos sólo imaginar que en algún instante el punto P tiene una $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$ o bien que $\mathbf{v}_P$ es paralelo a $\mathbf{r}_{PC}$. En ambos casos $\mathbf{r}_{PC} \times \mathbf{v}_P = \mathbf{0}$ y entonces $\mathbf{H}P$ tiene la forma de las Ecs. (7.12). Partiendo nuevamente de ese punto, llegamos a los tres ejes (esta vez a través de P) para los cuales los tres productos de inercia son nulos; estos son los mismos tres ejes en P para los cuales $\mathbf{H}_P \parallel \boldsymbol{\omega}$ siempre que $\boldsymbol{\omega}$ está alineado con uno de ellos y $\mathbf{v}_P$ se anula o es paralelo a $\mathbf{r}_{PC}$. Por supuesto, todas las referencias a las condiciones del movimiento que condujeron a la ecuación característica, se pierden nuevamente (como pasó en el caso del punto C) de modo que los ejes y momentos principales de inercia dependen solamente de la distribución de la masa en el cuerpo.

Ejemplo 7.5

Determinar los momentos principales de inercia en O y las direcciones de sus ejes principales asociados, para el cuerpo mostrado en los diagramas; dicho cuerpo está formado por tres barras delgadas rígidas idénticas soldadas en ángulo recto para formar un solo cuerpo rígido



Solución

Usando los momentos de inercia mostrados para una barra, y el teorema de los ejes paralelos, se calculan a continuación las seis propiedades de inercia. El lector debe verificar cada una de las expresiones obtenidas.

$$I_{xx}^O = \underbrace{\frac{m\ell^2}{3}}_{\mathcal{B}_2} + \underbrace{\frac{m\ell^2}{12} + m\left[\ell^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right]}_{\mathcal{B}_3} = m\ell^2\left(\frac{4+1+15}{12}\right) = \frac{10}{6}m\ell^2$$

$$I_{yy}^O = \underbrace{\frac{m\ell^2}{3}}_{\mathcal{B}_1} + \underbrace{m\ell^2}_{\mathcal{B}_2} + \underbrace{\frac{m\ell^2}{12} + \frac{5}{4}m\ell^2}_{\mathcal{B}_3} = m\ell^2\left(\frac{4+12+1+15}{12}\right) = \frac{16}{6}m\ell^2$$

$$I_{zz}^O = \underbrace{\frac{m\ell^2}{3}}_{\mathcal{B}_1} + \underbrace{\frac{m\ell^2}{12} + \frac{5}{4}m\ell^2}_{\mathcal{B}_2} + \underbrace{2m\ell^2}_{\mathcal{B}_3} = m\ell^2\left(\frac{4+1+15+24}{12}\right) = \frac{22}{6}m\ell^2$$

$$I_{xy}^O = \underbrace{-m\ell\frac{\ell}{2}}_{\mathcal{B}_2} - \underbrace{m\ell^2}_{\mathcal{B}_3} = -\frac{3}{2}m\ell^2 = -\frac{9}{6}m\ell^2$$

$$I_{yz}^O = \underbrace{-\left(-m\frac{\ell^2}{2}\right)}_{\mathcal{B}_3} = +\frac{m\ell^2}{2} = \frac{3m\ell^2}{6}$$

$$I_{xz}^O = \underbrace{-\left(-m\frac{\ell^2}{2}\right)}_{\mathcal{B}_3} = +\frac{m\ell^2}{2} = \frac{3m\ell^2}{6}$$

Para este problema las Ecs. (7.28) resultan ser:

$$\left(10 - \frac{6I}{m\ell^2}\right)n_x - 9n_y + 3n_z = 0$$

$$-9n_x + \left(16 - \frac{6I}{m\ell^2}\right)n_y + 3n_z = 0 \qquad (1)$$

$$3n_x + 3n_y + \left(22 - \frac{6I}{m\ell^2}\right)n_z = 0$$

Hemos multiplicado las tres ecuaciones por $(6/m\ell^2)$; podemos reemplazar $6I/m\ell^2$ por $\mathcal{I}$ y escribir el determinante de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} 10-\mathcal{I} & -9 & 3 \\ -9 & 16-\mathcal{I} & 3 \\ 3 & 3 & 22-\mathcal{I} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollándolo obtenemos la ecuación característica cúbica:

$$f(\mathcal{I}) = -\mathcal{I}^3 + 48\mathcal{I}^2 - 633\mathcal{I} + 1342 = 0$$

Si no se dispone de una calculadora programable o de una computadora*, siempre podemos resolver una ecuación cúbica por tanteos. Observando que $f(\mathcal{I})$ es igual a 1342 en $\mathcal{I} = 0$ y es negativa en $\mathcal{I} = 3$, podemos aplicar con una calculadora y obtener las raíces

*Véasen el Apéndice B cómo obtener una solución numérica de este problema usando el método de Newton-Raphson.

entre esos valores en unos cuantos minutos*. El procedimiento es como sigue:

$\mathcal{I}$	$f(\mathcal{I})$	
3	−206	
2	260	(una raíz está posiblemente algo más allá de $\mathcal{I} = 2.5$)
2.6	3.10	(aún positivo)
2.61	−0.93	(entonces es > 2.6 y < 2.61, más cercano a este último valor)
2.608	−0.123	(hacia atrás ligeramente)
2.607	0.2802	(está entonces aproximadamente a 2/3 del tramo de 2.607 a 2.608)
2.6076	0.03835	(sólo un poco más adelante)
2.6077	−0.00195	(la raíz está cercana a este número)
2.60769	0.00208	(debe estar a la mitad entre este y el último valor)
2.607695	0.00006	(ahora una doble comprobación)
2.607696	−0.00034	(entonces $\mathcal{I}_1 = 2.607695$, con 7 dígitos)

A continuación usamos el método de la división sintética para obtener la cuadrática reducida:

2.607695	−1	48	−633	1342
		−2.607695	118.369287	−1341.999938
	−1	45.392305	−514.630713	0.000062 ≈ 0

$$-\mathcal{I}^2 + 45.392305\mathcal{I} - 514.630713 = 0$$

Con la fórmula cuadrática,

$$\mathcal{I}_2 = 22.000002$$

$$\mathcal{I}_3 = 23.392303$$

El valor de $\mathcal{I}_2$ sugiere fuertemente que 22 podría ser una raíz racional. La división sintética muestra que sí lo es y los valores refinados son entonces:

$$\mathcal{I}_1 = 2.607695$$

$$\mathcal{I}_2 = 22$$

$$\mathcal{I}_3 = 23.392305$$

Como $\mathcal{I} = 6I/m\ell^2$, los momentos principales de inercia dimensionales son, con cinco dígitos:

$$I_1 = 0.43462m\ell^2$$

$$I_2 = 3.66667m\ell^2$$

$$I_3 = 3.89872m\ell^2$$

* Para ilustrar la rapidez de la convergencia, abandonamos nuestra costumbre de usar sólo tres dígitos en los análisis numéricos de este tipo.

Ilustramos a continuación el cálculo de los cosenos directores que localizan a los ejes principales de inercia. Se evalúan con las Ecs. (1), para las cuales $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ y $\mathcal{I}_3$ son los únicos valores especiales (eigenvalores) de $\mathcal{I}$ para los que esas ecuaciones tienen solución. Primero encontramos el eje principal asociado con $\mathcal{I}_1 = 2.607695$. La primera ecuación resulta ser

$$7.392305n_x - 9n_y + 3n_z = 0$$

Despejando n_z *en términos de* n_x y n_y y sustituyendo el resultado en la segunda de las Ecs.(1) resulta:

$$n_y = 0.732051n_x$$

Por consiguiente,

$$n_z = -0.267950n_x$$

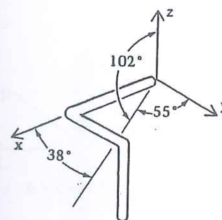
Sustituyendo estos valores de n_y y n_z en $n_x^2 + n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ obtenemos:

$$\text{Vector unitario } \hat{n}_1 \begin{cases} n_x = 0.788675 \\ n_y = 0.577350 \\ n_z = -0.211325 \end{cases}$$

Entonces los ángulos que el eje principal de momento de inercia mínimo forma con x, y, z son, respectivamente, 37.94°, 54.74° y 102.20°. Este eje debe ser aquél respecto del cual la masa se encuentra más cerca. Examine la figura anexa, junto con esos ángulos, y se verá que se cumple lo anterior.

Ahora podemos seguir el mismo procedimiento para el eje principal de momento de inercia máximo ($I_3 = \mathcal{I}_3 m\ell^2/6 = 3.898718m\ell^2$). Los resultados son:

$$\text{Vector unitario } \hat{n}_3 \begin{cases} n_x = 0.211325 & (\theta_x = \cos^{-1} n_x = 77.80°) \\ n_y = -0.577350 & (\theta_y = 125.26°) \\ n_z = -0.788675 & (\theta_z = 142.06°) \end{cases}$$



para el momento de inercia intermedio ($I_2 = \mathcal{I}_2 m\ell^2/6 = 3.666667\ m\ell^2$), el eje principal se define por

$$\text{Vector unitario } \hat{n}_2 \begin{cases} n_x = 0.577350 & (\theta_x = 54.74°) \\ n_y = -0.577350 & (\theta_y = 125.26°) \\ n_z = 0.577350 & (\theta_z = 54.74°) \end{cases}$$

Nótese en el ejemplo anterior que $\hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2 = \hat{n}_2 \cdot \hat{n}_3 = \hat{n}_3 \cdot \hat{n}_1 = 0$ y que $\hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = \hat{n}_3$*. Esta es una buena verificación de la solución, ya que los ejes principales, cuando los momentos principales de inercia son distintos ($I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$), son ortogonales. Para demostrar esto en general, sea $I_1 \neq I_2$ o I_3, y supongamos que x se encuentra a lo largo del eje de I_1. Entonces de la primera Ec. (7.32) que es

$$(I_1 - I)n_x = 0$$

vemos que si I es igual a I_2 o a I_3, entonces $n_x = 0$; es decir, el coseno del ángulo entre x y el correspondiente eje principal tiene que ser cero. Esto significa que x es perpendicular a los otros dos ejes principales. A su vez, dichos ejes son normales entre sí; esto resulta de la reorientación de los ejes, de modo que x esté aún a lo largo del eje de I_1 pero ahora y está a lo largo del eje de I_2. Esta vez I^c_{yz} es también cero, por lo que la nueva segunda ecuación es

$$(I_2 - I)n_y = 0$$

Esta ecuación muestra que para $I = I_3$ (siendo $I_2 \neq I_3$), el valor de n_y para el tercer eje principal desaparece y es entonces normal no sólo a x (sigue siéndolo pues sólo se ha girado alrededor de x) sino también a y. Así, los tres ejes principales son ortogonales si los momentos principales de inercia son todos diferentes. Veremos ahora que pasa si no lo son.

Un caso común es que dos de los momentos principales de inercia en un punto P sean iguales entre sí pero diferentes del tercero. Cuando esto sucede, puede demostrarse que toda recta que pase por P en el plano de los dos ejes (sean el x y el y) con iguales momentos de inercia (digamos $I_1 = I_2$) es un eje principal con este mismo valor para su momento de inercia.

Para evidenciarlo, primero mostramos que si $I_1 = I_2 \neq I_3$, entonces el eje asociado con I_3 (que será el z) es perpendicular a los (x,y) asociados con I_1 e I_2. La tercera ecuación de (7.32) da:

$$(I_3 - I)n_z = 0$$

Entonces cuando I es I_1 o bien I_2, $n_z = 0$. Por consiguiente el ángulo entre z y x (y entre z y y) es también de 90°. No se infiere de la misma manera a partir de las ecuaciones que los ejes x y y son perpendiculares. Para tratar este caso, comenzamos mostrando que si los ejes de los otros dos momentos principales de inercia ($I_1 = I_2$) *no* se suponen ortogonales (digamos los ejes q y x en la Fig. 7.6 con $I^P_{qq} = I_1 = I^P_{xx}$), entonces todo está en orden porque I_{yy} es *también* igual a I_1.

Para probar esto usamos la Ec. (7.20):

$$I^P_{qq} = I^P_{xx}\ell_x^2 + I^P_{yy}\ell_y^2 + I^P_{zz}\overset{0}{\ell_z^2} + \overbrace{0 + 0 + 0}^{x \text{ y } z \text{ son principales}}$$

$$I_1 = I_1\ell_x^2 + I^P_{yy}\ell_y^2$$

$$I_1\underbrace{(1 - \ell_x^2)}_{\ell_y^2} = I^P_{yy}\ell_y^2$$

Vemos que

$$I_{yy} = I_1$$

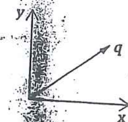


Figura 7.6

* La expresión $\hat{n}_1 \times \hat{n}_2 = -\hat{n}_3$ es igualmente correcta.

Ahora sea $\hat{\ell}$ un vector unitario en la dirección de un eje arbitrario X' en el plano de los ejes perpendiculares x y y. Usando nuevamente la Ec. (7.20) obtenemos:

$$I^P_{x'x'} = \ell_x^2 I_1 + \ell_y^2 \overset{=I_1}{I_2} + \overset{0}{\ell_z^2} I_3 + \underbrace{0 + 0 + 0}_{I^P_{xy} = I^P_{xz} = I^P_{yz} = 0}$$

$$= I_1(\ell_x^2 + \ell_y^2) = I_1$$

La Ec. (7.24) da (con y_1 perpendicular a x_1 y encontrándose en el plano de x_1, x y y como en la Fig. 7.7):

$$I^P_{x'y'} = \ell_x n_x I_1 + \ell_y n_y \overset{=I_1}{I_2} + \overset{0\;0}{\ell_z n_z} I_3 + 0 + 0 + 0$$

$$= I_1(\ell_x n_x + \ell_y n_y)$$

$$= I_1(\hat{\ell} \cdot \hat{n}) = 0$$

Observando que z es perpendicular a x' y que $I^P_{x'z} = 0$ por ser z principal, tenemos entonces el resultado que x' es principal con el mismo momento de inercia que x y y, y esto es lo que queríamos demostrar. Nótese entonces, por ejemplo, que para un cuerpo con un eje de simetría, cualquier eje que pase por tal eje y sea normal a él, siempre es principal; esto se cumple aun *si el eje no está fijo en el cuerpo*.

Finalmente, si los tres ejes principales (x, y, z) que pasan por P tienen el mismo momento de inercia principal I_1, entonces *todo* eje que pase por P es principal con momento principal de inercia I_1. Sea $\hat{\ell}$ el vector unitario a lo largo de un eje arbitrario x' por P en este caso de tres momentos principales de inercia iguales; sean y' y z' los ejes que completan una tríada ortogonal, siendo $\hat{m}$ y $\hat{n}$ los vectores unitarios en las direcciones respectivas y' y z'. Entonces (ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z), (m_x, m_y, m_z) y (n_x, n_y, n_z) son los conjuntos respectivos de cosenos directores de x', y' y z' con respecto a (x, y, z). La Ec. (7.24) da

$$I^P_{x'y'} = (\ell_x m_x + \ell_y m_y + \ell_z m_z)I_1 + \underbrace{0 + 0 + 0}_{\substack{I^P_{xy} = I^P_{yz} = I^P_{xz} = 0 \text{ ya que} \\ (x,\,y,\,z) \text{ son ejes principales}}}$$

$$= 0 \quad (\text{ya que } \hat{\ell} \perp \hat{m})$$

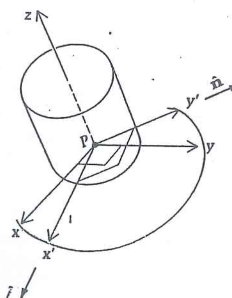


Figura 7.7

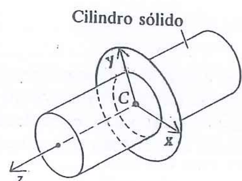
De la misma manera, $I^P_{x'z'} = 0$ ya que también $\hat{\ell} \perp \hat{\mathbf{n}}$. Entonces el eje arbitrario x' por P es principal y la Ec. (7.20) muestra que su momento de inercia es también I_1:

$$I^P_{x'x'} = \underbrace{(\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2)}_{= 1 \text{ (pues } \hat{\ell} \text{ es un vector unitario)}} I_1 = I_1$$

Consideraremos los siguientes ejemplos de los resultados precedentes respecto a dos y tres momentos principales de inercia iguales:

Dos momentos iguales:

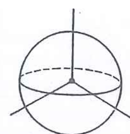
Cilindro sólido



$$I^C_{xx} = I^C_{yy} = \frac{mR^2}{4} + \frac{m\ell^2}{12}$$

Todos los ejes por C en el plano sombreado tienen este mismo momento de inercia y son principales. Adviértase que $I^c_{zz} = mR^2{}_2$ y generalmente no es igual a I_{xx} y a I_{yy}; sin embargo, si $\ell = \sqrt{3}R$, entonces *todo* eje por C es principal con el mismo momento principal de inercia

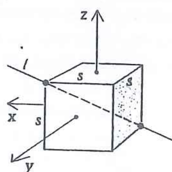
Tres momentos iguales:



Esfera maciza

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

en cualquier dirección por C



Cubo macizo:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{m}{12}(s^2 + s^2) = \frac{ms^2}{6}$$

en cualquier dirección por C. Por lo tanto, si ℓ es una diagonal del cubo, entonces $I_{\ell\ell} = ms^2/6$, aunque sería difícil obtener este resultado por integración. Note que los cosenos directores de ℓ son $(\ell_x, \ell_y, \ell_z) = 3, (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. La Ec.(7.20) da:

$$I^C_{\ell\ell} = \frac{1}{3}I_x + \frac{1}{3}I_y + \frac{1}{3}I_z + 0 + 0 + 0$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)\frac{ms^2}{6} = \frac{ms^2}{6}$$

Una propiedad importante de los momentos principales de inercia es que el mayor y el menor de ellos son el mayor y el menor momento de inercia asociados a *cualquier* eje que pase por el punto considerado. Para demostrar ésto, sean $I_1 \le I_2 \le I_3$, los momentos principales de inercia en P y sean los correspondientes ejes principales x, y, z. El momento de inercia respecto a algún otro eje, x', está dado por la Ec. (7.20):

$$I^P_{x'x'} = I_1\ell_x^2 + I_2\ell_y^2 + I_3\ell_z^2$$

o bien

$$\frac{I^P_{x'x'}}{I_1} = \ell_x^2 + \left(\frac{I_2}{I_1}\right)\ell_y^2 + \left(\frac{I_3}{I_1}\right)\ell_z^2 \ge 1$$

ya que

$$\frac{I_3}{I_1} \ge \frac{I_2}{I_1} \ge 1 \qquad \text{y} \qquad \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2 = 1$$

Entonces $I^P_{x'x'} \ge I_1$, de modo que *ninguna* línea por P tiene un momento de inercia menor que el momento de inercia principal. Similarmente, $I^P_{x'x'}/I_3 \le 1$, o bien $I^P_{x'x'} \le I_3$ y ninguna recta por P tiene un momento de inercia asociado mayor que el máximo momento de inercia *principal*. Entonces el máximo y el mínimo momentos de inercia en un punto P se encuentran entre los principales momentos de inercia en P. Puede demostrarse fácilmente que el momento de inercia mínimo en el centro de masa es el mínimo I para *cualquier* recta de $\mathcal{B}$ o de $\mathcal{B}$ extendido.

Pregunta 7.3 Formule una demostración breve de esta última aseveración tomando en cuenta los resultados precedentes junto con el teorema de los ejes paralelos.

Problemas / Sección 7.4

7.21 Determine los ejes principales y los momentos de inercia principales asociados en O para la placa semicircular de masa m y radio R mostrada en la Fig. P7.21.

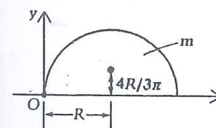
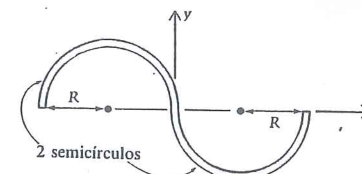


Figura P7.21

7.22 Determine los ejes principales y los momentos de inercia principales asociados para un alambre plano en su centro de masa; vea la Fig. P7.22.



μ_0 = masa por unidad de longitud = constante

Figura P7.22

7.23 Encuentre el vector de O al centro de masa de la barra doblada en el Ejemplo 7.5. Observe que no se encuentra a lo largo de ninguno de los tres ejes principales en O.

7.24 Use las definiciones de los momentos de inercia para demostrar que si un cuerpo se encuentra esencialmente en el plano xy (o sea que tiene muy pequeñas dimensiones normales a él), entonces $I^P_{zz} \approx I^P_{xx} + I^P_{yy}$, en donde P es *cualquier punto* en el plano y z es un eje principal en P.

7.25 Demuestre que si un eje que pase por el centro de masa C, del cuerpo $\mathcal{B}$ es principal en C, entonces es un eje principal para *todo punto* sobre ese eje. *Sugerencia:* Use el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia junto con la ortogonalidad de los ejes principales (Fig. P7.25). Transfiera I_{yz}^c e I_{xz}^c a P.

7.26 Demuestre que si un eje principal para un punto (como el P en el problema anterior) pasa por C, entonces es también principal para C. (Misma sugerencia.)

7.27 Demuestre que si una recta es un eje principal para dos de sus puntos, entonces es un eje principal para el centro de masa.

7.28 Demuestre que los tres ejes principales para cualquier punto que se halle sobre un eje principal de C son paralelos a los ejes principales de C.

7.29 Encuentre los momentos principales de inercia y sus ejes asociados en O para la placa delgada (Fig. P7.29) en términos de su densidad ρ y espesor t.

* **7.30** Determine los momentos de inercia I_{xx}^P, I_{yy}^P e I_{zz}^P para el cuerpo mostrado en el Ejemplo 4.13. Luego encuentre los momentos principales de inercia y los ejes principales correspondientes en P.

* **7.31** En el Problema 7.16 encuentre los momentos principales de inercia y sus ejes principales en el punto O.

* **7.32** Calcule los momentos principales de inercia en O y los cosenos directores de sus respectivos ejes principales para el cuerpo $\mathcal{B}$ en la Fig. P7.32. tal cuerpo está formado de tres barras dobladas soldadas entre sí; todas las barras están a lo largo o son paralelas a los ejes coordenados.

* **7.33** Encuentre los momentos principales de inercia y los ejes principales asociados en el origen para el cuerpo en la Fig. P7.33.

* **7.34** En el Ejemplo 7.5 determine los momentos y ejes principales de inercia en el centro de masa C.

* **7.35** Encuentre los momentos y ejes principales de inercia para la placa del Ejemplo 7.4 cuando $b = 2H$.

7.36 Encuentre los momentos y ejes principales de inercia si el cuerpo del Ejemplo 7.4 tiene profundidad L en vez de ser una placa delgada (Fig. P7.36.) *Sugerencia:* El plano xy es de simetría por lo que $I_{xz}^c = I_{yz}^c = 0$ nuevamente.

* **7.37** Para el sólido homogéneo rectangular mostrado en la Fig. P7.37, encuentre el menor de los tres ángulos entre la recta AB y los ejes principales de inercia en A.

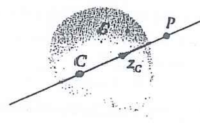


Figura P7.25

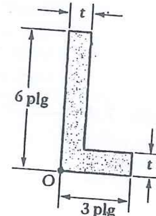


Figura P7.29

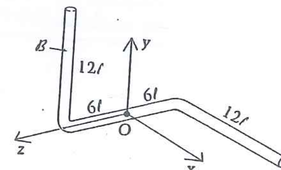


Figura P7.32

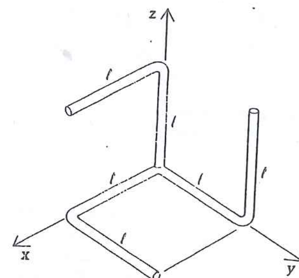


Figura P7.33

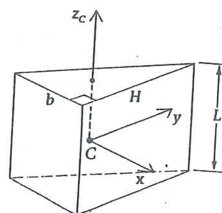


Figura P7.36

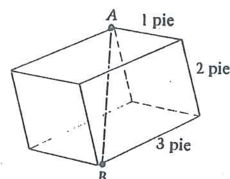


Figura P7.37

* **7.38** Encuentre los momentos y ejes principales de inercia en el origen para un cuerpo que consiste en tres placas cuadradas soldadas por sus bordes, como se muestra en la Fig. P7.38. (El eje del menor valor de I debe ser alrededor del cual la masa se encuentra más cerca en sentido general. Haga esta comprobación burda de su resultado.) Masa $= 3m$, lado $= a$.

* **7.39** Cuatro barras delgadas, cada una de masa m y longitud ℓ, están soldadas entre sí para formar el cuerpo mostrado en la Fig. P7.39. Encuentre: (a) las propiedades de inercia en el centro de masa C; (b) los momentos y ejes principales de inercia en C.

* **7.40** En la Fig. P7.40, el eje de simetría Y_c del disco es paralelo a y; el plano del disco es paralelo a xz. Calcule los momentos principales de inercia de $\mathcal{D}$ en el origen O y, para el mínimo, determine los ángulos que su eje principal asociado forma con x, y, z.

** **7.41** La Fig. P7.41 muestra parte de una estación espacial que está construyéndose en órbita. Calcule los momentos y ejes principales de inercia en C_3. Los módulos tienen diámetros de 33 pie pero debido al material que contienen, no son huecos. Para los propósitos de este problema, trátelos como cilindros huecos uniformes con radio de giro respecto a sus ejes igual a 12 pie.

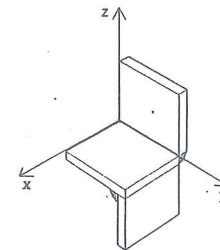


Figura P7.38

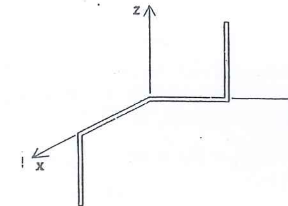


Figura P7.39

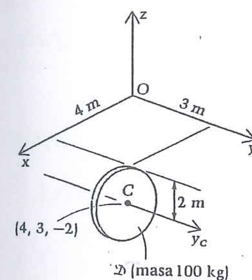


Figura P7.40

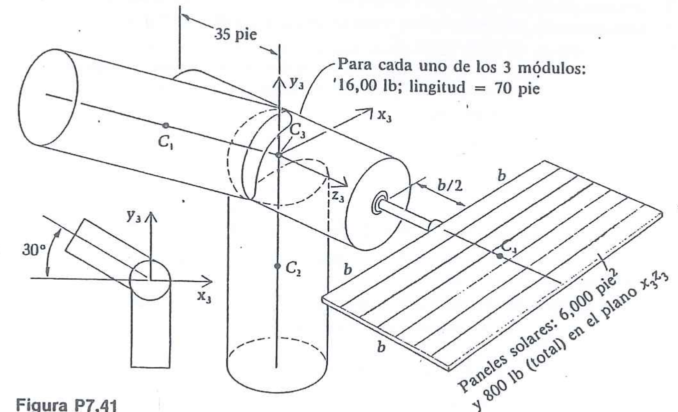


Figura P7.41

7.5 Ecuaciones de Euler que rigen el Movimiento Rotacional de un Cuerpo Rígido

En esta sección deduciremos las tres ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento angular de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$. Sus soluciones, que son difíciles de obtener en forma cerrada en la mayoría de los casos, proporcionan las tres componentes de velocidad angular de $\mathcal{B}$ en (tér-

minos de sus componentes en) un marco inercial $\mathcal{I}$. Comenzamos con la Ec. (7.2) observando que su derivada respecto al tiempo se toma en $\mathcal{I}$. Sin embargo, la cantidad de movimiento angular H_c se expresó más convenientemente "en" * el cuerpo $\mathcal{B}$ correspondiente a la Ec. (7.11). Por tanto, usaremos la Ec. (6.20) para desplazar la derivada en (7.2) de $\mathcal{I}$ a $\mathcal{B}$:

$$\Sigma \mathbf{M}_C = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_C = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C \qquad (7.37)$$

Ahora fijamos los ejes (x,y,z) al cuerpo $\mathcal{B}$ de modo que respecto a $\mathcal{B}$ las propiedades de inercia son constantes. Usando la Ec.(7.11), el primer término del lado derecho de la Ec. (7.37) resulta ser

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C = {} & (I^C_{xx}\dot{\omega}_x + I^C_{xy}\dot{\omega}_y + I^C_{xz}\dot{\omega}_z)\hat{\mathbf{i}} \\ & + (I^C_{xy}\dot{\omega}_x + I^C_{yy}\dot{\omega}_y + I^C_{yz}\dot{\omega}_z)\hat{\mathbf{j}} \\ & + (I^C_{xz}\dot{\omega}_x + I^C_{yz}\dot{\omega}_y + I^C_{zz}\dot{\omega}_z)\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \qquad (7.38)$$

en donde los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ son respectivamente paralelos a x, y, z, por lo que ahora están fijos en dirección en $\mathcal{B}$. El segundo término en la Ec. (7.37), después de calcular el producto vectorial, es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C = {} & [(I^C_{zz} - I^C_{yy})\omega_y\omega_z + I^C_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) + \omega_x(\omega_y I^C_{xz} - \omega_z I^C_{xy})]\hat{\mathbf{i}} \\ & + [(I^C_{xx} - I^C_{zz})\omega_z\omega_x + I^C_{xz}(\omega_z^2 - \omega_x^2) + \omega_y(\omega_z I^C_{xy} - \omega_x I^C_{yz})]\hat{\mathbf{j}} \\ & + [(I^C_{yy} - I^C_{xx})\omega_x\omega_y + I^C_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) + \omega_z(\omega_x I^C_{yz} - \omega_y I^C_{xz})]\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \qquad (7.39)$$

La suma de las Ecs. (7.38) y (7.39) da el segundo miembro de la Ec.(7.37), que a su vez es igual al momento respecto al centro de masa C de todas las fuerzas externas y pares que actúan sobre $\mathcal{B}$.

Es claro que esta ecuación es muy larga y complicada. Si escogemos los ejes (x,y,z) fijos al cuerpo como los ejes *principales* por C, entonces todos los productos de inercia son nulos y obtenemos:

$${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C = I^C_{xx}\dot{\omega}_x\hat{\mathbf{i}} + I^C_{yy}\dot{\omega}_y\hat{\mathbf{j}} + I^C_{zz}\dot{\omega}_z\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.40)$$

y

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C = {} & (I^C_{zz} - I^C_{yy})\omega_y\omega_z\hat{\mathbf{i}} + (I^C_{xx} - I^C_{zz})\omega_z\omega_x\hat{\mathbf{j}} \\ & + (I^C_{yy} - I^C_{xx})\omega_x\omega_y\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \qquad (7.41)$$

de manera que sustituyendo en la Ec. (7.37) e igualando los respectivos coeficientes de $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$, obtenemos las **ecuaciones de Euler:**

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Cx} &= I^C_{xx}\dot{\omega}_x - (I^C_{yy} - I^C_{zz})\omega_y\omega_z \\ \Sigma M_{Cy} &= I^C_{yy}\dot{\omega}_y - (I^C_{zz} - I^C_{xx})\omega_z\omega_x \\ \Sigma M_{Cz} &= I^C_{zz}\dot{\omega}_z - (I^C_{xx} - I^C_{yy})\omega_x\omega_y \end{aligned} \qquad (7.42)$$

Estas ecuaciones rigen el movimiento rotacional de $\mathcal{B}$ en el marco $\mathcal{I}$ y son igualmente válidas si reemplazamos C por O cuando $\mathcal{B}$ tenga en O un pivote (punto fijo permanentemente). Notamos que aunque se empleen los ejes principales por C, las ecuaciones de Euler no son lineales en las componentes de ω, lo que representa una gran diferencia entre el movimiento plano

* "Expresar un vector en un marco de referencia" significa meramente expresar a dicho vector en términos de vectores unitarios fijos en ese marco.

y el general. No existe una extensión natural de la Ec. (4.14c), $\Sigma M_{Cz} = I^C_{zz}\alpha$ al movimiento rotacional general, como fue el caso para la ecuación de movimiento (2.12) del centro de masa. Nótese que en el caso del movimiento plano tenemos $\omega_x \equiv 0 \equiv \omega_y$, de modo que las Ecs. (7.42) se reducen a las simples formas $\Sigma M_{Cx} = 0$, $\Sigma M_{Cy} = 0$ y $\Sigma M_{Cz} = I^C_{zz}\alpha$.

Ahora si tenemos movimiento plano pero (x,y,z) *no* son principales, obtenemos de las Ecs. (7.37) a la (7.39):

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Cx} &= I^C_{xz}\dot{\omega}_z - I^C_{yz}\omega_z^2 \\ \Sigma M_{Cy} &= I^C_{yz}\dot{\omega}_z + I^C_{xz}\omega_z^2 \\ \Sigma M_{Cz} &= I^C_{zz}\dot{\omega}_z \end{aligned} \qquad (7.43)$$

En las Ecs. (7.43), $\omega_z = \omega$ y $\dot{\omega}_z = \alpha$ en la notación usual del movimiento plano; la componente z de ω (y α) es la única componente que no se anula en este caso.

Existen pocas soluciones conocidas en forma cerrada de las Ecs(7.42) para las componentes de la velocidad angular; además, para conocer la orientación del cuerpo en el espacio completamente, se debe integrar un conjunto de tres ecuaciones cinemáticas no lineales como las Ecs. (6.69) a fin de obtener los ángulos de orientación de $\mathcal{B}$ o los cosenos directores en el espacio para un eje fijo al cuerpo.

Ejemplo 7.6

Determinar si existen ejes a través de C respecto a los cuales una rotación inicial con velocidad angular $\mathcal{B}$ del cuerpo ω_0 se mantendrá sí sola (o sea que permanecerá constante) bajo la condición de momento cero.

Solución

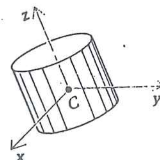
Se pregunta aquí si el cuerpo, una vez en movimiento *permanecerá* girando alrededor de un eje fijo en el marco de referencia inercial $\mathcal{I}$. Sin perder generalidad, sea el eje inicialmente el z, por lo que se aplican las Ecs. (7.43). De la tercera de estas ecuaciones veremos que si $\mathcal{B}$ está libre de pares (condición de momento cero), $\Sigma M_{Cz} = 0 = I^C_{zz}\dot{\omega}_z$ y que ω_z permanecerá entonces constante en su valor inicial ω_0. Sin embargo, las otras dos ecuaciones dan dos restricciones adicionales:

$$\Sigma M_{Cx} = 0 \qquad \text{sólo si } I^c_{yz} = 0$$
$$\Sigma M_{Cy} = 0 \qquad \text{sólo si } I^c_{xz} = 0$$

Pero $I^c_{yz} = 0 = I^c_{xz}$ implica que z es principal. Por lo tanto, la rotación persistirá en ausencia de momento externo si y sólo si el eje de rotación es un eje principal. Esta investigación es lo que condujo a Euler a descubrir el concepto de eje principal en 1750.

Ejemplo 7.7

Un satélite* se mueve en el espacio lejos de la influencia retardadora de la atmósfera y de la gravedad (vea el diagrama). Si el eje z es de simetría y si en un instante t = O tenemos $\omega = (\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i})$ a lo largo de los ejes fijos al cuerpo en su centro de masa, determinar (t). Suponga que el satélite es un cuerpo rígido.



Solución

Las ecuaciones de Euler, si $I^c_{xx} = I^c_{yy} = I$ y $I^c_{zz} = J$, son:

$$I\dot{\omega}_x - (I - J)\omega_y\omega_z = 0 \qquad (1)$$

$$I\dot{\omega}_y - (J - I)\omega_z\omega_x = 0 \qquad (2)$$

$$J\dot{\omega}_z - (I - I)\omega_x\omega_y = 0 \qquad (3)$$

en donde las componentes de momento son cero en ausencia de fuerzas y pares externos. La Ec.(3) da:

$$\omega_z = \text{constante} = \omega_{z_i} \qquad (4)$$

de modo que las Ecs. (1) y (2) resultan lineales y son:

$$I\dot{\omega}_x - (I - J)\omega_y\omega_{z_i} = 0 \qquad (5)$$

$$I\dot{\omega}_y - (J - I)\omega_{z_i}\omega_x = 0 \qquad (6)$$

Diferenciando la Ec. (6) y despejando $\dot{\omega}_x$ obtenemos

$$\dot{\omega}_x = \frac{I\ddot{\omega}_y}{(J - I)\omega_{z_i}} \qquad (7)$$

Esta expresión puede sustituirse en (5) para obtener una ecuación libre de ω_x:

$$\ddot{\omega}_y + \left(\frac{(J - I)\omega_{z_i}}{I}\right)^2 \omega_y = 0$$

o bien

$$\ddot{\omega}_y + p^2\omega_y = 0$$

en donde $P = (J-I)\,\omega_{z_i}/I$. La solución de esta ecuación es armónica:

$$\omega_y = A\cos pt + B\,\text{sen}\,pt$$

Como $\omega_y = \omega_{y_i}$ en t=O, vemos que $A = \omega_{y_i}$. Finalmente, la Ec. (6) da

$$\omega_x = \frac{\dot{\omega}_y}{p} = \frac{-\omega_{y_i}p\,\text{sen}\,pt + Bp\cos pt}{p}$$

o bien

$$\omega_x = -\omega_{y_i}\,\text{sen}\,pt + B\cos pt$$

*Tal como la astronave o vehículo espacial *Voyager*, que abandonó el Sistema Solar en 1983.

La condición inicial para ω_x da

$$\omega_{x_i} = 0 + B \Rightarrow B = \omega_{x_i}$$

de modo que las otras dos componentes (además de $\omega_z = \omega_{z_i}$) de $\omega(t)$ son:

$$\omega_x = \omega_{x_i}\cos pt - \omega_{y_i}\,\text{sen}\,pt$$

$$\omega_y = \omega_{y_i}\cos pt + \omega_{x_i}\,\text{sen}\,pt$$

Este ejemplo ilustra una solución en forma cerrada de las ecuaciones de Euler. En realidad, tales soluciones son raras y los problemas no siempre se resuelven usando las ecuaciones de Euler en la forma (7.42). Tres razones para esto son:

1. Con frecuencia interesa expresar los momentos externos y la cantidad de movimiento angular de $\mathcal{B}$ en términos de componentes asociadas a direcciones fijas, en un marco que no es el cuerpo mismo.
2. A menudo hay que tratar con uno o dos productos de inercia y en la mayoría de los casos es menos sencillo calcular los momentos y ejes principales de inercia que incluir los términos con los productos en la expresión de la cantidad de movimiento angular y diferenciarlos.
3. En ciertos estudios sobre la estabilidad de sistemas de cuerpos rígidos unidos, es necesario agregar términos a las ecuaciones de Euler para tomar en cuenta los movimientos relativos.

Estas y otras nociones sugieren que será más ventajoso a menudo comenzar la resolución con la segunda ley de Euler:

$$\Sigma\mathbf{M}_C = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_C$$

y "desplazar la derivada" al marco (digamos $\mathcal{J}$) en el que tenemos a $\Sigma\mathbf{M}_C$ y $\mathbf{H}_c$ expresadas convenientemente:

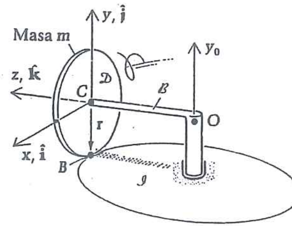
$$\Sigma\mathbf{M}_C = {}^{\mathcal{J}}\dot{\mathbf{H}}_C + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{J}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C$$

De esta manera podemos usar cualquier marco que escojamos para expresar los vectores; si está presente un producto de inercia diferente de cero, el mismo se incluye simplemente en $\mathbf{H}_c$. Analizaremos ahora estas ideas en varios ejemplos seguidos por dos aplicaciones al giróscopo o giróstato.

Ejemplo 7.8

Un disco $\mathcal{D}$ de masa m rueda sobre un círculo, como se muestra en el diagrama; el disco está guiado por un brazo $\mathcal{B}$ ligero pero rígido de longitud L que gira (impulsado por fuerzas que no se muestran) en un círculo horizontal alrededor de O. El brazo está conectado a $\mathcal{D}$ en C por medio de una junta esférica. Si el centro de masa C de $\mathcal{D}$ viaja con rapidez constante V_c, hallar la componente horizontal de la fuerza ejercida sobre $\mathcal{D}$ en C por el brazo $\mathcal{B}$; determinar también la fuerza de fricción ejercida por el piso sobre $\mathcal{D}$. (El piso será

el marco inercial $\mathcal{I}$ en el problema.) Supóngase un contacto lineal de $\mathcal{D}$ con el plano.



Solución

Expresaremos convenientemente las velocidades angulares y la cantidad de movimiento angular en un marco representado por el brazo $\mathcal{B}$. Los ejes (x,y,z) (ver la figura) están anclados a $\mathcal{B}$ en C; x tiene siempre la dirección de $\mathbf{v}_c$, y siempre es vertical y dirigido hacia arriba, y z está dirigido a lo largo de la recta OC. Nótese que $\mathcal{B}$ se mueve alrededor del eje central Y_0 junto con $\mathcal{D}$ pero no rueda (alrededor de z) con él.

Las diversas velocidades angulares que interesan están relacionadas entre sí por el teorema de la adición:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{D}/\mathcal{I}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{D}/\mathcal{B}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \tag{1}$$

$$= \omega_r(-\hat{\mathbf{k}}) + \frac{v_C}{r_{OC}}(\hat{\mathbf{j}}) \tag{2}$$

en donde ω_r, la parte de "rodamiento" de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{D}/\mathcal{I}}$, puede encontrarse relacionando las velocidades de C y el punto de contacto de B de $\mathcal{D}$:

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{D}/\mathcal{I}} \times \mathbf{r}_{BC} \tag{3}$$

$$v_C\mathbf{i} = \mathbf{0} + \left(-\omega_r\hat{\mathbf{k}} + \frac{v_C}{L}\hat{\mathbf{j}}\right) \times r\hat{\mathbf{j}}$$

de modo que

$$v_C = r\omega_r \Rightarrow \omega_r = \frac{v_C}{r} \tag{4}$$

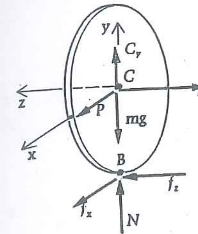
Entonces de la Ec. (2),

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{D}/\mathcal{I}} = \frac{v_C}{L}\left(\hat{\mathbf{j}} - \frac{L}{r}\hat{\mathbf{k}}\right) \tag{5}$$

A continuación escribimos la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_c$ de $\mathcal{D}$. Tomaremos en cuenta el hecho de que (x,y,z) son todos ejes principales permanentemente para $\mathcal{D}$ en C, *aunque ellos no son ejes fijos al cuerpo en* $\mathcal{D}$. Esto significa que podemos escribir

$$\mathbf{H}_C = I_{xx}^C\omega_x\hat{\mathbf{i}} + I_{yy}^C\omega_y\hat{\mathbf{j}} + I_{zz}^C\omega_z\hat{\mathbf{k}} \tag{6}$$

en donde $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ son componentes en $\mathcal{B}$ de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{D}/\mathcal{I}}$. $\mathbf{H}_C$. El vector cantidad de movimiento (o ímpetu) angular $\mathbf{H}_c$ queda así expresado legítimamente en términos de componentes asociadas con direcciones fijas en el marco $\mathcal{B}$ en este caso, aunque es la cantidad de movimiento angular de $\mathcal{D}$ moviéndose en $\mathcal{I}$. Al final del ejemplo se le preguntará al lector sobre la ventaja de expresar $\mathbf{H}_c$ en un "marco intermedio" como el $\mathcal{B}$ en este problema.



Como $\omega_x = 0$, $I_{yy}^C = mr^2/4$, y $I_{zz}^c = mr^2/2$, se tiene entonces, sustituyendo en la Ec. (6):

$$\mathbf{H}_C = \frac{mr^2}{4}\frac{v_C}{L}\hat{\mathbf{j}} + \frac{mr^2}{2}\left(\frac{-v_C}{r}\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$= \frac{mr^2v_C}{4L}\left(\hat{\mathbf{j}} - \frac{2L}{r}\hat{\mathbf{k}}\right) \tag{7}$$

Ahora aplicamos las ecuaciones de movimiento. Primero, usando el diagrama de cuerpo libre mostrado aquí, se aplica la ley del movimiento del centro de masa (Primera Ley de Euler):

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} = m\mathbf{a}_C$$

de donde

$$\Sigma F_x = f_x + P = ma_{C_x} = 0 \quad \text{(por ser constante la rapidez de C)} \tag{8}$$

$$\Sigma F_y = N + C_y - mg = ma_{C_y} = 0 \quad \text{(por viajar el centro de masa en un círculo horizontal)} \tag{9}$$

$$\Sigma F_z = f_z - T = ma_{C_z} = -\frac{mv_C^2}{L} \quad \text{(que es la masa por la aceleración normal o centrípeta de C)} \tag{10}$$

La Segunda Ley de Euler es

$$\Sigma\mathbf{M}_C = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_C$$

pero como tenemos $\mathbf{H}_c$ expresada en $\mathcal{B}$, se desplazará la derivada hacia allá:

$$\Sigma\mathbf{M}_C = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_C = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C \tag{11}$$

Notamos que ${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C = \mathbf{0}$ ya que todos los términos de $\mathbf{H}_c$ en (7) son constantes.

$$\Sigma\mathbf{M}_C = \left(\frac{v_C}{L}\hat{\mathbf{j}}\right) \times \frac{mr^2v_C}{4L}\left(\hat{\mathbf{j}} - \frac{2L}{r}\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$= \frac{-mrv_C^2}{2L}\hat{\mathbf{i}} \tag{12}$$

Las ecuaciones de componentes escalares de (12) son

$$\Sigma M_{Cx} = -f_z r = \frac{-mrv_C^2}{2L} \Rightarrow f_z = \frac{mv_C^2}{2L} \tag{13}$$

$$\Sigma M_{Cy} = 0 = 0; \text{ de manera que, se satisface idénticamente.} \tag{14}$$

$$\Sigma M_{Cz} = f_x r = 0 \Rightarrow f_x = 0 \tag{15}$$

Las Ecs. (15) y (18) muestran que no sólo f_x sino que también P es cero.

La Ec.(13) da la otra fuerza de fricción que actúa sobre $\mathcal{D}$ en B. Sustituyendo f_z de la Ec.(13) en la (10) obtenemos la tensión en el brazo $\mathcal{B}$:

$$T = f_z + \frac{mv_C^2}{L} = \frac{3mv_C^2}{2L} \qquad (16)$$

y la tensión es tres veces mayor que la fuerza de fricción. Adviértase que ninguna de las fuerzas depende del radio r del disco. Si por ejemplo, dicho disco tiene una masa de 20 kg y si $L = 0.9$ m y $V_c = 0.6$ m/s, entonces

$$f_z = \frac{20(0.6^2)}{2(0.9)} = 4\text{ N} \quad \text{y} \quad T = 12\text{ N}$$

Como P y f_x se anulan, T y f_z son la respuesta al problema.

Pregunta 7.4 ¿Qué se ganó en este Ejemplo al escribir $\mathbf{H}_C$ en términos de sus componentes en $\mathcal{B}$?

Pregunta 7.5 ¿Que le sucede a la solución si no hay suficiente fricción para que se genere f_z (suponiendo fricción de Coulomb), o sea si $\mu N < f_z$?

Pregunta 7.6 ¿Pueden determinarse las componentes verticales de reacción, N y C_y?

Pregunta 7.7 Dé una explicación sencilla de por qué al principio del problema no se espera que $\omega_{\mathcal{D}/\mathcal{I}}$ sea paralela a $\mathbf{H}_c$ (vea las Ecs. (5) y (7).

Los resultados del ejemplo anterior dependen mucho de cómo están unidos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ están unidos. Vease el Problema 7.78, en donde aparece un conjunto diferente de fuerzas causado por un tipo distinto de conexión entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$.

Ejemplo 7.9

Una rueda simétrica $\mathcal{D}$ gira con rapidez angular ω_s alrededor de su eje que es una línea fija en los cuerpos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$. (Vea la Fig. 1). Los momentos de inercia de $\mathcal{D}$ en C son $I_{yy}^c = J$ e $I_{xx}^c = I_{zz}^c = I$. El cuerpo $\mathcal{B}$ tiene masa despreciable y gira con rapidez angular ω_x alrededor del eje x por O. Si se aplica un momento M_o a $\mathcal{B}$ paralelo al eje X_c, encuentre, en el instante mostrado, las razones de cambio de ω_s y ω_x y la fuerza y momento ejercidos sobre $\mathcal{D}$ en C por el pasador. Desprecie la fricción.

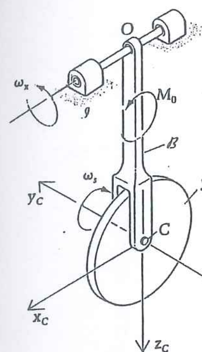


Figura 1

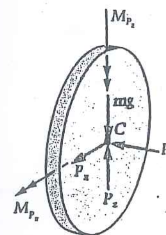


Figura 2

Solución

Sea $\mathcal{B}$ el marco de referencia inercial (en el que se mueve $\mathcal{I}$). El teorema de la adición para velocidades angulares da, para la rueda,

$$\omega_{\mathcal{D}/\mathcal{I}} = \omega_{\mathcal{D}/\mathcal{B}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$$
$$= \omega_s\hat{\mathbf{j}} + \omega_x\hat{\mathbf{i}}$$

en donde los ejes (X_c, Y_c, Z_c) están fijos en $\mathcal{B}$ y sus vectores unitarios asociados $(\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}})$ están fijos en dirección en $\mathcal{B}$. Adviértase que podemos usar la ecuación

$$\mathbf{H}_C = I_{xx}^C\omega_x\hat{\mathbf{i}} + I_{yy}^C\omega_y\hat{\mathbf{j}} + I_{zz}^C\omega_z\hat{\mathbf{k}}$$

para la cantidad de movimiento angular de $\mathcal{D}$ porque aunque (X_c, Y_c, Z_c) no están fijos en $\mathcal{D}$, son permanentemente principales. Por ello,

$$\mathbf{H}_C = I\omega_x\hat{\mathbf{i}} + J\omega_s\hat{\mathbf{j}}$$

La segunda ley de Euler da entonces

$$\Sigma\mathbf{M}_C = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_C = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C$$

en donde por conveniencia se deriva $\mathbf{H}_c$ en el marco $\mathcal{B}$ ya que el vector se ha expresado en términos de sus componentes ahí. Prosiguiendo:

$$\Sigma\mathbf{M}_C = I\dot{\omega}_x\hat{\mathbf{i}} + J\dot{\omega}_s\hat{\mathbf{j}} + (\omega_x\hat{\mathbf{i}}) \times (I\omega_x\hat{\mathbf{i}} + J\omega_s\hat{\mathbf{j}})$$
$$= I\dot{\omega}_x\hat{\mathbf{i}} + J\dot{\omega}_s\hat{\mathbf{j}} + J\omega_x\omega_s\hat{\mathbf{k}}$$

Del diagrama de cuerpo libre de $\mathcal{D}$ (Fig.2) obtenemos las componentes de $\Sigma\mathbf{M}_C$:

$$M_{P_x}\hat{\mathbf{i}} + M_{P_z}\hat{\mathbf{k}} = I\dot{\omega}_x\hat{\mathbf{i}} + J\dot{\omega}_s\hat{\mathbf{j}} + J\omega_x\omega_s\hat{\mathbf{k}}$$

Vemos entonces que

$$M_{P_x} = I\dot{\omega}_x \qquad (1)$$
$$0 = J\dot{\omega}_s \Rightarrow \omega_s = \text{constante} \qquad (2)$$
$$M_{P_z} = J\omega_x\omega_s \qquad (3)$$

Además, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_c$ para el disco da

$$P_x\hat{\mathbf{i}} + P_y\hat{\mathbf{j}} - P_z\hat{\mathbf{k}} + mg\hat{\mathbf{k}} = m(-\ell\dot{\omega}_x\hat{\mathbf{j}} - \ell\omega_x^2\hat{\mathbf{k}})$$

de modo que

$$P_x = 0 \qquad (4)$$
$$P_y = -m\ell\dot{\omega}_x \qquad (5)$$
$$P_z = mg + m\ell\omega_x^2 \qquad (6)$$

En el diagrama de cuerpo libre del cuerpo *ligero* $\mathcal{B}$ (Fig. 3) se tiene (ya que $\Sigma M_{Ox} \approx 0$) que

$$\ell P_y + M_0 - M_{P_x} = 0 \tag{7}$$

Combinando las Ecs. (1), (5) y (7):

$$\dot{\omega}_x = \frac{M_0}{I + m\ell^2} \tag{8}$$

y además

$$P_y = \frac{-m\ell M_0}{I + m\ell^2} \tag{9}$$

y

$$M_{P_x} = \frac{I M_0}{I + m\ell^2} \tag{10}$$

Los resultados (4), (6), (8), (9) y (10) equivalen a lo que se obtendría si el disco estuviese soldado a sus cojinetes, y entonces $\mathcal{B}$ junto con $\mathcal{D}$ formarían un solo cuerpo rígido en movimiento plano.

Sin embargo, la Ec.(3) no se infiere intituivamente del estudio del movimiento plano. El término $J\omega_x\omega_s$ se llama a veces *momento giroscópico* y la ecuación dice que un momento de esta magnitud debe actuar sobre $\mathcal{D}$ alrededor de z_C para que ocurra el movimiento dado. Note que en este caso el cuerpo $\mathcal{D}$ *no* puede girar alrededor de z_C al girar respecto a Y_c. Si girase —por ejemplo, por medio de un cojinete entre C y O—, entonces la componente de momento M_{P_z} sería cero y aparecería una tercera componente de ω (respecto a z_C). Veremos esto en el siguiente ejemplo. Nótese también en la Fig. 3 que el momento giroscópico *tuerce* al eje de $\mathcal{B}$. Esto es un detalle por considerar en la retracción de las ruedas de algunos aeroplanos.

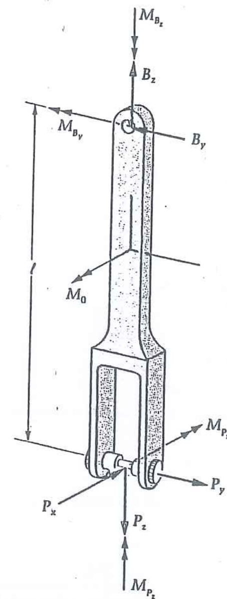
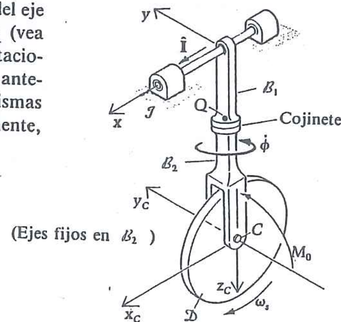


Figura 3

Ejemplo 7.10

Supóngase que en el ejemplo anterior se inserta un cojinete sin fricción a lo largo de la barra eje, de modo que $\mathcal{B}$ queda constituído por dos cuerpos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ que pueden girar entre sí alrededor del eje z_C. Si ϕ mide la rotación relativa de $\mathcal{B}_2$ con respecto a $\mathcal{B}_1$ (vea las figuras), use las ecuaciones modificadas del movimiento rotacional para encontrar $\ddot{\phi}$ y $\dot{\omega}_s$ en el instante dado en el problema anterior. La rotación relativa de $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_1$ se inicia con las mismas condiciones iniciales que en el ejemplo anterior y, adicionalmente, $\phi = \dot{\phi} = 0$.



(Ejes fijos en $\mathcal{B}_2$)

Solución

La velocidad angular de $\mathcal{D}$ tiene ahora una componente adicional que es $\omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$:

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{D}/\mathcal{I}} &= \omega_{\mathcal{D}/\mathcal{B}_2} + \omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1} + \omega_{\mathcal{B}_1/\mathcal{I}} \\ &= \omega_s\hat{\mathbf{j}} + \omega_z\hat{\mathbf{k}} + \omega_x\hat{\mathbf{I}} \\ &= \omega_s\hat{\mathbf{j}} + \overset{-\dot{\phi}}{\cancel{\omega_z}}\hat{\mathbf{k}} + \omega_x(\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\mathbf{j}})\end{aligned}$$

A continuación obtenemos la cantidad de movimiento angular de $\mathcal{D}$, en donde como antes, $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ están fijos en $\mathcal{B}_2$ y dirigidos permanentemente según las direcciones principales de $\mathcal{D}$ en C :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_C &= I_{xx}^C\omega_x\hat{\mathbf{i}} + I_{yy}^C\omega_y\hat{\mathbf{j}} + I_{zz}^C\omega_z\hat{\mathbf{k}} \\ &= I(\omega_x\cos\phi)\hat{\mathbf{i}} + J(\omega_s + \omega_x\operatorname{sen}\phi)\hat{\mathbf{j}} - I\dot{\phi}\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Usando de nuevo la segunda ley de Euler:

$$\Sigma\mathbf{M}_C = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_C = {}^{\mathcal{B}_2}\dot{\mathbf{H}}_C + \omega_{\mathcal{B}_2/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C$$

obtenemos las tres ecuaciones del movimiento rotacional de $\mathcal{D}$:

$$\Sigma M_{Cx} = I\dot{\omega}_x\cos\phi + (J - 2I)\dot{\phi}\omega_x\operatorname{sen}\phi + J\omega_s\dot{\phi} \tag{1}$$

$$\Sigma M_{Cy} = J\frac{d}{dt}(\omega_s + \omega_x\operatorname{sen}\phi) \tag{2}$$

$$\Sigma M_{Cz} = -I\ddot{\phi} + \omega_x\cos\phi[(J - I)\omega_x\operatorname{sen}\phi + J\omega_s] \tag{3}$$

Observando que $\Sigma M_{Cz} = 0$, la Ec. (3) da en $t = 0$

$$\ddot{\phi} = J\omega_s\omega_x/I \tag{4}$$

ecuación que indica que $\mathcal{D}$ (junto con $\mathcal{B}_2$) comenzará inmediatamente a girar alrededor de la dirección z_C negativa.

Nuevamente no tenemos una componente de momento actuando sobre $\mathcal{D}$ alrededor de Y_c; entonces la Ec. (2) puede desarrollarse resultando

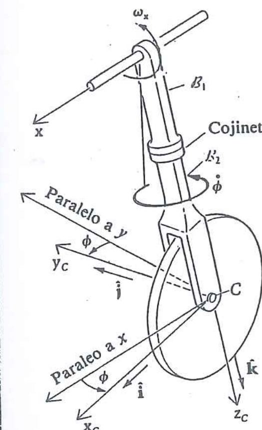
$$\dot{\omega}_s + \omega_x\dot{\phi}\cos\phi + \dot{\omega}_x\operatorname{sen}\phi = 0 \tag{5}$$

En $t = 0$ (ya que $\phi = \dot{\phi} = 0$ entonces), vemos que

$$\dot{\omega}_s = 0$$

Notemos que como ϕ comenzará a crecer desde cero (ver la Ec. 4), $\dot{\omega}_s$ esta vez *no* permanecerá igual a cero y, en contraste con el Ej. 7.9, ω_s *no* permanecerá constante.

Puede demostrarse también, usando diagramas de cuerpo libre de $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{D}$, que $\dot{\omega}_x$ es inicialmente igual a $M_0/(I + m\ell^2)$ como fue el caso en el Ejemplo 7.9.

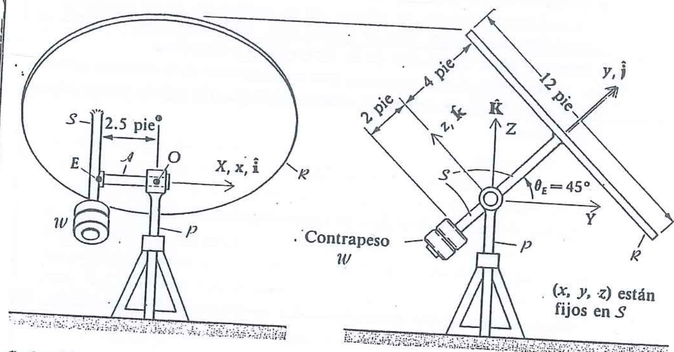


No es siempre factible construir un sistema rotacional tal que los giros sucesivos del cuerpo sean cada uno alrededor de un eje principal. Esto significa que algunas veces hay que tomar en cuenta a los productos de inercia directamente. En estos casos debemos prescindir de las ecuaciones de Euler en la forma (7.42), y usarlas en una forma distinta. El siguiente ejemplo ilustra estas observaciones.

Ejemplo 7.11

Por razones de interferencia con otros cuerpos, se diseñó y construyó una antena con un eje excéntrico, como se muestra en el diagrama. La antena está compuesta de un reflector parabólico $\mathcal{R}$, de 12 pies y 12 000 lbs., de un contrapeso $\mathcal{W}$, de una estructura de soporte $\mathcal{S}$ y de un posicionador. Esté ultimo consiste en (1) un pedestal $\mathcal{P}$ fijo al marco inercial de referencia; (2) un soporte acimutal en O con engranaje por medio del cual el brazo $\mathcal{A}$ gira respecto a la vertical; y (3) de un motor elevador en E que hace girar a la estructura de soporte $\mathcal{S}$ con respecto a $\mathcal{A}$.

a. Determinar el peso W del contrapeso $\mathcal{W}$.
b. Determinar las propiedades de inercia en el punto O del cuerpo $\mathcal{B}$ (considerado rígido) compuesto de $\mathcal{R} + \mathcal{W} + \mathcal{S}$.
c. Formular las ecuaciones del movimiento rotacional de $\mathcal{B}$.
d. Valores típicos de las velocidades y aceleraciones angulares para una antena como ésta son 30°/s y 30°/s² (o sea, respectivamente, $\pi/6$ rad/s y $\pi/6$ rad/s²). Determine los momentos que el pedestal debe ejercer respecto a los ejes x, y, z para producir una aceleración angular $\alpha = (\pi/6)\hat{\mathbf{i}}$ rad/s² cuando la velocidad angular es $\omega = (\pi/6)\hat{\mathbf{K}}$ rad/s, y la antena está en la posición mostrada en la figura.



Solución

Modelemos la antena de la siguiente manera. El reflector se tratará como un disco delgado, el contrapeso como una masa puntual y la estructura de soporte como rígida pero ligera. Los ejes (X, Y, Z) están fijos en el marco inercial $\mathcal{I}$ mientras que (x,y,z) están ligados a

$\mathcal{B}$. Las rotaciones del reflector consisten en un ángulo acimutal θ_A alrededor de Z y un ángulo de elevación* θ_E alrededor de x.

En la parte (a) el propósito del contrapeso es colocar el centro de masa de $\mathcal{B}$ sobre su eje de elevación. Entonces

$$1200(4) = W(2)$$

$$W = 2400 \text{ lb}$$

En la tabla siguiente se calculan las propiedades de inercia de $\mathcal{B}$ respecto al punto O.

	Reflector	+	Contrapeso	=	Total
I^O_{xx}	$= m\left(\frac{r^2}{4} + d^2\right)$	+	$\frac{2400}{32.2} d^2$		
	$= \frac{1200}{32.2}\left(\frac{6^2}{4} + 4^2\right)$	+	$\frac{2400}{32.2} 2^2$		
	$=$ 932	+	298	=	1230 slug · pie²
I^O_{yy}	$= m\frac{r^2}{2}$	+	md^2		
	$= \frac{1200}{32.2}\frac{6^2}{2}$	+	$\frac{2400}{32.2} 2.5^2$		
	$=$ 671	+	466	=	1140 slug · pie²
I^O_{zz}	$= m\left(\frac{r^2}{4} + d^2\right)$	+	md^2		
	$= \frac{1200}{32.2}\left(\frac{6^2}{4} + 4^2\right)$	+	$\frac{2400}{32.2}(2^2 + 2.5^2)$		
	$=$ 932	+	764	=	1700 slug · pie²
I^O_{xy}	$=$ 0*	+	$(-m\overline{xy})$		
	$=$ 0	+	$-\frac{2400}{32.2}(2.5)(2)$		
	$=$ 0	+	-373	=	-373 slug · pie²
I^O_{yz}	$=$ 0	+	$(-m\overline{yz})$		
	$=$ 0	+	$-\frac{2400}{32.2}(2)(0)$		
	$=$ 0	+	0	=	0
I^O_{xz}	$=$ 0	+	$(-m\overline{xz})$		
	$=$ 0	+	$-\frac{2400}{32.2}(2.5)(0)$		
	$=$ 0	+	0	=	0

*El eje y a través de 0 es un eje de simetría de $\mathcal{R}$ por lo que $I^O_{xy} = 0 = I^O_{yz}$; el tercer producto de inercia de $\mathcal{R}$, I^O_{xz}, desaparece puesto que zy es un plano de simetría del cuerpo $\mathcal{R}$.

Por lo tanto la *matriz de inercia* puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 1230 & -373 & 0 \\ -373 & 1140 & 0 \\ 0 & 0 & 1700 \end{bmatrix} \text{slug} \cdot \text{pie}^2 \qquad (1)$$

Una manera de proceder en la parte (c) es determinar los ejes y momentos principales de inercia a partir de esta matriz y luego usar las ecuaciones de Euler (7.42). Sin embargo, esto sería un procedimiento ineficaz. No sólo es tedioso localizar los ejes principales, sino que después tendríamos que descomponer la velocidad angular en sus componentes a lo largo de esas direcciones; luego se obtendrían componentes de momentos, no muy útiles, respecto a ejes inclinados con respecto a los ejes de rotación. Es mucho más sencillo usar la segunda de las leyes de Euler*:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_O$$

Los únicos precios que tendremos que pagar son (1) retener y tratar con el producto de inercia diferente de cero I^O_{xy} y (2) desplazar la derivada del marco $\mathcal{I}$ al $\mathcal{B}$. La cantidad de movimiento (o ímpetu) angular de $\mathcal{B}$ respecto a O es:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O = {} & (I^O_{xx}\omega_x + I^O_{xy}\omega_y + \cancelto{0}{I^O_{xz}}\omega_z)\hat{\mathbf{i}} \\ & + (I^O_{yx}\omega_x + I^O_{yy}\omega_y + \cancelto{0}{I^O_{yz}}\omega_z)\hat{\mathbf{j}} \\ & + (\cancelto{0}{I^O_{zx}}\omega_x + \cancelto{0}{I^O_{zy}}\omega_y + I^O_{zz}\omega_z)\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \qquad (2)$$

La velocidad angular de $\mathcal{B}$ en el marco $\mathcal{I}$ se obtiene con el teorema de la adición. El reflector y su estructura de soporte giran en elevación con la velocidad angular $\dot{\theta}_E\hat{\mathbf{i}}$ con respecto al brazo $\mathcal{A}$; igualmente, $\mathcal{A}$ gira acimutalmente con velocidad angular $\dot{\theta}_A\hat{\mathbf{K}}$ con respecto al pedestal (que está rígidamente fijo al marco de referencia $\mathcal{I}$). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} &= \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{A}/\mathcal{I}} \\ &= \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}\hat{\mathbf{i}} + \omega_{\mathcal{A}/\mathcal{I}}\hat{\mathbf{K}} \\ &= \dot{\theta}_E\hat{\mathbf{i}} + \dot{\theta}_A(\operatorname{sen}\theta_E\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta_E\hat{\mathbf{k}}) \end{aligned} \qquad (3)$$

Sustituyendo las componentes de ω en la Ec.(2) obtenemos la cantidad de movimiento angular de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{I}$, expresada en (en términos de sus componentes) $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O = {} & (I^O_{xx}\dot{\theta}_E + I^O_{xy}\dot{\theta}_A \operatorname{sen}\theta_E)\hat{\mathbf{i}} \\ & + (I^O_{xy}\dot{\theta}_E + I^O_{yy}\dot{\theta}_A \operatorname{sen}\theta_E)\hat{\mathbf{j}} + I^O_{zz}\dot{\theta}_A\cos\theta_E\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \qquad (4)$$

*Lo único que se requiere de O para que esta ecuación sea válida, es que sea un punto del marco de referencia inercial; sin embargo en lo que sigue necesita ser también un pivote de $\mathcal{B}$.

A continuación usamos la Ec.(6.20) para derivar $\mathbf{H}_o$ (nótese que el punto O está fijo en $\mathcal{B}$ e $\mathcal{I}$):

$$\Sigma \mathbf{M}_O = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_O = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_O + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_O \qquad (5)$$

Efectuando la derivación y el producto vectorial se obtienen las siguientes ecuaciones en componentes. (Adviértase que las propiedades de inercia no cambian en $\mathcal{B}$.)

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Ox} &= I^O_{xx}\ddot{\theta}_E + I^O_{xy}(\ddot{\theta}_A \operatorname{sen}\theta_E + \dot{\theta}_A\dot{\theta}_E\cos\theta_E) + \dot{\theta}_A\operatorname{sen}\theta_E(I^O_{zz}\dot{\theta}_A\cos\theta_E) \\ &\quad - \dot{\theta}_A\cos\theta_E(I^O_{xy}\dot{\theta}_E + I^O_{yy}\dot{\theta}_A\operatorname{sen}\theta_E) \\ &= I^O_{xx}\ddot{\theta}_E + I^O_{yy}(-\dot{\theta}_A^2\operatorname{sen}\theta_E\cos\theta_E) + I^O_{zz}(\dot{\theta}_A^2\operatorname{sen}\theta_E\cos\theta_E) \\ &\quad + I^O_{xy}(\ddot{\theta}_A\operatorname{sen}\theta_E) \end{aligned} \qquad (6a)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Oy} &= I^O_{xy}\ddot{\theta}_E + I^O_{yy}(\ddot{\theta}_A\operatorname{sen}\theta_E + \dot{\theta}_A\dot{\theta}_E\cos\theta_E) + \dot{\theta}_A\cos\theta_E(I^O_{xx}\dot{\theta}_E + I^O_{xy}\dot{\theta}_A\operatorname{sen}\theta_E) \\ &\quad - \dot{\theta}_E(I^O_{zz}\dot{\theta}_A\cos\theta_E) \end{aligned} \qquad (6b)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Oz} &= I^O_{zz}(\ddot{\theta}_A\cos\theta_E - \dot{\theta}_A\dot{\theta}_E\operatorname{sen}\theta_E) + \dot{\theta}_E(I^O_{xy}\dot{\theta}_E + I^O_{yy}\dot{\theta}_A\operatorname{sen}\theta_E) \\ &\quad - \dot{\theta}_A\operatorname{sen}\theta_E(I^O_{xx}\dot{\theta}_E + I^O_{xy}\dot{\theta}_A\operatorname{sen}\theta_E) \end{aligned} \qquad (6c)$$

Como una indicación de la dificultad creciente de los problemas dinámicos en tres dimensiones, cabe notar que las cuatro propiedades de inercia diferentes de cero participan en *cada componente* del momento externo que actúa sobre $\mathcal{B}$ en O.

En la posición indicada, $\theta_E = 45°$. Por lo tanto,

$$\Sigma M_{Ox} = I^O_{xx}\ddot{\theta}_E + I^O_{yy}\left(\frac{-\dot{\theta}_A^2}{2}\right) + I^O_{zz}\left(\frac{\dot{\theta}_A^2}{2}\right) + I^O_{xy}\left(\frac{\ddot{\theta}_A}{\sqrt{2}}\right) \qquad (7a)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Oy} &= I^O_{xx}\left(\frac{\dot{\theta}_A\dot{\theta}_E}{\sqrt{2}}\right) + I^O_{yy}\left(\frac{\ddot{\theta}_A + \dot{\theta}_A\dot{\theta}_E}{\sqrt{2}}\right) + I^O_{zz}\left(\frac{-\dot{\theta}_A\dot{\theta}_E}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + I^O_{xy}\left(\ddot{\theta}_E + \frac{\dot{\theta}_A^2}{2}\right) \end{aligned} \qquad (7b)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Oz} &= I^O_{xx}\left(\frac{-\dot{\theta}_A\dot{\theta}_E}{\sqrt{2}}\right) + I^O_{yy}\left(\frac{\dot{\theta}_A\dot{\theta}_E}{\sqrt{2}}\right) + I^O_{zz}\left(\frac{\ddot{\theta}_A - \dot{\theta}_A\dot{\theta}_E}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + I^O_{xy}\left(\dot{\theta}_E^2 - \frac{\dot{\theta}_A^2}{2}\right) \end{aligned} \qquad (7c)$$

En la parte (d), para el caso especificado, $\alpha = \ddot{\theta}_E\hat{\mathbf{i}}$ y $\ddot{\theta}_E = \pi/6$ cuando $\ddot{\theta}_A = 0$; también $\omega = \dot{\theta}_A\hat{\mathbf{K}}$ y $\dot{\theta}_A = \pi/6$ cuando $\dot{\theta}_E = 0$. Este caso corresponde físicamente a la antena a 45° girando alrededor de la vertical a 30°/s, y detectando repentinamente un objeto que viaja hacia el cenit; los controles activan un motor cuyo par de rotación (o torque) produce una aceleración angular que aumentará el ángulo de elevación de la antena. Las aceleraciones angulares son grandes debido a la necesidad de ubicar al objeto rápidamente.

Sustituyendo esos valores de $\dot{\theta}_E$, $\ddot{\theta}_E$, $\dot{\theta}_A$ y $\ddot{\theta}_A$ en las Ecs.(7) junto con los valores de inercia, obtenemos la respuesta:

$$\Sigma M_{Ox} = 1230\left(\frac{\pi}{6}\right) + (-1140 + 1700)\frac{(\pi/6)^2}{2} + (-373)(0)$$

$$= 721 \text{ lb·pie}$$

$$\Sigma M_{Oy} = 1230(0) + 1140(0) + 1700(0) + (-373)\left[\frac{\pi}{6} + \frac{(\pi/6)^2}{2}\right] \quad (8)$$

$$= -246 \text{ lb·pie}$$

$$\Sigma M_{Oz} = 1230(0) + 1140(0) + 1700(0) + (-373)\left(\frac{-(\pi/6)^2}{2}\right)$$

$$= 51 \text{ lb·pie}$$

Estos son los momentos ejercidos por $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{A}$, excluido el que se requiere para equilibrar el peso muerto de la antena. En el marco inercial de referencia, los momentos son

$$\Sigma M_{OX} = \Sigma M_{Ox} = 721 \text{ lb·pie}$$

$$\Sigma M_{OY} = \Sigma M_{Oy} \cos\theta_E + \Sigma M_{Oz}(-\text{sen}\,\theta_E) = -210 \text{ lb·pie} \quad (9)$$

$$\Sigma M_{OZ} = \Sigma M_{Oy} \text{sen}\,\theta_E + \Sigma M_{Oz}(\cos\theta_E) = -138 \text{ lb·pie}$$

En el caso opuesto, cuando la antena está rastreando en elevación, digamos $\dot{\theta}_E = \pi/6$ rad/s, y recibe repentinamente una orden que resulta en $\ddot{\theta}_A = \pi/6$ rad/s² en $\theta_E = 45°$, las componentes de momento son ($\ddot{\theta}_E = 0 = \dot{\theta}_A$):

$$\Sigma M_{Ox} = 0 + 0 + 0 + (-373)\frac{\pi}{6}\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -138 \text{ lb·pie}$$

$$\Sigma M_{Oy} = 0 + 1140\left(\frac{\pi/6 + 0}{\sqrt{2}}\right) + 0 + 0 \quad (10)$$

$$= 422 \text{ lb·pie}$$

$$\Sigma M_{Oz} = 0 + 0 + 1700\left(\frac{\pi/6 - 0}{\sqrt{2}}\right) + (-373)\left[\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - 0\right]$$

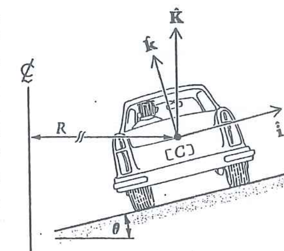
$$= 629 - 102 = 527 \text{ lb·pie}$$

Nuevamente vemos el efecto considerable de los productos de inercia.

Los negativos de las componentes X, Y, Z, flexionan flexionan y tuerce el último pedestal, y son parámetros de diseño; momentos mucho más grandes e importantes surgen por el empuje de viento sobre el "plato" y por la gravedad. Existen también fuerzas ejercidas sobre $\mathcal{A}$ en O debido a la gravedad y a la aceleración del centro de masa.

Ejemplo 7.12

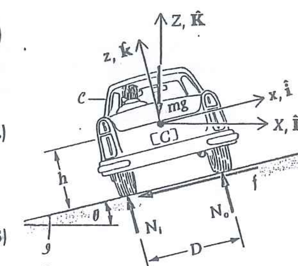
Un auto viaja sobre una curva peraltada con rapidez constante V_c (ver el diagrama). Determinar las fuerzas de fricción y normal que actúan sobre las llantas en función de la rapidez V_c, del ángulo de peralte θ, del radio R de la curva y de los momentos de inercia I_1 e I_3 respecto a ejes centroidales paralelos a $\hat{\mathbf{i}}$ y a $\hat{\mathbf{k}}$, según la figura. Se desprecia la inercia de rodamiento de las ruedas. Adviértase la diferencia en las fuerzas que actúan en las llantas internas y externas (respecto a la curva) comparadas con el caso de una vía plana recta ($\theta = 0$, $R \to \infty$) en cuyo caso las fuerzas son aproximadamente iguales.



Solución

El ímpetu angular del auto con respecto a su centro de masa C (ver el diagrama) se puede expresar, usando ejes principales, como

$$\mathbf{H}_C = I_1\omega_x\hat{\mathbf{i}} + I_3\omega_z\hat{\mathbf{k}} \quad (1)$$



en donde el vector velocidad angular del auto $\mathcal{C}$ es

$$\omega_{\mathcal{C}/\mathcal{I}} = \frac{v_C}{R}\hat{\mathbf{K}} = \frac{v_C}{R}(\text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{k}}) \quad (2)$$

de modo que

$$\omega_x = \frac{v_C}{R}\text{sen}\,\theta \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \frac{v_C}{R}\cos\theta \quad (3)$$

Usando la Ec.(7.2) y desplazando la derivada (Ec. 6.20) de $\mathcal{I}$ a $\mathcal{C}$ (en donde hemos expresado $\mathbf{H}_c$) se obtiene

$$\Sigma\mathbf{M}_C = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_C = \overset{0}{{}^{\mathcal{C}}\dot{\mathbf{H}}_C} + \omega_{\mathcal{C}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C \quad (4)$$

Sustituyendo las componentes de velocidad angular y usando el diagrama de cuerpo libre para calcular el vector momento*, obtenemos

$$2(N_i - N_o)\frac{D}{2}\hat{\mathbf{j}} + 2fh\hat{\mathbf{j}} = \left(\frac{v_C}{R}\right)^2(\text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{k}}) \times (I_1\,\text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{i}} + I_3\cos\theta\hat{\mathbf{k}}) \quad (5)$$

que se reduce a la ecuación escalar

$$(N_i - N_o)D + 2fh = -\left(\frac{v_C}{R}\right)^2(I_3 - I_1)\text{sen}\,\theta\cos\theta \quad (6)$$

Para completar la solución usamos el movimiento simple conocido de C en la ecuación para el movimiento del centro de masa:

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C = m\frac{v_C^2}{R}(-\hat{\mathbf{I}}) \quad (7)$$

$$= m\frac{v_C^2}{R}(-\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\,\theta\hat{\mathbf{k}})$$

*N_i (y N_o) es la fuerza compresiva debajo de *cada* llanta interior (y exterior); f es la fuerza de fricción resultante dirigida hacia el interior debajo de *cada* pareja de llantas delanteras y traseras.

Expresando las fuerzas en forma vectorial y sustituyendo obtenemos:

$$\hat{\mathbf{i}}(-2f - mg \operatorname{sen}\theta) + \hat{\mathbf{k}}(2N_i + 2N_o - mg\cos\theta) = m\frac{v_C^2}{R}(-\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{k}}) \tag{8}$$

Las ecuaciones de componentes escalares para la Ec.(8) se resuelven fácilmente:

$$f = \frac{mv_C^2}{2R}\cos\theta - \frac{mg\operatorname{sen}\theta}{2} \tag{9}$$

$$N_i + N_o = \frac{mv_C^2}{2R}\operatorname{sen}\theta + \frac{mg}{2}\cos\theta \tag{10}$$

Nótese que la fricción resultante así como la suma de las fuerzas normales contribuyen a la aceleración del centro de masa; aún más, cada una ayuda a sostener el peso.

Si ahora sustituimos f de la Ec.(9) en la (6) y luego resolvemos las Ecs.(6) y (10) para evaluar las fuerzas normales N_i y N_o, obtenemos:

$$N_i = \frac{-v_C^2}{2DR^2}(I_3 - I_1)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{mg}{4}\left(\cos\theta + \frac{2h}{D}\operatorname{sen}\theta\right) + \frac{mv_C^2}{4R}\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{2h}{D}\cos\theta\right) \tag{11}$$

$$N_o = \frac{v_C^2}{2DR^2}(I_3 - I_1)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{mg}{4}\left(\cos\theta - \frac{2h}{D}\operatorname{sen}\theta\right) + \frac{mv_C^2}{4R}\left(\operatorname{sen}\theta + \frac{2h}{D}\cos\theta\right) \tag{12}$$

Nótese que si la trayectoria del auto es recta, los límites de f, N_o y N_i cuando $R \to \infty$ dan

$$f = \frac{-mg\operatorname{sen}\theta}{2}$$

$$N_o = \frac{mg}{4}\left(\cos\theta - \frac{2h}{D}\operatorname{sen}\theta\right) \tag{13}$$

$$N_i = \frac{mg}{4}\left(\cos\theta + \frac{2h}{D}\operatorname{sen}\theta\right)$$

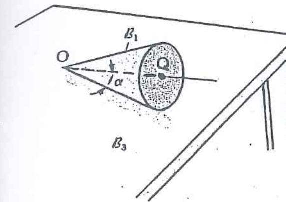
En este caso el auto viaja en línea recta con velocidad constante. El lector debe verificar que éste es el caso mostrando que $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0} = \Sigma\mathbf{M}_O$ con los resultados precedentes. Nótese también que $N_i - N_o = (mgh/D)\operatorname{sen}\theta$ y que las ruedas interiores toman más fuerza en este caso.

Volviendo al caso general, cabe notar que la diferencia entre una fuerza normal interior y una exterior es

$$N_i - N_o = \frac{-v_C^2}{DR^2}(I_3 - I_1)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{mgh}{D}\operatorname{sen}\theta - \frac{mv_C^2h}{RD}\cos\theta \tag{14}$$

El término intermedio es el término "estático" examinado antes. Los otros dos son causados por la trayectoria curva. Nótese que estos dos términos, al ser negativos, tienden a hacer a N_o mayor que N_i, pues la curvatura de la trayectoria causa un incremento en las fuerzas que actúan sobre las llantas exteriores (ya que "el peso se desplaza hacia afuera").

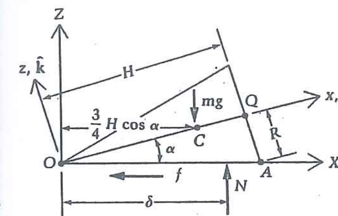
Ejemplo 7.13



Es posible que el cono homogéneo $\mathcal{B}_1$ de radio R en la base (ver la figura) ruede continuamente sobre una mesa horizontal $\mathcal{B}_3$ de manera que su vértice O permanezca fijo y el punto central Q de su base viaje sobre un círculo horizontal con velocidad constante. Imaginemos que tal movimiento es generado por fuerzas que son luego retiradas. Supóngase que hay suficiente fricción entre el cono y la mesa para impedir el resbalamiento; además de esto, hay otra condición especial que debe satisfacerse para que el movimiento ocurra. Determinar las fuerzas resultantes de fricción y normal, sus líneas de acción y la condición especial. Ver el Ejemplo 6.11 con respecto a ciertas relaciones cinemáticas.

Solución

Como el centro de masa C se mueve sobre un círculo horizontal con velocidad constante $\frac{3}{4}v_Q$ (ver la figura), la fuerza de fricción f está dada por



$$\overset{+}{\leftarrow} \qquad \Sigma F_X = ma_{CX} = \frac{m\dot{s}_C^2}{\rho_C}$$

o bien

$$f = \frac{m\left(\frac{3}{4}v_Q\right)^2}{\left(\frac{3}{4}H\cos\alpha\right)} = \frac{3}{4}\frac{mv_Q^2\operatorname{sen}\alpha}{R\cos^2\alpha}$$

ya que $H = R/\tan\alpha$. La fuerza normal H es simplemente mg ya que $a_{cZ} = 0$. No hay componente de la fuerza de fricción que sea ortogonal al plano de la página ya que c_{cy} también desaparece. La línea de acción se anula de f es como se muestra, a lo largo de AO. Para la línea de acción de N usamos la ecuación de momentos del movimiento; nótese que $\mathcal{B}_3$ es el marco inercial:

$$\Sigma\mathbf{M}_O = {}^{\mathcal{B}_3}\dot{\mathbf{H}}_O = {}^{\mathcal{B}_2}\dot{\mathbf{H}}_O + \boldsymbol{\omega}_{2/3} \times \mathbf{H}_O$$

en donde el marco $\mathcal{B}_2$ contiene al eje Z y al eje del cono. Ahora el ímpetu angular $\mathbf{H}_o$ es, considerando que $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ se encuentran sobre las direcciones principales en el punto fijo O:

$$\mathbf{H}_O = J\omega_x\hat{\mathbf{i}} + I\omega_y\hat{\mathbf{j}} + I\omega_z\hat{\mathbf{k}}$$

En esta ecuación, las componentes de ω- son las del cuerpo $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_3$. De los ejemplos anteriores, $\omega_y = 0$ y sustituyendo los valores de ω_x, ω_z, e I obtenemos

$$\mathbf{H}_O = \frac{mR^2 v_Q}{R}\left[\frac{-3\hat{\mathbf{i}}}{10} + \left(\frac{3}{20} + \frac{3H^2}{5R^2}\right)\tan\alpha\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$= \frac{3mR^2 v_Q}{20R}\left[-2\hat{\mathbf{i}} + (1 + 4/\tan^2\alpha)\tan\alpha\hat{\mathbf{k}}\right]$$

Notando que ${}^{\mathcal{B}_2}\dot{\mathbf{H}}_O = 0$, encontramos

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \frac{v_Q \operatorname{sen}\alpha}{R\cos^2\alpha}\,\frac{3mR^2 v_Q}{20R}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \\ -2 & 0 & \left(1 + \dfrac{4}{\tan^2\alpha}\right)\tan\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3mv_Q^2 \operatorname{sen}\alpha}{20\cos^3\alpha}(1 + 5\cos^2\alpha)(-\hat{\mathbf{j}})$$

y del diagrama de cuerpo libre, usando $N = mg$,

$$-mg\,\delta + mg\frac{3R\cos\alpha}{4\tan\alpha} = \frac{-3mv_Q^2 \operatorname{sen}\alpha}{20\cos^3\alpha}(1 + 5\cos^2\alpha)$$

o bien

$$\delta = \frac{3R\cos\alpha}{4\tan\alpha} + \frac{3v_Q^2\operatorname{sen}\alpha}{20g\cos^3\alpha}(1 + 5\cos^2\alpha)$$

que da la línea de acción de la fuerza normal resultante.

La "condición especial" mencionada antes es que la fuerza normal debe perforar el plano en un punto de contacto físico con el cono, o sea

$$\delta \le R/\operatorname{sen}\alpha$$

Por lo tanto,

$$\frac{3R\cos^2\alpha}{4\operatorname{sen}\alpha} + \frac{3v_Q^2\operatorname{sen}\alpha}{20g\cos^3\alpha}(1 + 5\cos^2\alpha) \le \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}$$

que al simplificar queda

$$3\frac{v_Q^2}{gR}\operatorname{sen}^2\alpha(1 + 5\cos^2\alpha) \le 5\cos^3\alpha(4 - 3\cos^2\alpha)$$

Manteniendo α constante vemos que lo que pasa si v_Q es muy grande (o bien g o R muy pequeños) es que la fuerza normal necesita actuar más allá del punto A. Como esto no puede ocurrir físicamente, el movimiento especificado no se presentará, pero dará lugar a otro de inclinación hacia el exterior.

Volvemos ahora al problema del giróscopo cuya orientación analizamos en la Sección 6.8. Primero se obtendrán las ecuaciones del movimiento rotacional de un giróscopo $\mathcal{G}$.* Comenzamos expresando su velocidad angular $\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{I}}$ en el marco $\mathcal{I}_2$ (tercera llave en el Ejemplo 6.14):

$$\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{I}} = -\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{i}}_2 + \dot{\theta}\hat{\mathbf{j}}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{\mathbf{k}}_2 \qquad (7.44)$$

Los ejes (x_2, y_2, z_2) del soporte cardánico interior (véanse las figuras de la Sección 6.8) no están fijos en $\mathcal{G}$ debido a la giración $\dot{\psi}$, pero son, sin embargo, *permanentemente principales*. Este hecho importante permite expresar la cantidad de movimiento angular del giróscopo en el marco como $\mathcal{I}_2$

$$\mathbf{H}_C = -I\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{i}}_2 + I\dot{\theta}\hat{\mathbf{j}}_2 + J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\hat{\mathbf{k}}_2 \qquad (7.45)$$

La segunda ley de Euler junto con la propiedad (6.20) del vector velocidad angular da las ecuaciones de movimiento del giróscopo, como sigue:

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{M}_C &= {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_C = {}^{\mathcal{I}_2}\dot{\mathbf{H}}_C + \omega_{\mathcal{I}_2/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C \\ &\doteq [-I(\ddot{\phi}\operatorname{sen}\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta) + \dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta(J - I) + \dot{\theta}\dot{\psi}J]\hat{\mathbf{i}}_2 \\ &\quad + [I\ddot{\theta} + (J - I)\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + J\dot{\phi}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta]\hat{\mathbf{j}}_2 \\ &\quad + \left[J\frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\right]\hat{\mathbf{k}}_2\end{aligned} \qquad (7.46)$$

En los cálculos precedentes hemos usado el teorema de la adición para tomar en cuenta lo siguiente:

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{I}} &= \omega_{\mathcal{G}/\mathcal{I}_2} + \omega_{\mathcal{I}_2/\mathcal{I}} \\ &= \dot{\psi}\hat{\mathbf{k}}_2 + \omega_{\mathcal{I}_2/\mathcal{I}}\end{aligned} \qquad (7.47)$$

de modo que $\omega_{\mathcal{I}_2/\mathcal{I}}$ es el mismo vector que en la Ec.(7.44) si se omite $\dot{\psi}$. Las ecuaciones de movimiento de $\mathcal{G}$ son, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Sigma M_{Cx_2} &= -I(\ddot{\phi}\operatorname{sen}\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta) + J\dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \\ \Sigma M_{Cy_2} &= I(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + J\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \\ \Sigma M_{Cz} &= J\frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = J\frac{d\omega_z}{dt}\end{aligned} \qquad (7.48)$$

en donde ω_z es la componente de $\omega_{\mathcal{G}/\mathcal{I}}$ respecto al eje de giración de simetría del giróscopo. Nótese que está formado de parte de la velocidad de precesión así como de la velocidad rotación total.

Las ecuaciones del giróscopo son no lineales e incluyen no sólo productos de las derivadas de los ángulos, sino también funciones trigonométricas de ellas. Su solución general es un problema aún no resuelto; sin embargo, hay dos soluciones dignas de estudio. La primera de esas es la precesión continua; la segunda es el movimiento libre de momento. Veremos cada una de ellas.

*Estamos considerando que $\mathcal{G}$ es el rotor, supuesto muy pesado respecto a los balancines exteriores e interiores, cuyas masas entonces despreciamos. También se supone que $\mathcal{G}$ es simétrico respecto a su eje. Por supuesto, un giróscopo no tiene que poseer *ningún* balancín; la Tierra es un giróscopo de gran masa, como se verá en el ejemplo siguiente.

La **precesión continua** se define por el ángulo θ de nutación, la rapidez de precesión $\dot{\phi}$ y la rapidez de giración $\dot{\psi}$; cada una de estas es constante durante todo el movimiento. Llamemos a esas constantes θ_0, $\dot{\phi}_0$ y $\dot{\psi}_0$ y sustituyámoslas en la Ec.(7.48) para obtener:

$$\Sigma M_{Cx_2} = 0$$

$$\Sigma M_{Cy_2} = -I\dot{\phi}_0^2 \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0 + J\dot{\phi}_0 \operatorname{sen} \theta_0(\dot{\psi}_0 + \dot{\phi}_0 \cos \theta_0) \tag{7.49}$$

$$\Sigma M_{Cz} = 0$$

Vemos que sólo es necesario un momento respecto al eje y_2 para mantener la precesión continua. $\Sigma M_{Cz} = 0 = J(d\omega_z/dt)$ significa que ω_z es una constante*.

En el caso en que $\theta = 90°$, los ejes de giración y de precesión son ortogonales; este caso se muestra en la Fig. 7.8. Si el giróscopo está en movimiento y se aplica un par, ocurrirá simultáneamente una precesión que tiende a girar el vector de giración hacia el vector momento. Esto se llama a veces la *ley de precesión giroscópica*. El momento en este caso es, según la Ec.(7.49),

$$\Sigma M_{Cy_2} = J\dot{\psi}_0\dot{\phi}_0 \tag{7.50}$$

y se ve que es el producto del ímpetu angular $J\dot{\psi}_0$ y la velocidad angular de precesión $\dot{\phi}_0$.

Volvemos ahora a una ilustración de la ley de la precesión giroscópica. Hemos visto que cuando a un cuerpo en rotación libre se le aplica un momento respecto a un eje normal al eje de rotación, el cuerpo precesiona respecto a un tercer eje que forma una tríada ortogonal con los vectores de giración y momento. El sentido de la precesión es tal que gira al vector giración hacia el vector momento. Esta ley de precesión giroscópica es responsable de la precesión lunisolar de los equinoccios.

¿Qué es la precesión lunisolar? Debido a los miles de millones de años de acción gravitacional por parte del Sol y de la Luna, la Tierra está ligeramente abombada en vez de ser esférica. De hecho, es aproximadamente 27 millas más corta a través de los polos que a través del ecuador. Este abombamiento, junto con el hecho de que su eje está inclinado $23\frac{1}{2}°$ respecto a la eclíptica, causa que el Sol (y la Luna) ejerza un momento sobre la Tierra además de la acción gravitatoria, como se muestra en la Fig. 7.9

Es claro entonces que vivimos sobre la superficie de un giróscopo en movimiento sobre el que actúa constantemente un momento externo, generándose por ello una precesión. Este

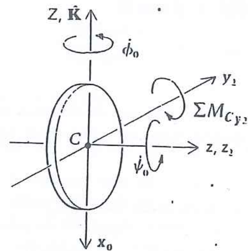


Figura 7.8

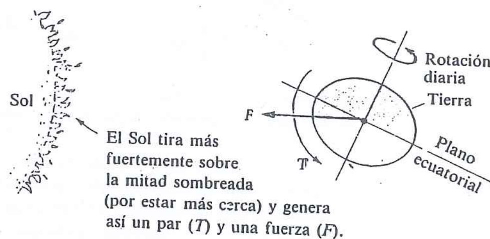


Figura 7.9

*Nótese que z_2 y z son el mismo eje.

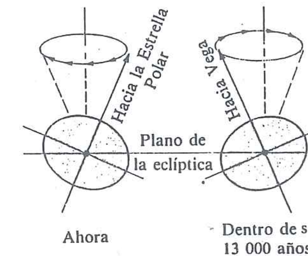


Figura 7.10

efecto, mostrado en la Fig. 7.10, inclina el eje de rotación de la Tierra fuera del plano del papel hacia el vector momento*. Lo anterior ocasiona un movimiento antihorario, sobre la esfera celeste del polo celeste hacia el cual está dirigido el eje de rotación propia de la Tierra. (Tal punto se encuentra actualmente cerca de la Estrella Polar). El período de esta rotación es de aproximadamente 26 000 años; la influencia de la Luna en esta precesión es 2.2 veces mayor que la del Sol por encontrarse mucho más cerca de nuestro planeta.

Consideraremos ahora el otro ejemplo de una solución a las ecuaciones giroscópicas: el caso del *movimiento libre de momento*. "Libre de momento" significa que $\Sigma \mathbf{M}_C$ se anula y que $\mathbf{H}_c$ es una constante. Esto se infiere de la segunda ley de Euler:

$$\Sigma \mathbf{M}_C = \mathbf{0} = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_C \Rightarrow \mathbf{H}_C = \text{vector constante en el marco inercial } \mathcal{I} .$$

Haremos coincidir la dirección del eje Z (Fig. 7.11), que es arbitraria, con la dirección constante de $\mathbf{H}_c$. Entonces Z será el eje de precesión del movimiento y los ejes (x_2, y_2, z_2) quedan dirigidos como se muestra en la Fig. 7.11. Se ve que como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_C &= H_{Cx_2}\hat{\mathbf{i}}_2 + H_{Cy_2}\hat{\mathbf{j}}_2 + H_{Cz_2}\hat{\mathbf{k}}_2 = \text{constante} \\ &= -I\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta\hat{\mathbf{i}}_2 + I\dot{\theta}\hat{\mathbf{j}}_2 + J(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\hat{\mathbf{k}}_2 \end{aligned} \tag{7.51}$$

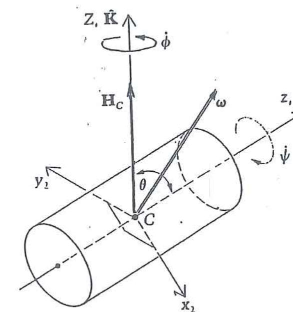


Figura 7.11

*El eje de rotación axial de la Tierra está alineado con su vector velocidad angular ω. El polo norte es el punto donde el vector ω, colocado en C, corta a la superficie de la Tierra. El polo norte se mueve alrededor del polo geométrico (sobre el eje de simetría) con el paso del tiempo; en este siglo ambos polos han permanecido separados entre sí unos cuantos pies.

y como $\mathbf{H}_c$ siempre se encuentra en el plano x_2z_2, entonces Hc_{y2} debe anularse:

$$H_{C_{y_2}} = 0 = I\dot{\theta} \Rightarrow \theta = \text{constante} \qquad (7.52)$$

Nótese que ω se encuentra en el plano x_2z_2 junto con $\mathbf{H}_c$ ya que su componente en y_2, $\dot{\theta}$, desaparece. Vemos además que

$$H_{C_{x_2}} = -I\dot{\phi}\ \text{sen}\ \theta \quad \text{y} \quad H_{C_{z_2}} = J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$$
$$= I\omega_{x_2}{}^{*} \qquad\qquad = J\omega_{z_2} \qquad (7.53)$$

Pero también, como podemos ver en la Fig. 7.11,

$$H_{C_{x_2}} = -H_C\ \text{sen}\ \theta \quad \text{y} \quad H_{C_{z_2}} = H_C \cos\theta \qquad (7.54)$$

Por tanto, igualando la primera de las Ecs.(7.53) y (7.54) en H_{cx2}, obtenemos

$$\omega_{x_2} = \frac{-H_C\ \text{sen}\ \theta}{I} = \text{constante} \quad (\text{Ya que } H_C,\ \theta,\ \text{e } I \text{ son constantes}) \qquad (7.55)$$

$$= -\dot{\phi}\ \text{sen}\ \theta \qquad (7.56)$$

y vemos que

$$\dot{\phi} = \frac{H_C}{I} \quad \text{(constante)} \qquad (7.57)$$

Similarmente, igualando los dos valores precedentes de H_{cz2} se obtiene

$$\omega_{z_2} = \frac{H_C \cos\theta}{J} = \text{constante} \qquad (7.58)$$

$$= \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta \qquad (7.59)$$

de manera que

$$\dot{\psi} = \frac{H_C\cos\theta}{J} - \left(\frac{H_C}{I}\right)\cos\theta = H_C\cos\theta\left(\frac{I-J}{IJ}\right) = \text{constante} \qquad (7.60)$$

Por lo tanto todas las condiciones se satisfacen para que el cuerpo libre de momento esté en un estado de precesión continua respecto al eje z fijo en $\mathcal{I}$.

Dividiendo la Ec.(7.55) entre la (7.58) conduce a

$$\frac{\omega_{x2}}{\omega_{z2}} = -\frac{J}{I}\tan\theta \qquad (7.61)$$

y la Fig. 7.12 muestra que

$$\frac{-\omega_{x2}}{\omega_{z2}} = \tan\beta \qquad (7.62)$$

en donde β es el ángulo entre z_2 y ω. Entonces

$$\tan\beta = \frac{J}{I}\tan\theta$$

*Nótese nuevamente que los ejes (x_2, y_2, z_2) son permanentemente principales, aún cuando x_2 y y_2 no están fijos en el cuerpo, y esto permite expresar $\mathbf{H}_C$ en términos de los valores $I\omega$ asociados a esos ejes.

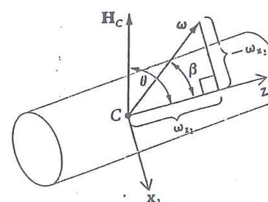


Figura 7.12

y vemos que la respuesta a si β es mayor o menor que θ depende de la relación J/I. Si $J < I$, como en la forma alargada de la Fig. 7.12, entonces $\beta < \theta$ y el vector velocidad angular se encuentra entre $\mathbf{H}_c$ y z_2 formando un ángulo constante con cada uno de ellos. Se pueden imaginar dos conos, uno fijo al cuerpo y el otro en el espacio ($\mathcal{I}$). El cono del cuerpo rueda sobre el cono fijo en el espacio sumándose vectorialmente su giración y precesión dando el vector ω que cambia sólo en dirección.

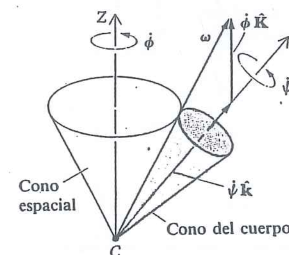


Figura 7.13

Esta precesión (Fig. 7.13) se llama *directa* porque $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ tienen el mismo sentido antihorario cuando se observan desde el vector ω fuera de los conos. Sin embargo, si $J > I$, entonces $\beta > \theta$ y ω se encuentra *fuera* del ángulo ZC_z. Esta situación es más difícil de representar, pero también es muy importante. Esta vez el cono del cuerpo rueda en *exterior* del cono fijo en el espacio (Fig. 7.14) y las dos rotaciones $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ tienen sentidos opuestos. Esta precesión se llama *retrógrada*.

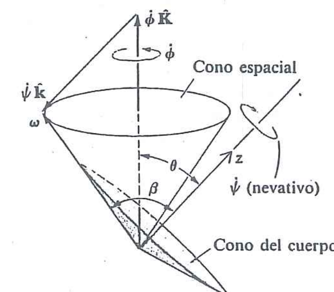
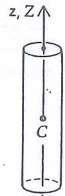


Figura 7.14

Una observación final sobre la teoría del cuerpo libre de momento: si el valor constante de θ es 0 o 90°, *no* hay precesión y el giróscopo estará en un estado de rotación pura (movimiento plano):

$\theta = 0$:

Aquí $z = Z$ de modo que $\omega_{x_2} = 0$ y $\omega_{z_2} = H_C/I$. Si $\theta = 0°$, el cuerpo gira simplemente alrededor de su eje. En este caso, $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ no pueden distinguirse una de la otra.



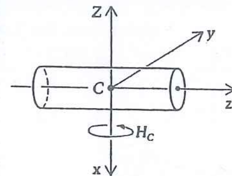
$\theta = 90°$:

Aquí, $\omega_{x_2} = -H_C/I$ and $\omega_{z_2} = 0$. Entonces:

$$\dot{\phi} = \frac{H_C}{I}$$

$$\dot{\psi} = 0$$

Si $\theta = 90°$, el cuerpo gira respecto a un eje transversal sin precesion.



Pregunta 7.8 ¿Por qué no podemos usar las Ecs.(7.57) y (7.60) para obtener $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ en este caso?

Se requiere una gran cantidad de términos para describir el complejo movimiento de la Tierra. Hemos visto un ejemplo de esto en la precesión lunisolar causada por el momento gravitacional ejercido sobre la Tierra por el Sol y la Luna. Este movimiento es análogo a una solución particular de ecuación diferencial, la cual se presenta siempre que la ecuación tiene un segundo miembro diferente de cero. La solución complementaria u homogénea corresponde a la parte de la solución del movimiento rotacional de la Tierra libre de momentos. Esta parte, llamada *precesión libre* de la Tierra es, de hecho, retrógrada. Tanto el cono del cuerpo como el espacial son muy delgados porque los ejes de ω, $\mathbf{H}_c$ y z están muy cercanos entre sí; cada uno se encuentra aproximadamente a $23\frac{1}{2}°$ de la normal al plano de la eclíptica.

Tal como se hizo en el Capítulo 5 para el caso del movimiento plano, podríamos aplicar aquí los principios de impulso y cantidad de movimiento así como los de impulso y angular y cantidad de movimiento angular al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$. Sin embargo, como vimos en la Sección 5.3, esas aplicaciones no son más que meras integraciones respecto al tiempo de las ecuaciones de movimiento.

Hay un tipo de problema en el que esos dos principios proporcionan un medio de solución; tales problemas son los que implican al impacto. Algunos aspectos tridimensionales son suficientemente diferentes al caso plano para justificar un ejemplo; pero primero usaremos las integrales de las leyes de Euler para deducir las relaciones necesarias:

$$\int_{t_i}^{t_f} \Sigma\mathbf{F}\,dt = \mathbf{L}_f - \mathbf{L}_i \tag{7.63}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \Sigma\mathbf{M}_C\,dt = \mathbf{H}_{C_f} - \mathbf{H}_{C_i} \tag{7.64}$$

Una alternativa a la ecuación rotacional (6.64) es integrar la igualmente ecuación general

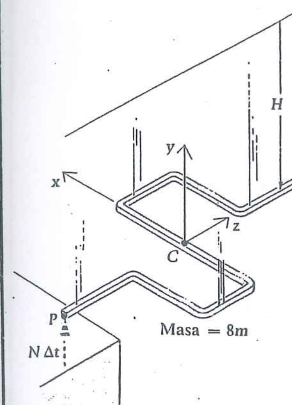
$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{7.65}$$

en donde O es ahora un punto fijo del marco inercial $\mathcal{I}$:

$$\int_{t_i}^{t_f} \Sigma\mathbf{M}_O\,dt = \mathbf{H}_{O_f} - \mathbf{H}_{O_i} = (\mathbf{H}_{C_f} - \mathbf{H}_{C_i}) + (\mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{v}_C)\Big|_i^f \tag{7.66}$$

Para usar la Ec.(7.64) o la (7.66) en una situación de impacto, usamos la Ec.(7.11) para la cantidad de movimiento angular del cuerpo *antes de que comience la deformación* (en t_i) y nuevamente *después de que termina* (en t_f). El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

Ejemplo 7.14



La barra doblada $\mathcal{B}$ del Ejemplo 4.13 se deja caer desde una altura H y golpea una superficie lisa rígida con uno de sus extremos, como se muestra en el diagrama. Si el coeficiente de restitución es e, obtener la velocidad angular de $\mathcal{B}$, así como la velocidad de $\mathcal{B}$, justamente después de la colisión.

Solución

Usando la ecuación de componentes y de (7.63) resulta

$$N\,\Delta t = 8m\dot{y}_{C_f} - 8m(-\sqrt{2gH}) \tag{1}$$

en donde el impulso de la fuerza de gravedad se desprecia por ser pequeño en comparación con la fuerza impulsiva hacia arriba ejercida por la superficie en el corto intervalo de tiempo Δt.

Formulamos ahora las ecuaciones de componentes de (7.64); se necesitan primero las propiedades de inercia del cuerpo que resultan ser:

$$I_{xx}^C = \frac{22}{3}m\ell^2 \qquad I_{xy}^C = 0$$
$$I_{yy}^C = \frac{32}{3}m\ell^2 \qquad I_{yz}^C = 0 \tag{2}$$
$$I_{zz}^C = \frac{10}{3}m\ell^2 \qquad I_{zx}^C = -2m\ell^2$$

De la Ec.(7.64) obtenemos entonces:

$$2\ell N\,\Delta t\hat{\mathbf{i}} = m\ell^2\left[\frac{22}{3}\omega_x + 0\omega_y - 2\omega_z\right]\hat{\mathbf{i}}$$
$$+ m\ell^2\left[0\omega_x + \frac{32}{3}\omega_y + 0\omega_z\right]\hat{\mathbf{j}} \tag{3}$$
$$+ m\ell^2\left[-2\omega_x + 0\omega_y + \frac{10}{3}\omega_z\right]\hat{\mathbf{k}}$$

en donde las componentes de la velocidad angular inicial desaparecen y las componentes finales deseadas son (ω_x, ω_y, ω_z). Las ecuaciones en componentes de (3) son:

$$\frac{22}{3}\omega_x - 2\omega_z = \frac{+2N\,\Delta t}{m\ell} \tag{4}$$

$$\frac{32}{3}\omega_y = 0 \tag{5}$$

$$-2\omega_x + \frac{10}{3}\omega_z = 0 \tag{6}$$

Tenemos hasta ahora cuatro ecuaciones en las cinco incógnitas $\dot{y}_c$, ω_x, ω_y, ω_z y el impulso $N\,\Delta t$. Obtenemos una quinta ecuación a partir de la definición del coeficiente de restitución junto con la relación de velocidad de cuerpo rígido entre P y C:

$$e = \frac{\dot{y}_{P_f} - 0}{0 - (-\sqrt{2gH})} \Rightarrow \dot{y}_{P_f} = \sqrt{2gH}\,e \tag{7}$$

y

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_P + \omega \times \mathbf{r}_{PC} \quad (\mathbf{r}_{PC} = 2\ell\hat{\mathbf{k}}) \tag{8}$$

que tiene la ecuación en componente y :

$$\dot{y}_{C_f} = \dot{y}_{P_f} - 2\ell\omega_x \tag{9}$$

Usando la Ec.(7) obtenemos:

$$\dot{y}_{C_f} = \sqrt{2gH}\,e - 2\ell\omega_x \tag{10}$$

La solución de las cinco ecuaciones (1,4,5,6.10) es:

$$\omega_x = \frac{60(1+e)\sqrt{2gH}}{143\ell} \qquad \dot{y}_{C_f} = \frac{(23e - 120)\sqrt{2gH}}{143}$$
$$\omega_y = 0 \tag{11}$$
$$\omega_z = \frac{36(1+e)\sqrt{2gH}}{143\ell} \qquad N\,\Delta t = \frac{184m(1+e)\sqrt{2gH}}{143}$$

Volviendo a la Ec.(8), encontramos que las componentes X y Z de $\mathbf{v}_{C_f}$ se anulan:

$$\text{componentes } x \Rightarrow \dot{x}_{C_f} = 0 + 2\omega_y\ell = 0$$
$$\text{componentes } z \Rightarrow \dot{z}_{C_f} = 0 + 0 = 0 \tag{12}$$

Los resultados de las Ecs.(12) son obvios, ya que si no hay fricción en el punto de contacto no puede haber fuerzas impulsivas en el plano horizontal para cambiar la cantidad de movimiento (partiendo de cero) en las direcciones x o z .

Se ve que el único producto de inercia diferente de cero causa un acoplamiento entre ω_x y ω_z [Ecs. (4) y (6)] que impide que ω_z desaparezca, aunque la única componente de momento respecto a C sea alrededor del eje x .

Veremos ahora otro ejemplo sobre las ventajas de la Ec.(7.66) que puede usarse para eliminar fuerzas indeseables de las ecuaciones de momento, tal como lo hicimos en el estudio de estática.

Ejemplo 7.15

Resolver de nuevo el ejemplo anterior usando la Ec.(7.66) en vez de las ecuaciones en componentes (7.63) y (7.64). Hallar el valor de ω después del impacto.

Solución

La Ec. (7.66) permite eliminar el impulso $N\ \Delta t$ sumando momentos respecto al punto (P) de impacto:

$$\int_{t_i}^{t_f} \Sigma \mathbf{M}_P\, dt = 0 = (\mathbf{H}_{C_f} - \overset{0}{\cancel{\mathbf{H}_{C_i}}}) + (\mathbf{r}_{PC} \times m\mathbf{v}_C)\Big|_i^f$$

$$= \left[\left(\frac{22}{3}\omega_x - 2\omega_z\right)m\ell^2\hat{\mathbf{i}} + \frac{32}{3}\omega_y m\ell^2\hat{\mathbf{j}} + \left(-2\omega_x + \frac{10}{3}\omega_z\right)m\ell^2\hat{\mathbf{k}}\right]$$
$$+ 2\ell\hat{\mathbf{k}} \times [8m\dot{y}_{C_f}\hat{\mathbf{j}} - 8m\sqrt{2gH}(-\hat{\mathbf{j}})]$$

Tenemos aún que relacionar $\mathbf{v}_p$ con $\mathbf{v}_c$ y usar el coeficiente de restitución exactamente igual que antes; haciendo esta sustitución para $\dot{y}_{cf}$ lleva a las siguientes tres ecuaciones escalares en componentes:

$$\frac{118}{3}\omega_x - 2\omega_z = \frac{16\sqrt{2gH}}{\ell}(1+e)$$

$$\frac{32}{3}\omega_y = 0$$

$$-2\omega_x + \frac{10}{3}\omega_z = 0$$

Estas ecuaciones tienen, por supuesto, la misma solución para (ω_x, ω_y, ω_z) que en el ejemplo precedente.

Problemas / Sección 7.5

7.42 La barra $\mathcal{L}$ está unida rígidamente al árbol $\mathcal{S}$ que tiene libertad para girar en los dos cojinetes, como se indica en la Fig. P7.42. Los ejes y y y' apuntan hacia la página en C. Demuestre que el momento respecto a C que deben proporcionar los cojinetes al árbol $\mathcal{S}$ para mantener el movimiento debe tener las componentes:

$$\Sigma M_{Cx'} = -\frac{m\ell^2}{12}(\operatorname{sen}\beta\cos\beta)\alpha$$

$$\Sigma M_{Cy'} = -\frac{m\ell^2}{12}(\operatorname{sen}\beta\cos\beta)\omega^2$$

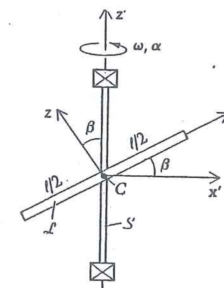


Figura P7.42

Proceda de dos maneras: (1) Aplique las ecuaciones de Euler (7.42) con los ejes principales (x,y,z); (2) use las Ecs.(7.43) con los ejes $(x',y'z')$ indicados en la figura.

7.43 Encuentre las reacciones ejercidas por los cojinetes sobre el árbol al que se encuentra soldada una placa delgada $\mathcal{P}$ de 30 kg (Fig. P7.43.) El conjunto gira con velocidad angular constante de 30 rad/s. Solucione el problema utilizando

$$\Sigma \mathbf{M}_C = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_C = {}^{\mathcal{P}}\dot{\mathbf{H}}_C + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{P}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C$$

o sea expresando $\mathbf{H}_c$ en función de las direcciones principales en $\mathcal{P}$ (lo que evita la necesidad de calcular el producto de inercia I_{xz} diferente de cero).

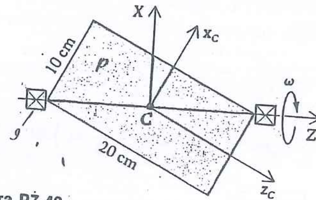


Figura P7.43

7.44 Repita y verifique los resultados del problema anterior usando las Ecs.(7.24) para calcular I_{xz}; luego use las Ecs.(7.43) para obtener las reacciones en los cojinetes.

7.45 La placa $\mathcal{T}$ triangular equilátera debió montarse sobre el árbol rotatorio, como se muestra en la parte sombreada de la Fig. P7.45. El conjunto quedó desalineado en un ángulo ϵ (vea la posición punteada). La placa tiene una masa de 2 slug y el árbol es ligero. Determine las reacciones dinámicas en los cojinetes en B_1 y B_2 causadas por la desalineación, en términos de ϵ : (a) usando ejes principales; (b) sin usar ejes principales (o sea en función de los productos de inercia).

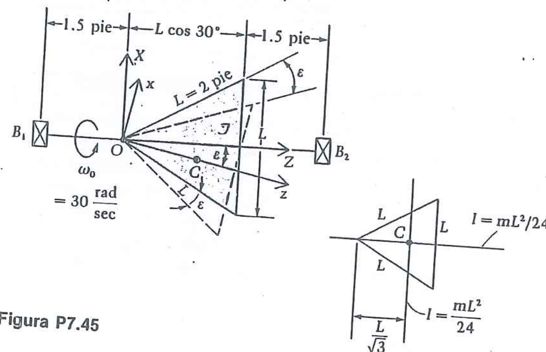


Figura P7.45

7.46 Una barra delgada $\mathcal{A}$ y una bola pequeña pesan cada una 0.3 lb (Fig. P7.46). Los cuerpos giran alrededor de la vertical junto con el árbol delgado $\mathcal{S}$ y están soportados por un cojinete de empuje en D y por la cuerda $\mathcal{C}$. Encuentre la tensión en la cuerda si la rapidez angular del sistema es 20 rad/s.

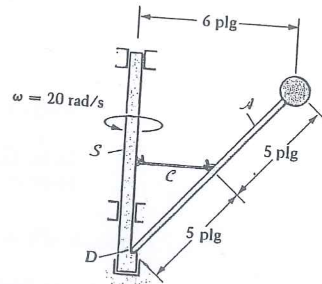
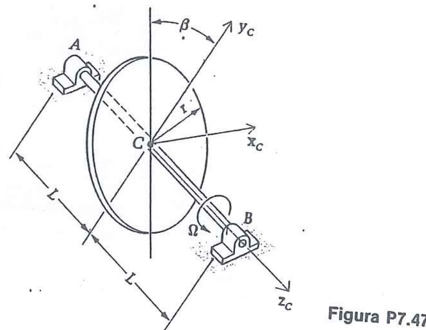


Figura P7.46

7.47 El disco (masa m, radio r) en la Fig. P7.47 está unido rígidamente al árbol y el conjunto gira con rapidez angular Ω alrededor del eje z_C. Determine las reacciones en A y en B en términos de m, r, g, β, Ω y L.



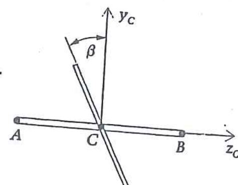


Figura P7.47

7.48 Una rueda de bicicleta con peso de 5 lb y radio de 14 plg está desalineada 1° respecto a la vertical. La parte superior de la rueda se inclina hacia la derecha cuando la bicicleta se mueve hacia adelante. Si la bicicleta viaja a lo largo de una trayectoria recta a 15 mi/h, encuentre el momento $\Sigma \mathbf{M}_C$ ejercido sobre la rueda. Use el resultado del Problema 7.11, despreciando el efecto del cubo y de los rayos.

7.49 En el problema precedente suponga que la bicicleta viaja en una curva (a) hacia la derecha y (b) hacia la izquierda; ambas con radio de 50 pie. Determine los nuevos valores del momento ejercido sobre la rueda desalineada. Desprecie el ángulo de inclinación.

Los seis problemas siguientes se refieren al Ejemplo 7.12:

7.50 Determine la rapidez v_c para la que las fuerzas normales N_i y N_o sean iguales para los siguientes parámetros:

$H = 2$ pie	$g = 32.2$ pie/s²c²	$\theta = 5°$
$D = 6$ pie	$I_1 = mk_1^2 = 3m$ slug·pie²	
$R = 300$ pie	$I_3 = mk_3^2 = 5m$ slug·pie²	

7.51 Determine la velocidad a la que el auto se volcará con los datos del problema anterior.

7.52 Determine el ángulo θ de peralte para el cual N_i

$H = 1.5$ pie	$g = 32.2$ pie/s²	$v_C = 55$ mph
$D = 5$ pie	$I_1 = 2\ m$ slug·pie²	
$R = 200$ pie	$I_3 = 4\ m$ slug·pie²	

7.53 Note que en la Ec.(1) (la fórmula para el vector de cantidad de movimiento respecto a C), $I_3 > I_1$ y $\omega_z > \omega_x$. Entonces $\mathbf{H}_c$ se encuentra entre los ejes z y Z. Aplique este hecho para evidenciar que el sentido de $\Sigma \mathbf{M}_C$ es ↺, sin efectuar ningún cálculo.

7.54 Determine el efecto de la inercia de las ruedas del auto (masa m, radio r y radio de giro k_w respecto al eje de cada rueda) en $N_i - N_o$ cuando $\theta = 0$: *Sugerencia*: El ímpetu angular respecto a C es el del auto y sus ruedas se mueven en la curva como si fueran un solo cuerpo rígido *más* el de las cuatro ruedas en su movimiento relativo (rotación) con respecto al chasis.

7.55 Si se escriben las leyes de Euler como $\Sigma \mathbf{F} + (-m\mathbf{a}_c) = \mathbf{0}$ y $\Sigma \mathbf{M}_C + (-\dot{\mathbf{H}}_C) = \mathbf{0}$ resulta lo que se conoce con el nombre de *fuerza efectiva inversa* $(-m\mathbf{a}_c)$ y *par de inercia* $(-\dot{\mathbf{H}}_C)$ Si estas cantidades se agregan al diagrama de cuerpo libre, el objeto puede tratarse como si estuviera en equilibrio. Un diagrama tal, para el auto en el momento del vuelco, sería como se ve en la Fig. P7.55. Calcule el momento respecto al punto Q y, notando que $\Sigma \mathbf{M}_Q = \mathbf{0}$ para este diagrama de cuerpo libre, compare los efectos de la fuerza efectiva inversa (o fuerza de inercia) $-m\mathbf{a}_C$ con el del par de inercia $-\dot{\mathbf{H}}_C$ en la tendencia al vuelco o volteo. Muestre que su solución predice que lo siguiente hará el auto más susceptible al volteo: (a) valores mayores de v_c, H, $(I_3 - I_1)$ y m; (b) valores menores de R, D y θ.

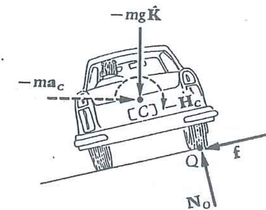


Figura P7.55

7.56 Suponga que las componentes de la velocidad $\mathbf{v}_c$ del centro de masa se expresan para el cuerpo $\mathcal{B}$ en vez de para un marco inercial $\mathcal{I}$. Use la propiedad (6.20) de $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ para obtener las ecuaciones escalares del movimiento del centro de masa, a partir de la Primera Ley de Euler: $\Sigma \mathbf{F} = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{L}}$.

7.57 Demuestre que si un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ sujeto a un movimiento libre de momentos en un marco inercial $\mathcal{I}$ tiene tres momentos de inercia principales iguales en su centro de masa, entonces su velocidad angular es constante en $\mathcal{I}$.

7.58 En el Ejemplo 7.9 defina los ejes (x, y, z) en O como principales para $\mathcal{B}$, con momentos de inercia asociados $\bar{I}$, $\bar{J}$ y $\bar{K}$, respectivamente. Repita el problema sin suponer que $\mathcal{B}$ tiene masa despreciable. Los dos conjuntos de ejes son respectivamente paralelos antes de la aplicación de M_o.

7.59 Calcule la aceleración angular en $\mathcal{I}$ del giróscopo analizado en la Sección 7.5 en el caso de la precesión continua.

7.60 Demuestre que si la solución $\omega(t)$ del Ejemplo 7.7 se proyecta sobre el plano xy, la punta del vector de proyección recorre un círculo de radio $\sqrt{\omega_{x_i}^2 + \omega_{y_i}^2}$ a la frecuencia igual a $(J - I)\,\omega_{z_i}/I$.

7.61 Un resultado del abultamiento ecuatorial de la Tierra es que $I/J = 0.0997$. Use este resultado para calcular el período de una revolución del vector velocidad angular de la Tierra (que apunta al Polo norte) respecto a su eje de simetría. (La respuesta, obtenida por Euler en 1752, es aproximadamente 4 meses menor que el período observado primeramente por S. Chandler en 1891. La diferencia se atribuye al hecho de que la Tierra no es rígida. Aunque la disipación de energía debería amortiguar este "bamboleo", de hecho no lo hace. La causa de tal bamboleo es un problema aún no resuelto por la geodinámica. Vea *Science News* Oct. 24/1981.)

7.62 Un movimiento tipo destornillador (o torculación) entre el caso plano y el general (tridimensional) se define de la si-

guiente manera. Todos los puntos del cuerpo $\mathcal{B}$ tienen, en todo momento, componentes Z idénticas de velocidad en un marco de referencia $\mathcal{J}$. El vector unitario $\hat{k}$ de esta $\dot{z}\hat{k}$ componente es constante en $\mathcal{B}$ y en $\mathcal{J}$, aunque $\dot{z}$ puede variar en el tiempo. Entonces el vector velocidad angular es expresable aún como $\omega = \dot{\theta}\hat{k}$. Obtenga una ecuación de momento para $\mathcal{B}$ que sea válida para este movimiento.

7.63 El disco en la Fig. P7.63 está girando respecto al eje ligero y el eje precesiona con velocidad angular constante de $32\hat{i}$ rad/s. Si se observa que el eje permanece horizontal, encuentre la magnitud y dirección de la giración del disco.

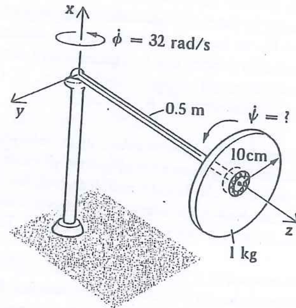


Figura P7.63

7.64 Un avión de un solo motor tiene una hélice de 4 aspas que pesa 128 lb y un radio de giro respecto a su centro de masa, de 3 pie; su rotación de 2000 rpm es antihoraria cuando se observa desde atrás. Encuentre el momento giroscópico sobre el eje de la hélice cuando el avión se encuentra en la parte inferior de un lazo vertical de 2000 pie de radio con rapidez de 500 mi/h. ¿En qué dirección tenderá a moverse la cola del avión debido a este momento?

7.65 Las aspas de un ventilador giran a 1750 rpm y el aparato oscila alrededor del eje vertical z (Fig. P7.65a) a razón de un ciclo cada 10 s. Suponiendo que el ventilador viaja con velocidad angular constante de 0.2 rad/s, excepto cuando cambia de dirección (Fig. P7.65b), encuentre el momento ejercido por la base sobre el brazo $\mathcal{A}$ en el punto "$\frac{1}{4}$ de ciclo" debido a la acción giroscópica. Para el cálculo, (sólamente para esto) considere a las aspas (Fig. P7.65c) como placas circulares de aluminio de 4 plg de diámetro y de $\frac{1}{32}$ plg de espesor, todas en el mismo plano. Use una densidad de 0.1 lb/plg³.

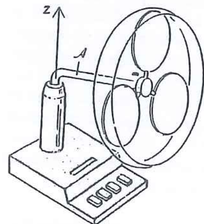


Figura P7.55a

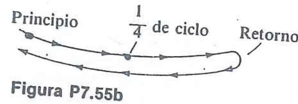


Figura P7.55b

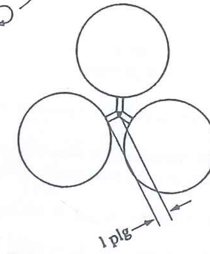


Figura P7.55c

7.66 El disco $\mathcal{D}$ en la Fig. P7.66 gira sobre cojinetes en C con velocidad angular ω_s alrededor de la barra ligera $\mathcal{R}$, y ambas precesion respecto al eje z_O con velocidad angular ω_P, tal como se indica. Muestre en un diagrama de cuerpo libre cómo es posible que el centro de masa C permanezca en un plano horizontal. Luego halle las reacciones ejercidas sobre $\mathcal{R}$ por la cazoleta de la unión de bola en O. ¿Hay diferencia en la solución si $\mathcal{D}$ y $\mathcal{R}$ están rígidamente conectados?

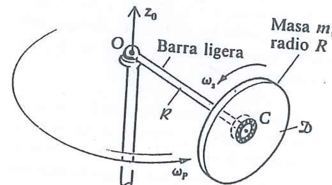


Figura P7.66

7.67 En el Problema 7.5, suponga que la pared no está presente (Fig. P7.67). Encuentre para una Ω dada (rapidez angular constante de $\mathcal{S}$), el ángulo ϕ que el eje de la muela $\mathcal{D}$ formará con la vertical. Observe que con la pared presente y ϕ fijo, mayores rapideces que esta Ω permitirán trabajar la muela. En particular, muestre que el siguiente conjunto de parámetros es satisfactorio: $r = 2.5$ pie, $\ell = 6$ pie, $\Omega = 2\pi$ rad/s y $\phi = 60°$ Desprecie la masa del cuerpo $\mathcal{B}$ al compararlo con el pesado disco $\mathcal{D}$.

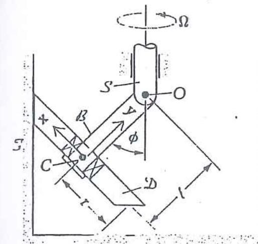


Figura P7.67

7.68 Calcule la fuerza de molido N generada en la pared del molino de los Problemas 7.5 y 7.67 para los parámetros dados.

7.69 Halle la magnitud y dirección de la fuerza y (o) del par ejercido sobre el disco $\mathcal{D}$ por el árbol $\mathcal{S}$ en el Problema 7.4.

7.70 Un disco $\mathcal{D}$ rueda alrededor de un círculo con su plano vertical y su centro viajando con rapidez constante v_c. Calcule la tensión en la cuerda y la fuerza de fricción ejercida sobre $\mathcal{D}$ por el piso (Fig. P7.70).

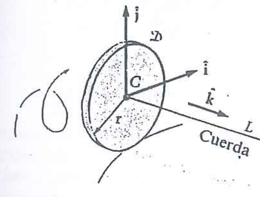


Figura P7.70

7.71 Un disco $\mathcal{D}$ (masa m, radio r) rueda en un círculo; es guiado por el brazo $\mathcal{A}$ que está conectado a $\mathcal{D}$ por medio de una junta esférica en C (Fig. P7.71). El brazo $\mathcal{A}$ gira con rapidez angular constante Ω respecto al eje central. Encuentre la fuerza en $\mathcal{A}$ y las reacciones ejercidas sobre $\mathcal{D}$ por el piso. El problema se diferencia del Ejemplo 7.8 en que este tiene un ángulo de inclinación constante $\theta_0 \neq 0$, como se muestra en la figura. Compare sus resultados cuando $\theta_0 \to 0$ con los del ejemplo mencionado.

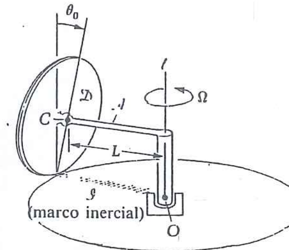


Figura P7.71

7.72 Existe una relación entre v_c, g, r, R y θ tal que el disco puede rodar en un círculo como se muestra en la Fig. P7.72 a y b, con valores constantes de v_c y θ. Determine esta relación.

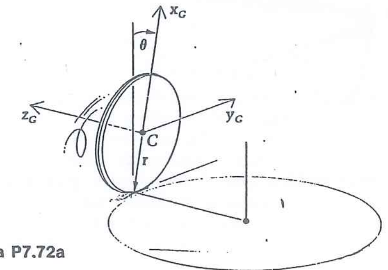


Figura P7.72a

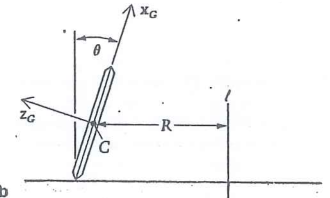


Figura P7.72b

7.73 Obtenga los resultados del Ejemplo 7.8 usando las ecuaciones de Euler (7.42). *Sugerencia*: Esta vez los ejes están fijos al cuerpo y la parte v_c/L de ω cambia de dirección en $\mathcal{D}$; por ello las componentes ω_x y ω_y tienen derivadas que eran antes nulas en $\omega_{\mathcal{D}/\mathcal{J}}$. La componente

$$\frac{v_C}{L}(\cos\theta_r\hat{j} - \text{sen}\,\theta_r\hat{i})$$

en donde θ_r es el ángulo de rodamiento mostrado en la Fig. P7.73. Diferencie esta expresión, sustituya $\dot{\theta}_r = v_C/r$ y *luego* tome $\theta_r = 0$. Finalmente vuelva a las Ecs.(7.42) y sustituya sus resultados.

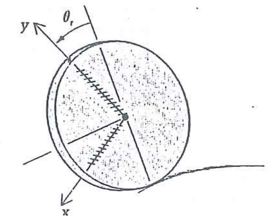


Figura P7.73

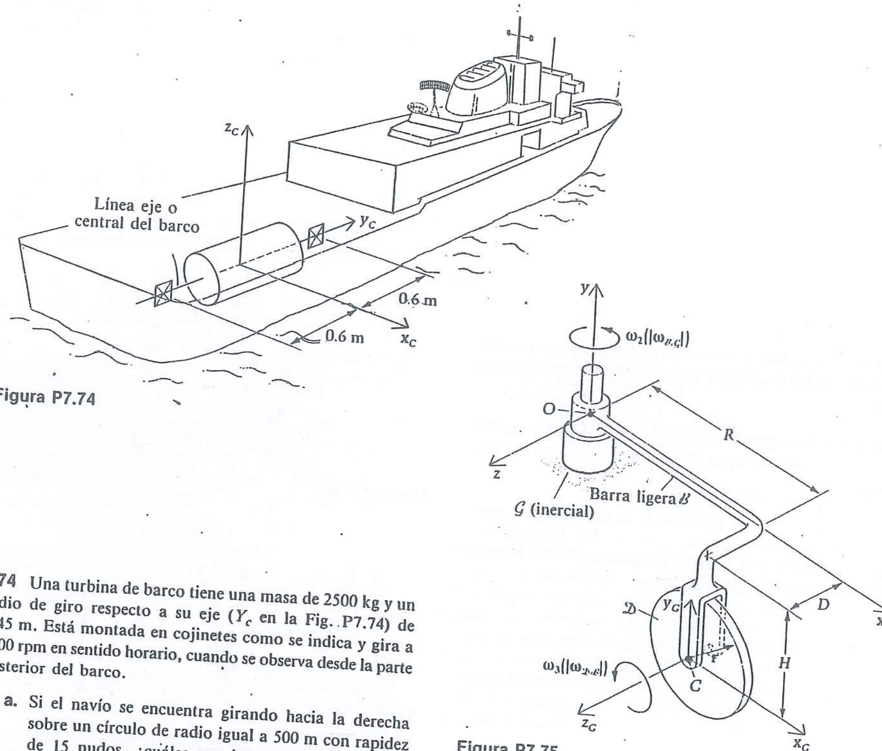


Figura P7.74

Figura P7.75

7.74 Una turbina de barco tiene una masa de 2500 kg y un radio de giro respecto a su eje (Y_C en la Fig. P7.74) de 0.45 m. Está montada en cojinetes como se indica y gira a 5000 rpm en sentido horario, cuando se observa desde la parte posterior del barco.

a. Si el navío se encuentra girando hacia la derecha sobre un círculo de radio igual a 500 m con rapidez de 15 nudos, ¿cuáles son las reacciones ejercidas sobre el eje por los cojinetes? (1 nudo = 1.15 mi/h = 1.85 km/h)

b. Si el barco viaja en línea recta en mar picado y cabecea sinusoidalmente con amplitud de ± 12° y período de 6 s, ¿cuáles son las reacciones máximas entonces en los cojinetes?

7.75 Un disco pesado $\mathcal{D}$ de masa m y radio r gira con rapidez angular ω_3 (= $|\omega_{\mathcal{D}/\mathcal{B}}|$) con respecto a la barra rígida doblada pero ligera $\mathcal{B}$ (Fig. P7.75). El cuerpo $\mathcal{B}$ gira con rapidez angular ω_2 (= $|\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{G}}|$) respecto a un eje vertical que pasa por O, que es un punto tanto de $\mathcal{B}$ como del marco inercial $\mathcal{G}$. Encuentre la fuerza y el par que deben actuar sobre $\mathcal{B}$ en O para producir un movimiento del sistema para el cual ω_2 y ω_3 son constantes. Ambos conjuntos de ejes en la figura están fijos en $\mathcal{B}$, y note que (x_c,y_c,z_c) son siempre ejes principales para $\mathcal{D}$ en C aunque no están fijos en $\mathcal{D}$.

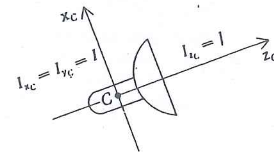


Figura P7.76a

7.76 Calcule el momento M aplicado a la barra eje $\mathcal{S}$ en la Fig. P7.76a y b en función del ángulo β si ω_1 y ω_2 (= $\dot{\beta}$) son constantes.

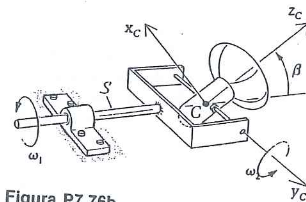


Figura P7.76b

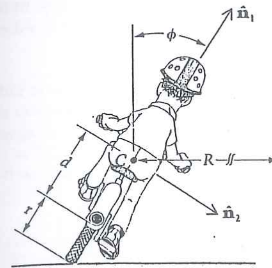


Figura P7.77

7.77 Un ciclista entra a una curva de radio R con rapidez constante v_c (Fig. P7.77). Otros parámetros se definen a continuación:

r = radio de la rueda

d = distancia entre el eje y C

I_1, I_2 = momentos principales de inercia de la bicicleta y el ciclista con respecto a los ejes definidos por $\hat{n}_1$ y $\hat{n}_2$ que pasan por C.

i = momento de inercia con respecto a la dirección $\hat{n}_2$, de una rueda respecto a su eje de simetría.

m = masa total

ϕ = ángulo indicado

Determine $\Sigma \mathbf{F}$ y $\Sigma \mathbf{M}_C$ en terminos de estos parámetros. Compare los efectos de la *fuerza de D'Alembert* ($-m\mathbf{a}_a$) y del *par de inercia* ($-\dot{\mathbf{H}}_C$) al enderezar la bicicleta cuando ϕ es pequeño. Desprecie los productos de inercia.

* **7.78** El disco $\mathcal{D}$ en la Fig. P7.78 gira alrededor de la barra $\mathcal{R}$ al rodar sobre el piso $\mathcal{G}$. Encuentre todas las fuerzas que actúan sobre $\mathcal{D}$ y note que la fuerza normal proveniente del piso, se incrementa sobre la de gravedad mg debido a la acción giroscópica. Suponga que fuerzas aplicadas a $\mathcal{R}$ obligan al centro de masa C de $\mathcal{D}$ a viajar con rapidez constante v_c en una trayectoria circular horizontal.

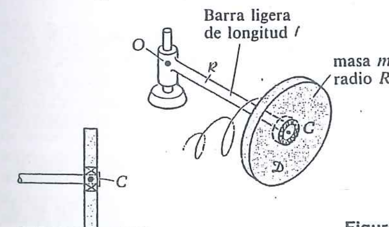


Figura P7.78

7.79 En el Problema 6.24, si ω_1, ω_2 y ω_3 son constantes, encuentre el momento resultante ejercido sobre $\mathcal{D}$ en su centro de masa cuando $\hat{u}$ señala hacia arriba. El cuerpo $\mathcal{D}$ es simétrico con momentos de inercia principales centroidales J a lo largo de $\hat{u}$, e I normal a $\hat{u}$.

* **7.80** El cuerpo $\mathcal{B}$ en la Fig. P7.80 es un elipsoide de revolución con masa = 1 slug y con longitudes a y $2a$ de sus semiejes menor y mayor, siendo a = 1 pie. Por tanto,

$$I^c_{xx} = \frac{m}{5}(a^2 + a^2) = 0.4 \text{ slug·pie}^2$$

y también

$$I^c_{yy} = I^c_{zz} = \frac{m}{5} \left[a^2 + (2a)^2\right] = 1.0 \text{ slug·pie}^2$$

El bastidor ligero $\mathcal{A}$ gira alrededor del poste fijo $\mathcal{P}$ con velocidad angular $\omega_2\hat{j}$ al ser impulsado por un par de motor T_2 aplicado en P. Otro motor (ninguno se muestra) entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ aplica un par $T_1\hat{i}$ que hace girar el cuerpo $\mathcal{B}$ en el bastidor. Los ejes y los vectores unitarios mostrados están fijos en $\mathcal{A}$. Durante un intervalo de movimiento, $\omega_1 = 3t^2$ rad/s y $\omega_2 = 2t$ rad/s. Encuentre todas las fuerzas y pares aplicados sobre $\mathcal{A}$ en P cuando t = 1 s. La distancia de P al eje x es de 2 pie.

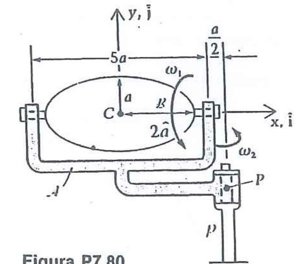


Figura P7.80

* **7.81** Por medio de un motor (no mostrado) se hace girar al disco $\mathcal{D}$ en la Fig. P7.81 alrededor de su eje de simetría

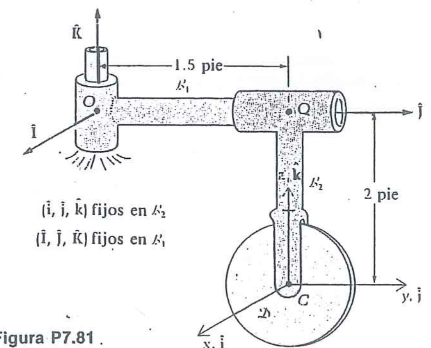


Figura P7.81

respecto al brazo $\mathcal{B}_2$; $\mathcal{B}_2$ se hace girar alrededor del eje del brazo, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_1$ alrededor de la vertical por O respecto al suelo (marco inercial) $\mathcal{I}$. En el instante dado, la velocidad angular de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{I}$, expresada en términos de vectores unitarios $(\hat{\mathbf{i}},\hat{\mathbf{j}},\hat{\mathbf{k}})$ fijos en $\mathcal{B}_2$, es $\omega_1\hat{\mathbf{i}} + \omega_2\hat{\mathbf{j}} + \omega_3\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ rad/s.
Se tiene además, en este instante, $\dot{\omega}_1 = 4$, $\dot{\omega}_2 = 5$ y $\dot{\omega}_3 = 6$ rad/s^2. Para el disco, $m = 10$ slugs, $I^c_{xx} = 1.4$ slug·pie^2 e $I^c_{yy} = 0.7$ slug·pie^2. Encuentre todas las fuerzas y pares que actúan sobre $\mathcal{D}$ en C en el instante dado.

* **7.82** En el problema anterior, use ω_1, ω_2, ω_3 y sus derivadas para calcular los segundos miembros de las ecuaciones de Euler (7.42). Explique por qué esos resultados no son las componentes de los momentos de las fuerzas externas que actúan sobre $\mathcal{D}$ en C.

* **7.83** En los dos problemas anteriores en el instante dado $\dot{\theta}_i$ y $\ddot{\theta}_i$ para $i = 1, 2$ y 3, en donde θ_1 es el ángulo de rotación de $\mathcal{D}$ respecto a $\mathcal{B}_2$, θ_2 es el ángulo de rotación de $\mathcal{B}_2$ respecto a $\mathcal{B}_1$, y θ_3 es el ángulo de rotación de $\mathcal{B}_1$ respecto a $\mathcal{I}$.

7.84 El trompo en rotación (Fig. P7.84) es otro ejemplo de un giróscopo. Demuestre que si "la punta" del trompo no se desplaza sobre el suelo, la condición para tener una precesión uniforme está dada por

$$mgd = J\dot{\psi}\dot{\phi} + (J - I)\dot{\phi}^2 \cos\theta$$

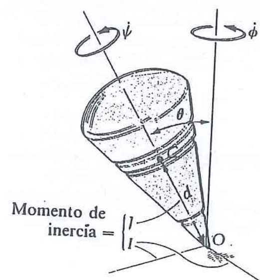


Figura P7.84

7.85 Un trompo precesiona uniformemente respecto a la dirección fija Z a razón de 60 rpm (Fig. P7.85). Considerando al trompo como si fuera un cono de 1.2 plg de radio y 2.0 plg de altura, encuentre la rapidez angular $\dot{\psi}$ del trompo respecto a su eje de simetría.

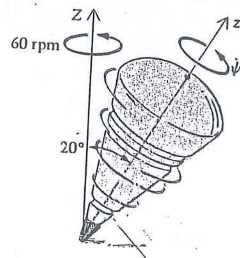


Figura P7.85

7.86 El cono $\mathcal{C}$ en la Fig. P7.86 tiene 0.2 m de radio y 0.5 m de altura, y se encuentra en precesión respecto al eje vertical que pasa por la junta esférica, en la dirección mostrada, a razón de $\dot{\phi} = 0.5$ rad/s. Si $\theta = 20° =$ constante, ¿cuál debe ser la rapidez angular $\dot{\psi}$ del cono?

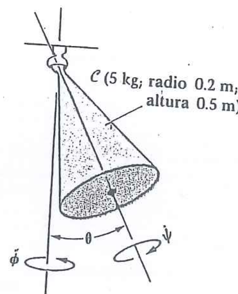


Figura P7.86

7.87 En el problema anterior suponga que $\dot{\psi}$ es de 400 rad/s en la dirección indicada en la figura y que la altura del cono H no se da. Encuentre el valor de H para que ocurra una precesión uniforme.

7.88 Basándose en el hecho de que la suma de dos cualesquiera momentos de inercia en un punto es siempre mayor que el tercero (Probl. 7.14), demuestre que para un cuerpo con simetría axial y libre de momentos bajo precesión retrógrada se cumple que $\dot{\phi} \geq 2|\dot{\psi}|$, y que el eje z del cuerpo se encuentra siempre fuera del cono espacial.

7.89 La gráfica en la Fig. P7.89a representa la estabilidad de satélites simétricos girando alrededor del eje Z_c normal al plano de su órbita. La abscisa es la relación de I_{Zc} al momento de inercia I, respecto a cualquier eje lateral (son todos iguales para los llamados satélites "simétricos", los cuales no son necesariamente físicamente simétricos respecto a Zc). La ordenada es la relación de la rapidez angular ω_s (respecto a Z_c) *en* la órbita a la rapidez angular orbital ω_o.

a. Encuentre I_{Zc} e I_l para un satélite constituido por cuatro cilindros macizos cada uno de masa m, radio R y altura $3R$. La distancia de C a cualquier centro de cilindro es $2R$; la cruz que los conecta es ligera. Los ejes de los cilindros son normales al plano orbital (Fig. 7.89b)

b. Determine si la estación es estable en los casos siguientes:

i. La orientación de la estación es fija en el espacio inercial.

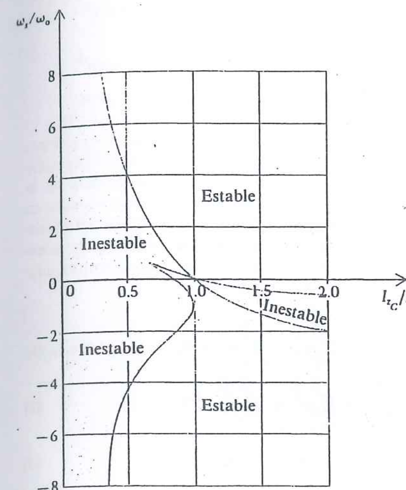


Figura P7.89a

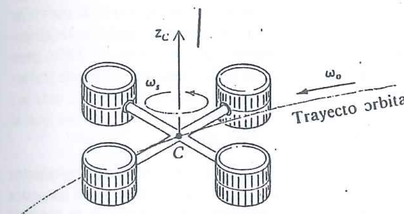


Figura P7.89b

ii. La estación viaja alrededor de la Tierra en forma similar a como lo hace la Luna.

iii. La estación tiene una velocidad angular doble de la del marco orbital.

iv. Igual que iii, pero la giración es opuesta en dirección a la rapidez angular orbital.

7.90 Se dice que un trompo "duerme" cuando su eje premanece vertical y su "punta" permanece estacionario sobre el suelo al girar al trompo (Fig. P7.90). En ausencia de un par de fricción respecto al eje del trompo, note que la rapidez angular ω_z es constante y que entonces las ecuaciones de movimiento se reducen a $\Sigma\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$ y $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Se infiere que también $\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$. Ninguna de las partículas del trompo fuera de su eje Z_c están en equilibrio, porque todas tienen aceleraciones (hacia el interior) $r\omega^2$. Un cuerpo está en equilibrio si y sólo si todas sus partículas lo están, por lo que un trompo durmiendo no puede estar en equilibrio. Explique esta afirmación con base en $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ que son las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo según la estática. *Sugerencia:* Si O es un punto fijo de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ en un marco inercial $\mathcal{I}$, entonces

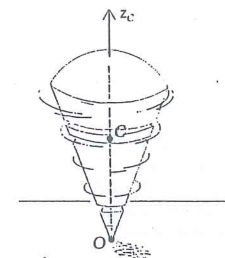


Figura P7.90

$$\Sigma\mathbf{M}_O = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_O = {}^{\mathcal{I}}\frac{d}{dt}(\mathbf{H}_C + \mathbf{r}_{OC} \times \mathbf{L})$$

$$= {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C + \mathbf{r}_{OC} \times \underbrace{m\mathbf{a}_C}_{\Sigma\mathbf{F}}$$

Por tanto, muestre que sólo porque $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y $\Sigma\mathbf{M}_O = 0$, $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ no tiene que ser cero. Use el trompo como contraejemplo y explique por qué se anulan los dos primeros términos del lado derecho de la ecuación precedente. Entonces $\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ son condiciones necesarias pero no *suficientes* para el equilibrio de un cuerpo rígido.

7.91 En el contraejemplo del trompo dormido del Problema 7.90, los términos ${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C$ y $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C$ desaparecen independientemente. Muestre que existen contraejemplos más complicados en los que $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ no es constante en dirección en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{I}$, y en los que los dos términos *suman* cero. *Sugerencia:* $\Sigma\mathbf{M}_O - \mathbf{r}_{OC} \times \Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{M}_C$. ¿Qué valor tiene $\Sigma\mathbf{M}_C$ para el cuerpo libre de momentos?

7.92 Demuestre que si $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = \mathbf{0}$ en todo momento, entonces también $\Sigma\mathbf{M}_C$. es igual a cero. ¿Es cierta la proposición inversa?

7.93 Si un marco $\mathcal{B}$ se está moviendo respecto a un marco inercial $\mathcal{I}$, puede demostrarse que $\mathcal{B}$ es también un marco inercial si y sólo si $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = \mathbf{0}$ en todo momento, y la aceleración en $\mathcal{I}$ de por lo menos un punto de $\mathcal{B}$ es cero en todo instante. Use este teorema para demostrar que si un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ está en equilibrio en un marco inercial $\mathcal{I}$, entonces $\mathcal{B}$ es a su vez un marco inercial. ¿Es cierta la proposición inversa?

7.94 Demuestre que un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ está en equilibrio en un marco inercial $\mathcal{I}$ si y sólo si (a) por lo menos un punto de $\mathcal{B}$ está fijo en $\mathcal{I}$, y (b) $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = \mathbf{0}$ en todo momento. ¿Cuál será el número mínimo de restricciones en $\mathcal{B}$ para que se satisfagan (a) y (b)? Describa un conjunto de restricciones físicas que garanticen el equilibrio.

7.95 Doble un gancho para colgar ropa dándole la forma de la barra doblada del Ejemplo 7.14. Déjela caer sobre el borde de una mesa como en el ejemplo, y observe que la dirección de la velocidad angular después del impacto concuerda con los resultados del ejemplo.

* **7.96** El triángulo sonoro de la Fig. P7.96 es golpeada con una fuerza horizontal en la dirección que le imparte un impulso $F\,\Delta t\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre la velocidad angular de este llamador ("a comer") inmediatamente después de ser golpeado. ¿Es igual la respuesta si el llamador es una *placa* triangular equilátera de la misma masa? ¿Por qué sí o por qué no?

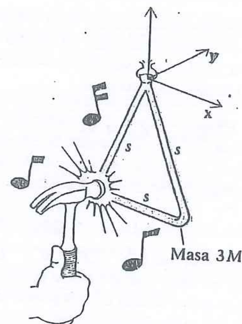


Figura P7.96

* **7.97** En el problema anterior suponga que el martillo es reemplazado por una bala de masa m y velocidad v_b que rebota en línea recta con un coeficiente de restitución $e = 0.1$. Determine la velocidad angular resultante del llamador.

7.98 Repita el Problema 7.96, pero esta vez suponga que el llamador cuelga de una cuerda en vez de una junta esférica.

7.99 La barra doblada $\mathcal{B}$ tiene las propiedades de inercia mostradas en la Fig. P7.99, y se encuentra en movimiento en un marco inercial $\mathcal{I}$; en un cierto instante tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = \omega(4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}})$ rad/s. Use el principio del impulso y la cantidad de movimiento angular para respondera la siguiente pregunta: ¿es posible golpear $\mathcal{B}$ en el punto Q con un impulso $\mathbf{F} = F_x\,\Delta t\hat{\mathbf{i}} + F_y\,\Delta t\hat{\mathbf{j}} + F_z\,\Delta t\hat{\mathbf{k}}$ tal que se reduzca $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ a cero, después del impulso? Si es así, encuentre las componentes del impulso en términos de m, ℓ, ω y Δt. Si no es así, explique la razón.

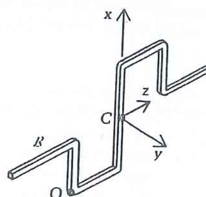


Figura P7.99

$$I_{xx}^C = \frac{22}{3}\,m\ell^2 \qquad I_{zz}^C = \frac{10}{3}\,m\ell^2$$

$$I_{yy}^C = \frac{32}{3}\,m\ell^2 \qquad I_{xz}^C = -2\,m\ell^2$$

$$I_{yz}^C = I_{xy}^C = 0$$

* **7.100** Un clavadista $\mathcal{D}$ abandona el trampolín en una posición recta simétrica con los vectores velocidad angular e ímpetu angular en la dirección, como se muestra en la Fig. P7.100. Puesto que $\Sigma\mathbf{M}_C$ es cero, no habrá cambio en el ímpetu angular $\mathbf{H}_c$ en el marco inercial (la piscina) en tanto que el clavadista se encuentre en el aire. Por lo tanto, mientras él permanezca en posición erguida, su momento angular constante está expresado por

$$I_{xx}^C\omega_x + \overset{0}{\cancel{I_{xy}^C}}\overset{0}{\cancel{\omega_y}} + \overset{0}{\cancel{I_{xz}^C}}\overset{0}{\cancel{\omega_z}} = H_{C_1} = \text{constante} \qquad (1)$$

$$\overset{0}{\cancel{I_{yx}^C}}\omega_x + I_{yy}^C\overset{0}{\cancel{\omega_y}} + \overset{0}{\cancel{I_{yz}^C}}\overset{0}{\cancel{\omega_z}} = 0 \qquad (2)$$

$$\overset{0}{\cancel{I_{zx}^C}}\omega_x + \overset{0}{\cancel{I_{zy}^C}}\overset{0}{\cancel{\omega_y}} + I_{zz}^C\overset{0}{\cancel{\omega_z}} = 0 \qquad (3)$$

en donde hemos supuesto que el cuerpo del clavadista es interiormente simétrico para que todos los productos de inercia se anulen. Ahora suponga que el clavadista mueve instantáneamente sus brazos como se muestra en la Fig. P7.100b, para iniciar una trenza. Después de la maniobra, el puede tratarse nuevamente como un cuerpo rígido y podemos usar los mismos ejes fijos al cuerpo igual que antes. (Note que el centro de masa cambia muy poco.)

a. Aclare por qué ocurren los cambios en los productos de inercia indicados en la Fig. P7.100c. (Sólo las partes sombreadas contribuyen a los productos de inercia.) Aclare por que I_{yz}^c es menor que I_{xz}^c y también menor que I_{xy}^c. Observe que los tres productos de inercia son pequeños comparados con los tres momentos de inercia y que $I_{yy}^c < I_{xx}^c < I_{zz}^c$, siendo I_{yy}^c mucho menor que los otros dos momentos de inercia. Note que (x, y, z) ya no son principales, pero esto no importa pues no se está haciendo uso aquí de ejes principales. $|I_{xy}^C|$.

Cuando el cuerpo del clavadista empieza a torcerse y a girar, los miembros derechos de las Ecs.(1) a (3) cambian y *ninguna* de las cantidades a la izquierda permanecen iguales a cero. Pero los miembros derechos constituirán las componentes *en el marco $\mathcal{D}$ del cuerpo* del vector $\mathbf{H}_c$, *que darán sumadas vectorialmente* $\mathbf{H}_{cI}$, $\hat{\mathbf{I}}$, en donde $\hat{\mathbf{I}}$ es la dirección original en $\mathcal{I}$ de $\mathbf{H}_c$ después de que el clavadista abandona el trampolín (hacia la derecha en el primer croquis).

b. Después de la rápida maniobra de torsión, pero *antes* de que el clavadista empiece a torcerse, sus ejes están aún instantáneamente alineados con los del marco $\mathcal{I}$. Use las ecuaciones (1) a (3), con los segundos

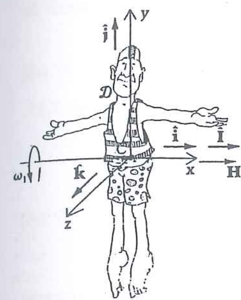


Figura P7.100a

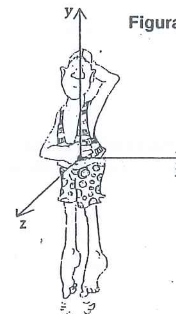
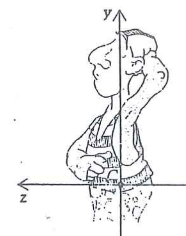
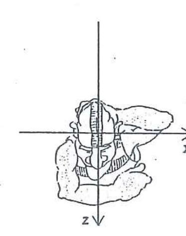


Figura P7.100b





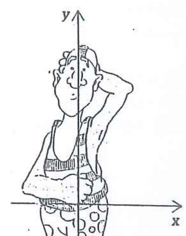


Figura P7.100c

miembros $(H_{cI}, 0, 0)$ y los productos de inercia ahora no nulos, para demostrar que:

i. Se desarrollará una pequeña (comparada con la original ω_x) velocidad angular respecto a la dirección $-Z_c$ (ω_z negativa).

ii. Se desarrollará una velocidad angular de torsión especto a Y_c (ω_y positiva)

iii. Habrá un incremento en la componente ω_x de la velocidad angular de la voltereta.

Al aclarar los tres puntos anteriores no suponga nada acerca de las velocidades angulares (ω) posteriores a la maniobra, excepto que ω_x tiene aún la misma dirección que antes.

7.6 Trabajo y Energía Cinética en el Movimiento General

Una integral especial de las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido $\mathcal{B}$ proporciona una relación entre el trabajo de las fuerzas externas (o pares) y el cambio en la energía cinética de $\mathcal{B}$. Para desarrollar esta relación debemos primero analizar expresiones para la energía cinética del cuerpo rígido. La **energía cinética** se denotará aquí usualmente con la letra T y se define como (vera la Sección 5.2):

$$T = \frac{1}{2}\int \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,dm \qquad (7.67)$$

en donde $\mathbf{v}$ es la derivada del vector de posición que va de O (punto fijo en el marco inercial $\mathcal{I}$ en la Fig. 7.15) al elemento diferencial de masa dm. En esta sección todas las derivadas respecto al tiempo, velocidades y velocidades angulares se toman en $\mathcal{I}$, a menos que se especifique otra cosa.

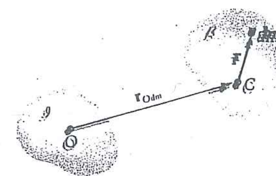


Figura 7.15

Como $\mathcal{B}$ es un cuerpo rígido, podemos relacionar $\mathbf{v}$ con la velocidad $\mathbf{v}_c$ del centro de masa C de $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (7.68)$$

en donde $\boldsymbol{\omega}$ es $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ y $\mathbf{r}$ es el vector de posición de C a dm como se muestra en la Fig. 7.15. Sustituyendo la Ec. (7.68) en la (7.67) obtenemos:

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C \int_{\mathcal{B}} dm + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, dm + \mathbf{v}_C \cdot \left[\boldsymbol{\omega} \times \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}\, dm\right] \qquad (7.69)$$

en donde $\mathbf{v}_c$ y $\boldsymbol{\omega}$ no varían en el volumen del cuerpo y pueden por ello sacarse de las integrales. La integral en el último término es cero en virtud de la definición del centro de masa:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}\, dm = m\mathbf{r}_{CC} = 0 \qquad (7.70)$$

La integral en el primer término del segundo miembro de la Ec. (7.69) es, por supuesto, la masa m de $\mathcal{B}$. El integrando del término restante puede simplificarse por medio de la identidad vectorial:*

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] \qquad (7.71)$$

La Ec.(7.69) resulta entonces:

$$T = \frac{m}{2}(\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \int [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]\, dm \qquad (7.72)$$

Como vimos en la Sección 7.2, la integral en la Ec.(7.72) es la cantidad de movimiento (o ímpetu) angular del cuerpo con respecto a C y puede escribirse

$$T = \overbrace{\frac{m}{2}\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C}^{T_v} + \overbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_C}^{T_\omega} \qquad (7.73)$$

Se ve que la energía cinética puede representarse como la suma de dos términos:

1. Una parte $T_v = (m/2)\,\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_c$ que el cuerpo posee si su centro de masa está en movimiento.
2. Una parte $T_\omega = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_C$ debida a la diferencia entre las velocidades de los puntos de $\mathcal{B}$ y la velocidad de su centro de masa.

El término T_ω puede interpretarse simplemente si en un instante hacemos $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\mathbf{i}}$, o sea si alineamos el eje de referencia x con el vector velocidad angular en ese instante. En este caso, usando las Ecs.(7.11) obtenemos

$$\mathbf{H}_C = I_{xx}^C\omega\hat{\mathbf{i}} + I_{xy}^C\omega\hat{\mathbf{j}} + I_{xz}^C\omega\hat{\mathbf{k}} \qquad (7.74)$$

de modo que

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_C = \frac{1}{2}I_{xx}^C\omega^2 \qquad (7.75)$$

*Esto no es más que intercambiar el punto y la cruz del triple producto escalar $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}$, en donde $\mathbf{E}$ es el vector $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

Esto significa que la "parte rotacional" de T es *instantáneamente* de la misma forma que para el caso plano del Capítulo 4. La diferencia es que la dirección del vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ cambia en el caso general (tridimensional).

Supóngase que el cuerpo $\mathcal{B}$ tiene un punto P con velocidad cero. (Esto no es siempre el caso en el movimiento general como vimos en el Capítulo 6). Entonces si $\mathbf{v}$ en la Ec.(7.67) se reemplaza por $\mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$, en donde $\mathbf{r}'$ va de P al elemento de masa dm, obtenemos

$$T = \int (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')\, dm \qquad (7.76)$$

Los mismos pasos que generaron el segundo término de la Ec.(7.73) a partir del término medio de (7.69) dan ahora:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_P \qquad (7.77)$$

y los dos términos de la Ec.(7.73) se reducen a uno si H se expresa respecto a un punto de velocidad cero en vez de respecto a C.

En las Secciones 2.3 y 5.2 demostramos un principio de trabajo y energía cinética que sigue siendo válido para el caso general. Este resultado provino de integrar $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_C$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_C\, dt = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_C(t_2)|^2 - \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_C(t_1)|^2 = \frac{1}{2}m(v_{C_2}^2 - v_{C_1}^2) \qquad (7.78)$$

Un segundo principio se deducirá ahora de la ecuación de momento de fuerza*

$$\Sigma\mathbf{M}_C = \dot{\mathbf{H}}_C \qquad (7.79)$$

pero primero tenemos que probar el resultado no obvio de que

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{H}_C = \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{H}}_C$$

Para hacerlo recordemos que:

$$\mathbf{H}_C = \int [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]\, dm \qquad (7.80)$$

Si ${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C$ es la derivada de $\mathbf{H}_c$ tomada en el cuerpo $\mathcal{B}$, entonces la derivada relativa al marco inercial puede escribirse como:

$$\dot{\mathbf{H}}_C = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_C \qquad (7.81)$$

Multiplicando escalarmente por $\boldsymbol{\omega}$ ambos miembros de la Ec.(7.81),

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{H}}_C = \boldsymbol{\omega} \cdot {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C \qquad (7.82)$$

y como $\mathbf{r}$ es constante en el tiempo relativa al cuerpo $\mathcal{B}$, podemos derivar ahí la Ec.(7.80) y obtener:

$${}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C = \int \mathbf{r} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r})\, dm \qquad (7.83)$$

*Las derivadas como $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ se toman en esta sección en el marco inercial $\mathcal{I}$, a menos que la letra $\mathcal{B}$ aparezca junto al punto, en cuyo caso la derivada se toma en el cuerpo.

En la Ec.(7.83) usamos la propiedad de que las derivadas de ω en $\mathcal{I}$ y en $\mathcal{B}$ son iguales, esto es:

$$^{\mathcal{I}}\dot{\omega} = {^{\mathcal{I}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}} = {^{\mathcal{B}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}} + \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = {^{\mathcal{B}}\dot{\omega}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}} = {^{\mathcal{B}}\dot{\omega}}$$

Sustituyendo la Ec.(7.83) en la (7.82) se obtiene:

$$\omega \cdot \dot{\mathbf{H}}_C = \omega \cdot \int \mathbf{r} \times (\dot{\omega} \times \mathbf{r})\, dm = \int \omega \cdot [\mathbf{r} \times (\dot{\omega} \times \mathbf{r})]\, dm$$

$$= \int (\omega \times \mathbf{r}) \cdot (\dot{\omega} \times \mathbf{r})\, dm = \int [(\dot{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\omega \times \mathbf{r})]\, dm$$

$$= \dot{\omega} \cdot \int \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})\, dm$$

Por consiguiente,

$$\omega \cdot \dot{\mathbf{H}}_C = \dot{\omega} \cdot \mathbf{H}_C \tag{7.84}$$

Podemos observar ahora que

$$\omega \cdot \Sigma \mathbf{M}_C = \omega \cdot \dot{\mathbf{H}}_C = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega \cdot \mathbf{H}_C}{2}\right) \tag{7.85}$$

Integrando la Ec.(7.85) tenemos,

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{M}_C \cdot \omega\, dt = \frac{1}{2}\omega(t_2) \cdot \mathbf{H}_C(t_2) - \frac{1}{2}\omega(t_1) \cdot \mathbf{H}_C(t_1) \tag{7.86}$$

Nótese que los segundos miembros de las Ecs.(7.87) y (7.86) representan cada uno el cambio que ocurre en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$, de parte de la energía cinética del cuerpo. (Los primeros miembros de estas ecuaciones suelen ser una forma de trabajo.)

Aunque las relaciones entre el trabajo y la energía cinética que se han desarrollado son importantes, hay otra que las combina y que es con frecuencia más útil. Podemos derivar la Ec.(7.73) y obtener

$$\frac{dT}{dt} = m\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{a}_C + \frac{1}{2}\dot{\omega} \cdot \mathbf{H}_C + \frac{1}{2}\omega \cdot \dot{\mathbf{H}}_C$$

Usando las leyes de Euler y la Ec.(7.84), esta última expresión puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_C + \Sigma \mathbf{M}_C \cdot \omega \tag{7.87}$$

Si ahora $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots$ representan las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, y $C_1, C_2, \ldots$ representan los momentos de los pares externos, entonces

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots \tag{7.88a}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_C = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \cdots \tag{7.88b}$$

en donde $P_1; P_2 \ldots$ son los puntos de $\mathcal{B}$ en donde $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots$ están respectivamente aplicadas, y donde $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{cp1}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{cp2}$, etc. como se muestra en la Fig. 7.16.

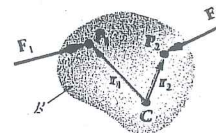


Figura 7.16

Recuérdese de estática que un par tiene el mismo momento respecto a cualquier punto en el espacio, de modo que las $\mathbf{C}_i$ se suman simplemente en la ecuación de momentos (7.88b).

Sustituyendo las Ecs. (7.88) en la (7.87), obtenemos

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_C + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{v}_C + \cdots + \omega \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \omega \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) + \cdots + \omega \cdot \mathbf{C}_1 + \omega \cdot \mathbf{C}_2 + \cdots \tag{7.89}$$

Sin embargo,

$$\omega \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{F}_i \cdot (\omega \times \mathbf{r}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

de modo que,

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F}_1 \cdot (\mathbf{v}_C + \omega \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{F}_2 \cdot (\mathbf{v}_C + \omega \times \mathbf{r}_2) + \cdots + \omega \cdot \mathbf{C}_1 + \omega \cdot \mathbf{C}_2 + \cdots \tag{7.90}$$

Notamos que $\mathbf{v}_c + \omega \times \mathbf{r}_1$ es la velocidad $\mathbf{v}_1$ del punto P_1, que es el punto de aplicación de $\mathbf{F}_1$. Por lo tanto,

$$\frac{dT}{dt} = \dot{T} = \Sigma \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \omega \cdot \Sigma \mathbf{C}_i \tag{7.91}$$

La Ec.(7.91) conduce a la definición de **potencia**, o **rápidez de trabajo**, del modo siguiente:

$$\text{Potencia de una fuerza } (\mathbf{F}_1) = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_1$$
$$\text{Potencia de un par } (\mathbf{C}_1) = \omega \cdot \mathbf{C}_1 \tag{7.92}$$

En consecuencia,

$\dot{T}$ = rapidez (intensidad de variación respecto al tiempo) de trabajo de las fuerzas y pares externos.

Integrando la Ec.(7.91) obtenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\text{rapidez de trabajo})\, \text{dt} = T(t_2) - T(t_1) = \Delta T \tag{7.93}$$

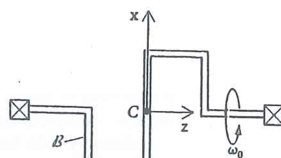
La integral del primer miembro en la Ec.(7.93) se llama **trabajo** efectuado sobre $\mathcal{B}$ entre t_1 y t_2 por las fuerzas y pares externos. Por consiguiente,

$$\text{Trabajo} = \int (\Sigma \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \omega \cdot \Sigma \mathbf{C}_i)\, dt = \Delta T \tag{7.94}$$

Esto es, el trabajo realizado sobre $\mathcal{B}$ es igual a su cambio en energía cinética. Se deja como ejercicio para el lector demostrar que la Ec.(7.94) es de hecho la suma de las dos "subecuaciones" (7.78) y (7.86).

Ejemplo 7.16

Determinar el trabajo efectuado sobre la barra doblada del Ejemplo 7.14 por un motor que la lleva hasta una velocidad ω_0 desde el reposo (ver el diagrama).



Solución

El centro de masa C no se mueve, por lo que la Ec.(7.73) da, en este caso,

$$T_f = \frac{1}{2}\omega \cdot \mathbf{H}_C \qquad (1)$$

Como ω tiene sólo una componente $\hat{\mathbf{k}}$, que es $\omega_0\hat{\mathbf{k}}$, podemos sustituir la Ec. (7.11) en (1) y obtener:

$$T_f = \frac{1}{2}\omega_0(I^C_{xz}\overset{0}{\cancel{\omega_x}} + I^C_{yz}\overset{0}{\cancel{\omega_y}} + I^C_{zz}\overset{\omega_0}{\cancel{\omega_z}}) \qquad (2)$$

Notamos que aunque I^c_{xz} no es cero, no tiene efecto en la energía cinética de $\mathcal{B}$ ya que está multiplicado por ω_x, que queda forzada a anularse por los cojinetes alineados con z.

Entonces el trabajo hecho por el motor sobre $\mathcal{B}$ está dado simplemente por la Ec. (7.94):

$$W = \Delta T = T_f - \overset{0}{\cancel{T_i}}$$

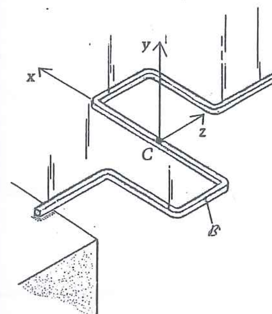
$$= \frac{1}{2}I^C_{zz}\omega_0^2 \qquad (3)$$

$$= \frac{5}{3}m\ell^2\omega_0^2$$

en donde $I^C_{zz} = (10/3)m\ell^2$. El motor tendría naturalmente que efectuar trabajo adicional al dado por (3), para vencer la inercia de su armadura rotatoria, la fricción en los cojinetes y la banda y la resistencia del aire.

Consideraremos ahora un ejemplo en tres dimensiones en el que los productos de inercia intervienen en el cálculo de la energía cinética.

Ejemplo 7.17



Evaluar la energía cinética perdida por la barra del Ejemplo 7.14 cuando esta golpea la mesa, como se muestra en la figura.

Solución

Durante el impacto con la mesa, los cuerpos no se comportan rígidamente. La energía cinética perdida por la barra $\mathcal{B}$ se transforma en ruido, calor, vibración y en deformaciones elásticas y permanentes. En el Ejemplo 7.14 se obtuvieron $\mathbf{v}_c$ y ω_i justamente antes y después del impacto; ahora se utilizarán esos vectores para encontrar la energía cinética perdida por $\mathcal{B}$. Justamente después del impacto,

$$T_f = \frac{1}{2}mv^2_{C_f} + \frac{1}{2}\omega_f \cdot \mathbf{H}_{C_f}$$

El término $\omega_f \cdot \mathbf{H}_{C_f}$ puede escribirse, usando la Ec.(7.11), de la manera siguiente. (Adviértase que ω_y y dos de los productos de inercia son aquí nulos.)

$$\omega_f \cdot \mathbf{H}_{C_f} = \omega_x(I^C_{xx}\omega_x + \overset{0}{\cancel{I^C_{xy}}}\overset{0}{\cancel{\omega_y}} + I^C_{xz}\omega_z)$$
$$+ \omega_y(\overset{0}{\cancel{I^C_{yx}}}\omega_x + I^C_{yy}\overset{0}{\cancel{\omega_y}} + \overset{0}{\cancel{I^C_{yz}}}\omega_z)$$
$$+ \omega_z(I^C_{zx}\omega_x + \overset{0}{\cancel{I^C_{zy}}}\overset{0}{\cancel{\omega_y}} + I^C_{zz}\omega_z)$$
$$= I^C_{xx}\omega_x^2 + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + I^C_{zz}\omega_z^2$$

Usando este resultado y las Ecs. (11') y (12) del Ejemplo 7.14, obtenemos:

$$T_f = \frac{1}{2}(8m)\left[\frac{(23e - 120)\sqrt{2gh}}{143}\right]^2 + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{60(1+e)\sqrt{2gh}}{143\ell}\right]^2\frac{22}{3}m\ell^2\right.$$
$$+ 2\left[\frac{60(1+e)\sqrt{2gh}}{143\ell}\right]\left[\frac{36(1+e)\sqrt{2gh}}{143\ell}\right](-2m\ell^2)$$
$$\left. + \left[\frac{36(1+e)\sqrt{2gh}}{143\ell}\right]^2\frac{10}{3}m\ell^2\right\}$$

la que después de simplificar queda

$$T_f = mgh(1.29e^2 + 6.71)$$

La energía cinética inicial (justo antes de la colisión) era

$$T_i = \frac{1}{2}(8m)(\sqrt{2gh})^2 = 8mgh$$

Entonces el cambio en energía cinética de la barra doblada está dado por

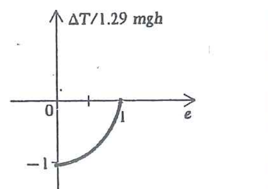
$$\Delta T = T_f - T_i = mgh(1.29e^2 - 1.29)$$

Vemos que si $e = 1$ (colisión elástica) no ocurre ninguna pérdida de energía cinética y por ello no se realiza trabajo en hacer variar a T.

La pérdida de energía varía cuadráticamente, como se ve en la figura, con un porcentaje máximo de pérdida (cuando e = o) de

$$\frac{1.29mgh}{8mgh} \cdot 100 = 16.1\%$$

en este caso. Como el punto de colisión es el extremo de la barra, 83.9% de la energía cinética se retiene. Si hubiese golpeado a la mesa el centro de masa de la barra, *toda* la energía cinética se habría perdido para el caso e = 0.



Problemas / Sección 7.6

7.101 Encuentre la energía cinética del disco $\mathcal{B}$ en el Problema 6.27

7.102 El centro de masa *C* de un giroscopo $\mathcal{G}$ está fijo. Demuestre que la energía cinética de $\mathcal{G}$ es

$$\tfrac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + \tfrac{1}{2}C(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

en donde ϕ, θ, ψ son los ángulos de Euler y A, A, C son los momentos principales de inercia de $\mathcal{G}$ en C.

7.103 Calcule la energía cinética de la rueda en el Problema 6.49 y úsela para deducir el trabajo efectuar por el joven al llevarla a su velocidad final desde el reposo.

7.104 Un disco $\mathcal{D}$ de 10 kg de masa y 25 cm de radio está soldado a 45° a una barra vertical $\mathcal{S}$ (Fig. P7.104). La barra empieza a girar desde el reposo hasta alcanzar una rapidez angular constante ω_f = 10 rad/s.

a. ¿Cuánto trabajo se realiza para llevar al sistema a esta velocidad?
b. Encuentre la fuerza y el par que actúan sobre el disco en *C* cuando éste se encuentra girando con la rapidez ω_f.

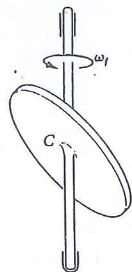
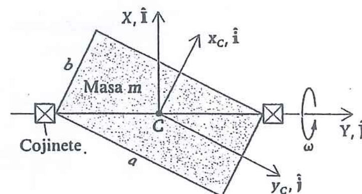


Figura P7.104

7.105 Una placa delgada rectangular (Fig. P7.105) es llevada desde el reposo hasta una velocidad ω_0 respecto a un eje horizontal *Y*.

a. Encuentre el trabajo realizado.
b. Si dos masas concentradas, cada una con valor $\frac{m}{2}$, se agregan sobre el eje x_c (vea la figura) a la placa, determine la distancia *d* desde el centro de masa que eliminará las reacciones en los cojinetes.



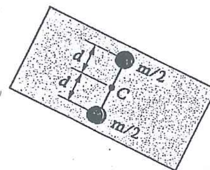


Figura P7.105

* **7.106** El cuerpo rígido en la Fig. P7.106 consiste en un disco $\mathcal{D}$ y una barra $\mathcal{R}$, soldados perpendicularmente, como se muestra en la figura. Si el cuerpo gira hasta alcanzar la rapidez angular ω_o respecto al eje *z*, ¿cuánto trabajo se efectuó para lograr esto (excluyendo el requerido para vencer la resistencia de la fricción)?

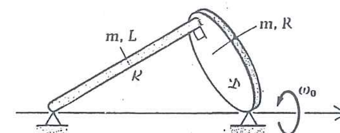


Figura P7.106

* **7.107** La Fig. P7.107 muestra una placa triangular delgada homogénea triangular de masa *m*, base *a* y altura 2*a*. Está soldada a un eje ligero que puede girar libremente en las chumaceras en *A* y en *B*. Se dan

$$I_{xx}^A = \frac{2ma^2}{3} \qquad I_{yy}^A = \frac{ma^2}{6} \qquad I_{xz}^A = I_{yz}^A = 0$$

$$I_{zz}^A = \frac{5ma^2}{6} \qquad I_{xy}^A = \frac{-ma^2}{6}$$

a. Si la placa gira con rapidez angular constante ω, encuentre el par que debe aplicarse al eje y las reacciones dinámicas en los cojinetes.
b. Determine los ejes principales en *A* así como los momentos principales de inercia asociados. Dibuje los ejes en un croquis.
c. Calcule el radio de un agujero producido en *C* que elimine las reacciones en los cojinetes. Dé la respuesta en términos de *m* y ρt (densidad por espesor) de la placa.
d. Encuentre el trabajo realizado al llevar la placa desde el reposo hasta una rapidez angular ω.

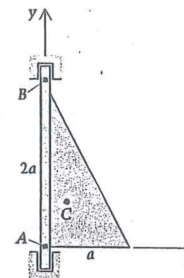


Figura P7.107

* **7.108** Una placa triangular equilátera delgada $\mathcal{P}$ de lado *s* está soldada a la barra eje vertical en *A*, en la Fig. P 7.108. La barra eje se lleva del reposo a una rapidez ω_0 por medio de un motor.

a. ¿Cuánto trabajo se requiere efectuar sobre el sistema?
b. Encuentre la fuerza y el par que actuará sobre la placa en *A* al girar ésta con rapidez ω_0 y el motor se desconecta.

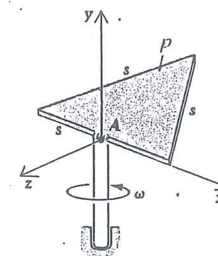


Figura P7.108

7.109 Dos masas concentradas, m_1 = 10 kg y m_2 = 20 kg, están unidas por una barra delgada m_3 de 15 kg y 1.5 m de longitud. Como se muestra en la Fig. P7.109, $(\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$ son vectores unitarios fijos en dirección en el marco inercial $\mathcal{I}$, e $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ son paralelos a los ejes principales fijos en *C* en el cuerpo combinado. En dos instantes t_1 y t_2, las velocidades de *C* y las velocidades angulares del cuerpo combinado son:

$$\mathbf{v}_C(t_1) = \hat{I} + 2\hat{J} \text{ m/s} \qquad \omega(t_1) = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ rad/s}$$

$$\mathbf{v}_C(t_2) = 3\hat{J} - 4\hat{K} \text{ m/s} \qquad \omega(t_2) = 3\hat{j} - \hat{k} \text{ rad/s}$$

Calcule el trabajo total realizado sobre el sistema entre t_1 y t_2.

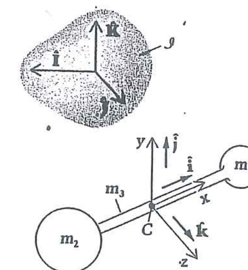


Figura P7.109

7.110 Encuentre la energía cinética de la muela en el Problema 7.68. ¿Es igual al trabajo hecho por un motor sobre $\mathcal{S}$ al llevar al sistema a su rapidez o velocidad final? (Desprecie las masas de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{B}$.)

* 7.111 Un anillo está soldado a una barra en el punto A como se muestra en la Fig. P7.111. La sección transversal y la densidad del anillo y la barra son iguales. El cuerpo combinado se libera tocándolo ligeramente cuando el punto A está en su posición más alta; el extremo B de la barra está unido a un plano liso por medio de una junta esférica. En el instante en que A alcanza su posición más baja, encuentre la relación entre las componentes de velocidad angular horizontal y vertical del cuerpo.

7.112 Si en el problema anterior, el plano tiene suficiente fricción para impedir el resbalamiento, encuentre la magnitud de la velocidad angular cuando A toca al plano.

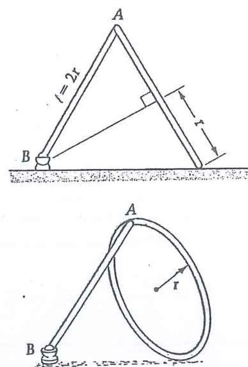


Figura P7.111

Problemas para computadora / Capítulo 7

* 7.113 Aplique una computadora para generar los datos necesarios para graficar los valores máximos de $v_Q^2/(gR)$ contra α del Ejemplo 7.13, para $0 < \alpha \leq \pi/2$.

Respuestas a las preguntas / Capítulo 7

P7.1 Como vimos en el Capítulo 6, $\omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$ depende sólo de cómo un conjunto de vectores unitarios anclados en $\mathcal{B}$, cambian sus direcciones en $\mathcal{I}$. La velocidad angular es una constante respecto a la integración en un instante particular sobre el volumen del cuerpo.

P7.2 Cuando dijimos que $n_x = +\sqrt{1/6}$, o sea que tomamos la raíz cuadrada positiva, escogimos y' en la dirección que forma un ángulo agudo con x_B; si hubiésemos escogido $-\sqrt{1/6}$, habríamos obtenido la dirección opuesta para y'. Si $I_{x'y'}$ hubiese sido diferente de cero, el signo de la respuesta habría sido también opuesto.

P7.3 El momento de inercia respecto a cualquier recta ℓ a través de cualquier punto P que no sea C, es mayor que el momento de inercia respecto a la recta por C paralela a ℓ, debido al término md^2 y así el mínimo I en C es el menor para todo el cuerpo.

P7.4 En $\mathcal{B}$, todo en $\mathbf{H}_c$ (Ec.7) era constante por lo que $\Sigma \mathbf{M}_C = \omega_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C$. Si hubiéramos usado las ecuaciones de Euler, habría habido derivadas de las componentes de ω por considerar; específicamente, la componente v_c/L no es constante en dirección si se formula en el marco (cuerpo) $\mathcal{D}$.

P7.5 Si f_z no puede existir de acuerdo con la Ec.(13), el movimiento no puede tener lugar. La parte inferior del disco resbalará hacia el interior (hacia el eje Y_o) y se separará por ello del piso.

P7.6 No. La Ec.(9) muestra que la suma $N + C_y$ es igual al peso mg de $\mathcal{D}$. Las fuerzas N y C_y no pueden determinarse separadamente usando sólo las ecuaciones de movimiento.

P7.7 En la figura original se ve que ω, con componentes según $\hat{\mathbf{j}}$ y según $-\hat{\mathbf{k}}$, no es paralela a un eje principal de $\mathcal{D}$. Entonces, ω no puede ser paralela a $\mathbf{H}_c$.

P7.8 Al deducir (7.57), si $\dot{\theta} = 0$ hemos dividido ambos miembros de una ecuación entre cero. Este resultado se usa entonces para obtener $\dot{\psi}$ en (7.60)

Cuestionario de repaso / Capítulo 7

¿Verdadero o falso?

1. Los productos de inercia asociados a ejes principales siempre se anulan, pero sólo en el centro de masa.

2. Si los momentos principales de inercia en un punto son distintos, entonces los ejes principales de inercia asociados a ellos son ortogonales.

3. El momento de inercia máximo respecto a cualquier recta por P del cuerpo rígido $\mathcal{B}$ es el máximo momento de inercia principal en P.

4. El movimiento general es un tema mucho más difícil que el movimiento plano; esto se debe en parte al hecho de que no son lineales las ecuaciones diferenciales cinemáticas o cinéticas que gobiernan el movimiento de orientación del cuerpo.

5. Si resolvemos las ecuaciones de Euler (7.42), conocemos inmediatamente la orientación del cuerpo rígido en el espacio.

6. El Sol y la Luna ejercen pares gravitacionales sobre la Tierra, y causan la precesión del eje de nuestro planeta.

7. Si en un cierto instante el momento de inercia de la masa del cuerpo $\mathcal{B}$ respecto a un eje por C paralelo al vector velocidad angular es I, entonces la energía cinética de $\mathcal{B}$ en ese instante es $\frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$.

8. La precesión lunisolar de la Tierra es el resultado de su abultamiento en el ecuador y de la inclinación de su eje.

9. La energía cinética perdida durante una colisión de dos cuerpos no depende de las velocidades angulares de los cuerpos antes del impacto.

10. Los principios del trabajo y la energía y del impulso y la cantidad de movimiento (o ímpetu) son integrales generales de las ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido.

11. A veces es mejor usar los productos de inercia en $\Sigma M_C = {}^{\prime}\dot{H}_C$ que calcular los momentos y ejes principales de inercia para poder utilizar las ecuaciones de Euler (7.42)

12. En la precesión uniforme con el ángulo de nutación $\theta = 90°$, el vector de rotación siempre precesion alejándose del vector momento.

Respuestas: 1 F; 2 V; 3 V; 4 V; 5 F; 6 V; 7 V; 8 V; 9 F; 10 V; 11 V; 12 F.

Capítulo 8 Temas Especiales/ Vibraciones, volumen de control y fuerza central

8.1 Introducción a las vibraciones

Vibración es un término usado para describir movimientos oscilatorios de un cuerpo o de un sistema de cuerpos. Estos movimientos pueden ser causados por perturbaciones aisladas como cuando la rueda de un automóvil golpea contra un, o por fuerzas fluctuantes como en el caso de las vibraciones de las paneles del fuselaje de un avión en respuesta al ruido de los motores. Similarmente, los movimientos oscilatorios del terreno generados por un sismo ocasionan vibraciones en los edificios. En cada uno de estos casos el movimiento indeseable puede causar molestias a los ocupantes; más aún, los esfuerzos oscilantes en el cuerpo pueden conducir a una falla por fatiga de la estructura, vehículo o maquinaria.

Vibración libre

Como ejemplo simple de un oscilador mecánico considere el bloque rígido unido a un resorte lineal (Fig. 8.1). El bloque está obligado a trasladarse sólo verticalmente; basta un sólo parámetro (escalar) para establecer su posición y por ello el sistema se denomina **sistema con un grado de libertad**. Se elige z como parámetro y corresponde $z = 0$ corresponder a la configuración en que el resorte no está ni alargado ni comprimido.

Usando un diagrama de cuerpo libre para el bloque en una posición arbitraria (Fig. 8.2), la primera ley de Euler da

$$m\ddot{z} = mg - kz$$

o bien

$$m\ddot{z} + kz = mg \tag{8.1}$$

que es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes que describe el movimiento del bloque. La ecuación diferencial no es homogénea (el lado derecho no es cero) como consecuencia de la elección del origen del parámetro de desplazamiento z; si hacemos la sustitución $y = z - mg/k$, la Ec. (8.1) se transforma en

$$m\ddot{y} + ky = 0 \tag{8.2}$$

que es una ecuación diferencial *homogénea*. No es una coincidencia que esto ocurra cuando la variable desplazamiento se escoge de manera que es nula cuando el bloque se encuentra en una configuración de equilibrio, o sea cuando el resorte está comprimido una magnitud igual a mg/k.

El movimiento descrito por una ecuación como la (8.2) se denomina **vibración libre** ya que no hay fuerza externa presente (externa al sistema resorte-masa) que lo excite.

Reexpresando la Ec. (8.2) obtenemos.

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

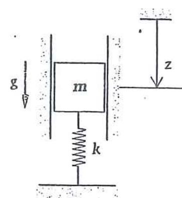


Figura 8.1

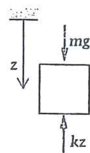


Figura 8.2

o definiendo $\omega_n = \sqrt{k/m}$,

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0 \tag{8.3}$$

cuya solución general es

$$y = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t \tag{8.4}$$

o bien

$$y = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \varphi) \tag{8.5}$$

en donde

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \text{y} \qquad \tan \varphi = \frac{B}{A}$$

La variable y expresada en la forma (8.4) o en la (8.5) es una función **armónica simple** del tiempo; ω_n recibe el nombre de **frecuencia circular natural**, C se llama **amplitud** del desplazamiento y φ es el **ángulo de fase** que mide el adelanto de y respecto a la función de referencia, sen $\omega_n t$. La función armónica simple es periódica y su **período** es $\tau_n = 2\pi/\omega_n$. El número de ciclos de una unidad de tiempo se llama **frecuencia**, f_n y es igual a $1/\tau_n = \omega_n/2\pi$ Cuando la unidad de tiempo es el segundo, la unidad de frecuencia es el hertz (Hz), o sea 1 Hz = 1 C/s.

Las constantes A y B en (8.4), o equivalentemente C y φ en (8.5), se determinan a partir de las condiciones iniciales de posición y velocidad; por tanto, si

$$y(0) = y_0$$

y

$$\dot{y}(0) = v_0$$

entonces

$$B = y_0$$

y

$$A = \frac{v_0}{\omega_n}$$

Veamos ahora lo que podría parecer un caso enteramente distinto, esto es un cuerpo rígido obligado a girar alrededor de un eje horizontal fijo (que pasa por O en la Fig. 8.3). Puesto que la única libertad cinemática que el cuerpo tiene es la de rotación, un solo ángulo es suficiente para describir una configuración del cuerpo. Sea θ este ángulo, descrito como se muestra en la figura; vemos que cuando $\theta = 0$ el centro de masa C se encuentra directamente abajo del pivote O.

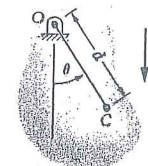


Figura 8.3

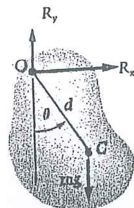


Figura 8.4

El diagrama de cuerpo libre en un instante arbitrario durante el movimiento, en el que se ha despreciado la fricción, se muestra en la Fig. 8.4. Sumando momentos alrededor del eje de rotación obtenemos.

$$-mg\, d \operatorname{sen} \theta = I_0 \ddot{\theta} \qquad (8.6)$$

en donde I_0 es el momento de inercia de la masa respecto al eje de rotación. La Ec. (8.6) es una ecuación diferencial no lineal porque sen θ es una función no lineal de θ, pero si nos limitamos a considerar ángulos muy pequeños para los cuales sen $\theta \approx \theta$, la Ec.(8,6) se vuelve

$$I_0 \ddot{\theta} + (mg\, d)\theta = 0 \qquad (8.7)$$

Entonces θ es una función armónica simple:

$$\theta = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

en donde ahora

$$\omega_n^2 = \frac{mg\, d}{I_0}$$

Los dos ejemplos anteriores tienen una característica importante en común: el movimiento cerca de la configuración de equilibrio está regido por una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y en cada caso el movimiento es armónico simple; un detalle que los diferencia es que en el caso del bloque con resorte, el campo gravitacional no tiene otra función que la de establecer la configuración de equilibrio; en particular, la frecuencia natural no depende de la intensidad g del campo. En el segundo caso, en donde el cuerpo se comporta básicamente como un péndulo, el campo gravitacional proporciona la "acción restauradora" y la frecuencia natural es proporcional a $\sqrt{g}$.

Ejemplo 8.1

Obtener la frecuencia natural de las oscilaciones pequeñas alrededor de la posición de equilibrio de una esfera uniforme que rueda sobre una superficie cilíndrica.

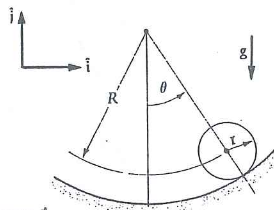


Figura 1

Solución

Sea m la masa de la esfera, R el radio de la trayectoria de su centro y θ la coordenada angular polar que localiza el centro como se muestra en la Fig. 1.

Figura 2

Entonces se tiene

$$\mathbf{a}_C = -R\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{e}}_R + R\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta$$

y la aceleración angular de la esfera es $\alpha = -(R\ddot{\theta}/r)\hat{\mathbf{k}}$ debido a la condición libre de resbalamiento. Introducimos ahora $\mathbf{a}_C$ y en las ecuaciones de movimiento:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_C \qquad (1)$$

De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre en la Fig. 2, las ecuaciones correspondientes a (1) en las direcciones $\hat{\mathbf{e}}_R$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ son:

$$F - mg \operatorname{sen} \theta = mR\ddot{\theta} \qquad (2)$$

y

$$N - mg \cos \theta = mR\dot{\theta}^2 \qquad (3)$$

Tomando momentos respecto a C, tenemos

$$Fr = \left(\frac{2}{5} mr^2\right)\left(-\frac{R\ddot{\theta}}{r}\right)$$

o bien

$$F = -\frac{2}{5} mR\ddot{\theta} \qquad (4)$$

Eliminando la fuerza de fricción F entre las Ec. (2) y (4) obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{7}{5} mR\ddot{\theta} + mg \operatorname{sen} \theta = 0$$

Para ángulos θ pequeños, sen $\theta \approx \theta$,

$$\frac{7}{5} R\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

y entonces

$$\omega_n^2 = \frac{5g}{7R}$$

o bien

$$\omega_n = 0.845 \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Vibración amortiguada

El movimiento armónico simple en nuestros ejemplos de vibración libre tiene un aspecto que entra en conflicto con nuestra experiencia en el mundo real; se refiere a que el movimiento calculado persiste sin detenerse jamás. La intuición indica que deberían tenerse oscilaciones

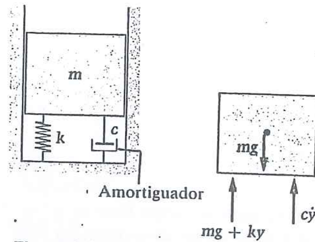


Figura 8.5

cada vez más pequeñas y finalmente alcanzarse el reposo. Por supuesto, la explicación reside en el hecho de que no hemos incorporado en el modelo analítico ningún mecanismo disipador de energía. Para hacerlo así, volveremos al sistema simple del bloque unido al resorte e introduciremos un nuevo elemento: un amortiguador viscoso (Fig. 8.5). La *tasa* de alargamiento de este elemento es proporcional a la fuerza aplicada; el factor de proporcionalidad lo llamaremos C, de modo que la fuerza es C veces la rasa de alargamiento.

De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre en la Fig. 8.5 y estableciendo la posición de equilibrio en $y = 0$, como lo hicimos antes, se tendrá

$$m\ddot{y} = mg - (mg + ky) - c\dot{y}$$

o bien

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \qquad (8.8)$$

La presencia del término $c\dot{y}$ en (8.8) tiene un efecto profundo en la solución de la ecuación diferencial y, por ende, en la descripción del movimiento. Soluciones para (8.8) pueden encontrarse a partir de

$$y = Ae^{rt} \qquad (8.9)$$

en donde A es una constante arbitraria y r es un parámetro característico. Sustituyendo (8.9) en (8.8) obtenemos

$$(mr^2 + cr + k)Ae^{rt} = 0 \qquad (8.10)$$

que se satisface no trivialmente (o sea, para A 0) con

$$mr^2 + cr + k = 0 \qquad (8.11)$$

Esta ecuación característica tiene dos raíces dadas por

$$r = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad (8.12)$$

Excepto para el caso en que $(c/2m)^2 = k/m$, las raíces son distintas; si las llamamos r_1 y r_2, la solución general de (8.8) es

$$y = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t}$$

En el caso en que $(c/2m)^2 = k/m$, hay sólo una raíz repetida, $r = -c/2m$, y la sustitución directa mostrará que hay una solución para la Ec. (8.8) de la forma $te^{-(c/2m)t}$, de manera que la solución general en tal caso es

$$y = A_1e^{-(c/2m)t} + A_2te^{-(c/2m)t} \qquad (8.13)$$

Con las condiciones iniciales

$$y(0) = y_0$$

y

$$\dot{y}(0) = v_0$$

encontramos que

$$A_1 = y_0$$

Como

$$A_2 = v_0 + \left(\frac{c}{2m}\right)y_0$$

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} = \omega_n^2$$

la solución es

$$y = e^{-\omega_n t}[y_0 + (v_0 + \omega_n y_0)t] \qquad (8.14)$$

Los desplazamientos dados por (8.14) están graficados en la Fig. 8.6 para diversas condiciones iniciales (y_0 positiva pero v_0 positiva y negativa). Son evidentes dos características del movimiento:

1. $y \to 0$ (posición de equilibrio) cuando $t \to \infty$.
2. El movimiento no es oscilatorio; por la posición de equilibrio se pasa solo una vez y únicamente cuando la velocidad inicial es lo suficientemente grande y en dirección opuesta a la del desplazamiento inicial.

En el caso que acabamos de estudiar, el amortiguamiento se llama **amortiguamiento crítico** porque separa dos soluciones matemáticas diferentes: para un amortiguamiento grande las raíces de la ecuación característica (8.11) son ambas reales y negativas, y para un amortiguamiento pequeño las raíces son complejas conjugadas. Si denotamos el amortiguamiento crítico con C_{crit} hemos visto que

$$c_{\text{crit}} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \qquad (8.15)$$

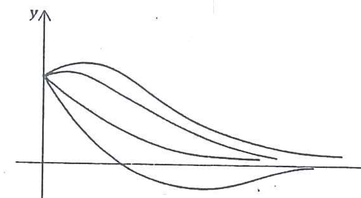


Figura 8.6 Movimiento de un sistema con amortiguamiento crítico.

Consideremos ahora el caso en que $C > C_{crit}$; se dice que el sistema mecánico está **sobreamortiguado** o bien que el amortiguamiento es **supercrítico.** En este caso las raíces dadas por (8.12) son ambas reales y negativas pues $(c/2m)^2 > k/m$. Si llamamos esas raíces $-a_1$ y $-a_2$, con $a_2 > a_1 > 0$, entonces la solución general de la ecuación diferencial del movimiento es

$$y = A_1 e^{-a_1 t} + A_2 e^{-a_2 t} \tag{8.16}$$

El movimiento descrito aquí no es distinto cualitativamente del caso con amortiguamiento crítico. Para un conjunto dado de condiciones iniciales, la Ec. (8.16) da un acercamiento más lento a $y = 0$ que la Ec. (8.13). Esto es, el movimiento sobreamortiguado tiene más "inercia" que el movimiento con amortiguamiento crítico, como era de esperar debido al mayor amortiguamiento.

Finalmente consideraremos el caso en que el sistema se denomina **subamortiguado**; esto es, $C < C_{crit}$. Las raíces dadas por (8.12) son las complejas conjugadas

$$-\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

en donde $i = \sqrt{-1}$. Es posible expresar la solución general de la ecuación diferencial como

$$y = e^{-(c/2m)t}(A_1 \operatorname{sen} \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t) \tag{8.17}$$

en donde $\omega_d := \sqrt{k/m - (c/2m)_2}$. Una gráfica típica asociada a (8.17) se muestra en la Fig. 8.7. Notamos que, como en los casos precedentes, $y \to 0$ cuando $t \to \infty$; sin embargo, el movimiento es oscilatorio. Vemos que el movimiento armónico simple obtenido para el modelo sin amortiguamiento está dado por (8.17) con $c = 0$. Más aún, vemos que con un amortiguamiento de poca intensidad (c pequeño) el modelo analítico que no incluye amortiguamiento describe adecuadamente el movimiento durante las primeras oscilaciones. Este es el caso (amortiguamiento subcrítico) de la mayor importancia práctica en los estudios de vibraciones.

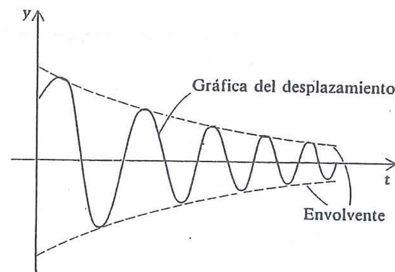
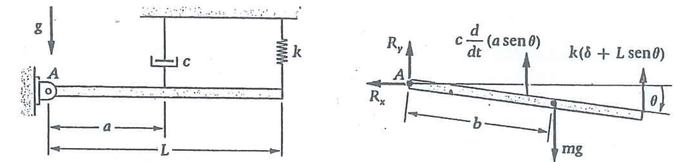


Figura 8.7 Movimiento de un sistema subamortiguado.

Ejemplo 8.2

Encontrar la constante c que da el amortiguamiento crítico de la barra rígida en movimiento cercano a la posición de equilibrio. Ver el diagrama.



Solución

Nos limitaremos a considerar ángulos θ, pequeños, por lo que podemos ignorar cualquier inclinación del amortiguador o del resorte, o sea supondremos que estos permanecen verticales al girar la barra un ángulo θ. Si sumamos momentos respecto a A, e I_A es el momento de inercia de masa de la barra respecto al eje de rotación, obtenemos:

$$I_A\ddot{\theta} = mg(b\cos\theta) - \left[c\frac{d}{dt}(a\operatorname{sen}\theta)\right](a\cos\theta) - k(\delta + L\operatorname{sen}\theta)(L\cos\theta) \quad (1)$$

en donde δ es el alargamiento del resorte en equilibrio. Para valores pequeños de θ (para los que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$), linealizamos la Ec. (1) y obtenemos

$$I_A\ddot{\theta} = mgb - ca^2\dot{\theta} - kL\delta - kL^2\theta$$

Por supuesto, $\theta = 0$ es la configuración de equilibrio de modo que

$$mgb = kL\delta$$

La ecuación diferencial lineal que rige el movimiento es entonces

$$I_A\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + kL^2\theta = 0$$

Asociando los coeficientes de $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ con los de $y, \dot{y}, \ddot{y}$ en la Ec. (8.8), obtenemos para el amortiguamiento crítico

$$c_{crit}a^2 = 2\sqrt{(kL^2)I_A}$$

o bien

$$c_{crit} = 2\frac{L}{a^2}\sqrt{kI_A}$$

Cualquier valor c menor que c_{crit} ocasionará que las oscilaciones adquieran amplitudes decrecientes.

Vibración forzada

Fuerzas externas fluctuantes pueden tener efectos destructivos en los sistemas mecánicos; esta es la motivación primaria para estudiar las vibraciones mecánicas. Es común que la carga externa sea una función periódica del tiempo, y en tal caso la carga puede expresarse como una serie de funciones armónicas simples (serie de Fourier). Consecuentemente es instructivo considerar el caso en que la carga es armónica simple. Para el sistema masa-resorte-amortiguador mostrado en la Fig.8.8, la ecuación diferencial de movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P \operatorname{sen} \omega t \tag{8.18}$$

La solución general está compuesta de dos partes: una solución *particular* (cualquiera que satisfaga a la ecuación diferencial) y una llamada solución *complementaria* (la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada). Se puede encontrar una solución particular de la forma $x = X \operatorname{sen}(\omega t - \varphi)$. Si sustituimos esta expresión en (8.18) obtenemos

$$-m\omega^2 X \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + c\omega X \cos(\omega t - \varphi) + kX \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) = P \operatorname{sen} \omega t$$

ó

$$(k - m\omega^2)X(\operatorname{sen} \omega t \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \omega t) + c\omega X(\cos \omega t \cos \varphi + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varphi) = P \operatorname{sen} \omega t$$

ó

$$[(k - m\omega^2) \cos \varphi + c\omega \operatorname{sen} \varphi]X \operatorname{sen} \omega t - [(k - m\omega^2) \operatorname{sen} \varphi - c\omega \cos \varphi]X \cos \omega t = P \operatorname{sen} \omega t$$

Para que esta ecuación se satisfaga en todo instante

$$[(k - m\omega^2) \cos \varphi + c\omega \operatorname{sen} \varphi]X = P \tag{8.19}$$

y

$$-c\omega \cos \varphi + (k - m\omega^2) \operatorname{sen} \varphi = 0 \tag{8.20}$$

De (8.20) obtenemos

$$\tan \varphi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \tag{8.21}$$

de manera que

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{c\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

y

$$\cos \varphi = \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

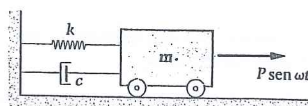


Figura 8.8

Sustituyendo estas expresiones para sen φ y cos φ en (8.19),

$$\left[\frac{(k - m\omega^2)^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} + \frac{(c\omega)^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}\right]X = P$$

de modo que

$$X = \frac{P}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \tag{8.22}$$

Podemos ahora escribir la solución completa de la ecuación diferencial (8.18):

$$x = x_c(t) + X \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) \tag{8.23}$$

en donde x_c es la solución complementaria y es uno de los tres casos enumerados en la sección precedente. Esto es, la forma de x_c depende de si el sistema es sobreamortiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado. Sin embargo, en cada uno de tales casos, el exponente negativo ocasiona que la función tienda a cero cuando el tiempo es muy grande. Así para un tiempo de gran magnitud, x_c tiende a cero y $x(t)$ tiende a la solución particular. Por este motivo la solución particular armónica simple se denomina **desplazamiento de estado permanente**, ya que representa el comportamiento a largo plazo del sistema.

Notemos que el movimiento de estado permanente es una función armónica simple con amplitud x y defasada un ángulo φ respecto a la función de excitación (fuerza). Podemos escribir esto en una forma conveniente dividiendo el numerador y el denominador de (8.21) y (8.22) entre k, resultando

$$\tan \varphi = \frac{c\omega/k}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \quad \left(\text{en donde } \omega_n^2 = \frac{k}{m}\right) \tag{8.24}$$

y

$$X = \frac{P/k}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (c\omega/k)^2}} \tag{8.25}$$

Observemos que para la cantidad adimensional $c\omega/k$ se cumple:

$$\frac{c\omega}{k} = \frac{c\omega}{m\omega_n^2} = \frac{2c}{2m\omega_n}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

pero $2m\omega_n = C_{crit}$, por lo que si llamamos ζ a la relación de amortiguamiento (c/c_{crit}),

$$\frac{c\omega}{k} = 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \tag{8.26}$$

y

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \tag{8.27}$$

y

$$X = \frac{P/k}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \tag{8.28}$$

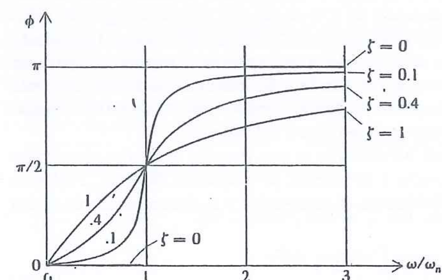


Figura 8.9

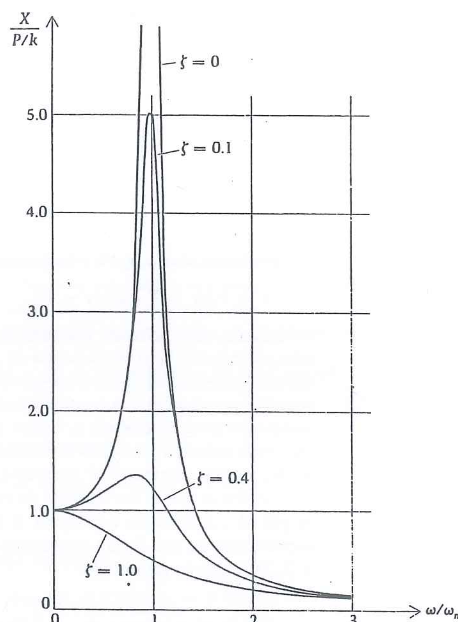


Figura 8.10

El ángulo de fase φ y la amplitud adimensional del desplazamiento kX/P están graficados contra la relación de frecuencias ω/ω_n en las Figs. (8.9) y (8.10), respectivamente, para varios valores de la relación de amortiguamiento ζ. Vemos que con amortiguamiento pequeño, ocurren grandes amplitudes de los desplazamientos cuando la frecuencia de excitación ω es cercana a la frecuencia natural ω_n. Este fenómeno se llama **resonancia** y el deseo de evitarla ha conducido al desarrollo de métodos para estimar las frecuencias naturales de sistemas mecánicos. Nótese que las curvas de respuesta del estado permanente son insensibles al amortiguamiento para valores pequeños de este (digamos $\zeta < 0.1$) siempre que no estemos en la cercanía de $\omega/\omega_n = 1$. Esto es una observación importante, porque con frecuencia en la práctica del ingeniero se tienen razones para creer que el amortiguamiento es pequeño pero no se dispone de información cuantitativa acerca del mismo.

Terminamos esta sección presentando la fuente común de carga externa armónica simple, o sea un desbalance en una parte de una máquina rotatoria. Consideremos que la máquina consta de dos partes; la primera, de masa m, es un cuerpo rígido restringido a girar alrededor de un eje fijo en el segundo cuerpo (de masa m_2) que se traslada respecto al marco inercial de referencia. Supongamos que el centro de masa del cuerpo rotatorio tiene una excentricidad e respecto al eje de rotación, y que el cuerpo gira con velocidad angular constante ω. (Fig. 8.11).

De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre en la Fig. 8.11 tenemos

$$-kx - c\dot{x} = m_2\ddot{x} + m_1\frac{d^2}{dt^2}(x + e \operatorname{sen} \omega t)$$

$$= (m_1 + m_2)\ddot{x} - m_1 e\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$$

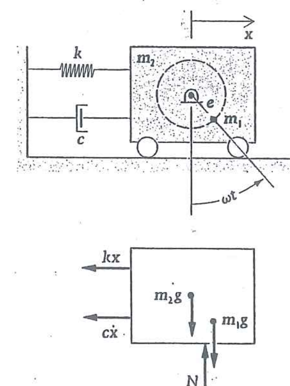


Figura 8.11

Si m es la masa total de la máquina, $m = m_1 + m_2$ y

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_1 e\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$$

Entonces la amplitud de la carga "externa" senoidal es $m_1 e\omega^2$ y su frecuencia es la velocidad angular del elemento rotatorio.

Ejemplo 8.3

Una parte de una máquina con peso de 200 lb, tiene un elemento rotatorio con un desbalance ($= m_1 eg$, con $g = 386$ plg/s²) de 5 lb·plg, y una velocidad de operación de 1200 rpm. Cuatro resortes, cada uno con rigidez de 1500 lb/plg, soportan la máquina cuyo bastidor está obligado a trasladarse verticalmente. La relación de amortiguamiento es $\zeta = 0.3$. Calcular el desplazamiento de estado permanente del bastidor.

Solución

El módulo efectivo de los resortes es

$$k = 4(1500) = 6000 \text{ lb/plg}$$

por lo que

$$\omega_n = \sqrt{\frac{6000}{200/386}}$$

$$= 108 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \frac{1200}{60}(2\pi)$$

$$= 126 \text{ rad/s}$$

La fuerza externa es:

$$P = m_1 e\omega^2 = \left(\frac{5}{386}\right)(126)^2 = 206 \text{ lb}$$

De la Ec. (8.28) obtenemos la amplitud:

$$X = \frac{P/k}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}$$

$$= \frac{206/6000}{\sqrt{[1 - (126/108)^2]^2 + [2(0.3)(126/108)]^2}}$$

$$= 0.0436 \text{ plg}$$

El ángulo de fase φ está dado por

$$\tan\varphi = \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2}$$

$$= \frac{2(0.3)(126/108)}{1 - (126/108)^2} = -1.94$$

por lo que $\varphi = 2.05$ rad (o sea, 117°)

Ejemplo 8.4

La máquina del Ejemplo 8.3 (peso = 200 lb, desbalance = 5 lb·, velocidad de operación = 1200 rpm) ha de estar soportada por resortes con amortiguamiento despreciable. Si la máquina estuviera anclada directamente al suelo, la amplitud de la fuerza transmitida al mismo sería de

$$(m_1 e)\omega^2 = 206 \text{ lb}$$

¿Cuál debe ser la rigidez del sistema de soporte para que la amplitud de la fuerza transmitida al piso sea menor de 20 lb?

Solución

La fuerza ejercida sobre el suelo se transmite a través de los resortes y tiene amplitud kx, donde x es la amplitud del desplazamiento de la máquina. De la Ec. (8.28) tenemos

$$kX = \frac{m_1 e\omega^2}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}}$$

o con amortiguamiento despreciable (i.e., $\zeta \approx 0$)

$$kX = \frac{m_1 e\omega^2}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2}} = \frac{m_1 e\omega^2}{|1 - \omega^2/\omega_n^2|}$$

Entonces para

$$\frac{1}{|1 - \omega^2/\omega_n^2|} = \frac{kX}{m_1 e\omega^2} < \frac{20}{206} = 0.0971$$

es claro que $1 - \omega^2/\omega_n^2$ es negativo. Nótese que sólo cuando $\omega^2/\omega_n^2 > 2$ es

$$\frac{1}{|1 - \omega^2/\omega_n^2|} < 1$$

Debemos entonces investigar la condición para la que

$$-\frac{1}{1 - \omega^2/\omega_n^2} < -0.0971$$

o bien

$$\frac{\omega^2}{\omega_n^2} > 1 + \frac{1}{0.0971} = 11.3$$

o bien

$$\omega_n^2 < \frac{(126)^2}{11.3} = 1400$$

ya que $\omega = 126$ rad/s. Pero

$$k = m\omega_n^2 < \frac{200}{386}(1400) = 725 \text{ lb/plg}$$

Entonces para satisfacer las condiciones dadas, la rigidez de los soportes debe ser *menor* que 725 lb/plg.

Si los únicos resortes disponibles tienen una rigidez mayor, el problema puede resolverse incrementando la masa; se podría montar la máquina sobre un bloque de concreto, y luego soportar la máquina y el bloque sobre resortes. Por ejemplo, si los únicos resortes disponibles fueran los del Ejemplo 8.3 para los cuales $k = 6000$ lb/plg, entonces necesitamos que m sea *por lo menos* igual a

$$m = \frac{k}{\omega_n^2} = \frac{6000}{1400}$$

$$= 4.29 \text{ lb-sec}^2/\text{plg}$$

cuyo peso correspondiente es

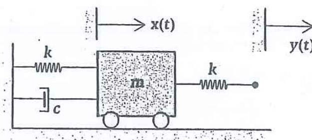
$$(4.29)(386) = 1660 \text{ lb}$$

Por lo tanto, necesitamos una losa o bloque con peso de

$$1660 - 200 = 1460 \text{ lb}$$

Ejemplo 8.5

Encontrar el desplazamiento $x(t)$ de estado permanente si $y(t) = 0.1 \cos 120t$ (en pulgadas), en donde t está en segundos, $m = 0.01$ lb·^{2}/plg, $k = 100$ lb/plg y $c = 2$ lb·s/plg. En particular: (a) ¿Cuál es la amplitud de $x(t)$? (b) ¿Cuál es el ángulo con el que $x(t)$ se adelanta o se atrasa respecto a $y(t)$?



Solución

La ecuación diferencial de movimiento de la masa es

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} - k(x - y)$$

o bien

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 2kx = kY \cos \omega t$$

en donde $Y = 0.1$ plg y $\omega = 120$ rad/s. Usando la Ec. (8.18) vemos que ky juega el mismo papel que la fuerza oscilante P, de modo que la amplitud de estado permanente es

$$X = \frac{kY}{\sqrt{(2k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$= \frac{100(0.1)}{\sqrt{[200 - 0.01(120)^2]^2 + [2(120)]^2}}$$

o bien

$$X = 0.0406 \text{ plg}$$

El ángulo de fase es

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{2k - m\omega^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2(120)}{200 - 0.01(120^2)}\right]$$

$$= 76.9° \text{ or } 1.34 \text{ rad} \qquad \text{(atraso)}$$

Entonces el movimiento de estado permanente es

$$x_{ss} = 0.0406 \cos(120t - 1.34) \text{ plg.}$$

Problemas / Sección 8.1

8.1 Encuentre la frecuencia de las vibraciones pequeñas de la rueda C cuando esta oscila sobre la superficie cilíndrica de la Fig. 8.1. El radio de giro de C con respecto al eje a través de C normal al plano de la figura es k_C. Verifique el resultado del Ej. 8.1 con su respuesta.

8.2-8.4 Encuentre las ecuaciones de movimiento y los periodos de vibración de los sistemas mostrados en las Figs. P8.2 a P8.4. En cada caso, desprecie la masa de la barra rígida a la cual está unida la bola (partícula).

8.5 El cilindro en la Fig. P8.5 está en equilibrio en la posición mostrada. Encuentre la frecuencia natural de la vibración libre respecto a esta posición de equilibrio si no hay resbalamiento.

8.6 Un cilindro uniforme de masa m y radio R está flotando en agua (Fig. P8.6). El cilindro está unido en su punto central superior a un resorte de rigidez o módulo k. Si el peso específico del agua es γ, encuentre la frecuencia del movimiento oscilante vertical del cilindro. *Sugerencia*: La fuerza de flotación dirigida hacia arriba y aplicada en el fondo del cilindro es igual al peso del agua desplazada, en cualquier momento (principio de Arquímedes).

8.7 Es posible determinar experimentalmente el momento de inercia de grandes objetos como el del cohete mostrado en la Fig. P8.7. Si es girado respecto a z un ángulo pequeño y luego se suelta, girará con un periodo de 2.8 s. Encuentre el radio de inercia de giro (o k_{zC}).

8.8 En el problema anterior, cuando el cohete oscila en ángulos pequeños alrededor del eje ll mostrado, el periodo que se observa es de 8 s. Encuentre el valor de k_{xC}.

8.9 Demuestre las aseveraciones (1) y (2) en la página "517".

* **8.10** Determine la frecuencia de las oscilaciones de pequeña amplitud del medio cilindro uniforme, cerca de la posición de equilibrio, mostrado en la Fig. P8.10. Suponga que el cilindro rueda sobre el plano horizontal.

Figura P8.1

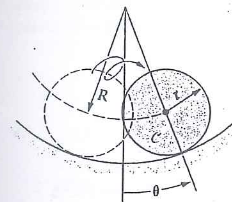


Figura P8.2

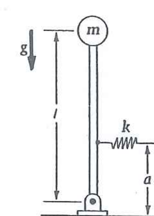


Figura P8.3

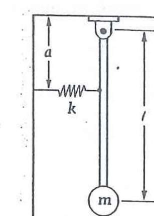
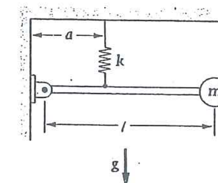


Figura P8.4



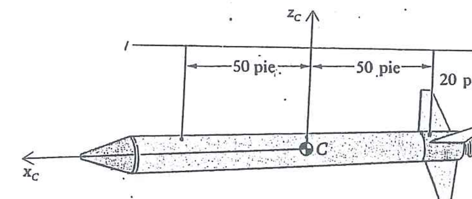


Figura P8.7

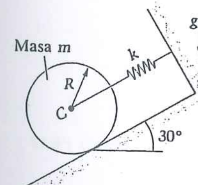


Figura P8.5

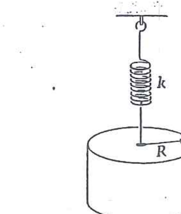


Figura P8.6

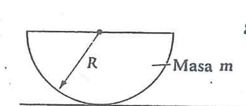


Figura P8.10

8.11 Una partícula de masa m está unida a una cuerda ligera tensa. La cuerda está sometida a una tensión T suficientemente grande para que la cuerda pueda considerarse horizontal para todo propósito práctico cuando el sistema está en equilibrio, como se muestra en la Fig. P8.11. Halle la frecuencia natural de las pequeñas oscilaciones transversales de la partícula.

* 8.12 Las masas en la Fig. P8.12 están unidas por una cuerda inextensible. Halle la frecuencia de las pequeñas oscilaciones si la masa m es bajada ligeramente y luego soltada.

* 8.13 El cilindro sólido homogéneo en la Fig. P8.13 pesa 200 lb y rueda sobre el plano horizontal. Cuando el cilindro está en reposo, los resortes están estirados 2 pie cada uno. El módulo de cada resorte es de 15 lb/pie. Al centro de masa C se le da una velocidad inicial de $\frac{1}{2}$ pie/s hacia la derecha.

a. ¿Qué tan lejos hacia la derecha se desplazará C?
b. ¿Qué tiempo le tomará llegar ahí?
c. ¿Qué tiempo le tomará alcanzar la mitad de la distancia al punto extremo?

8.14 Un saco de cemento de masa m cae sobre el centro de una viga simplemente apoyada como muestra la Fig. P8.14. Suponga que la masa de la viga puede despreciarse, y ésta puede tratarse entonces como un simple resorte lineal de rigidez k. Calcule la deflexión máxima en el centro de la viga.

8.15 Una partícula $\mathcal{P}$ de masa m se mueve sobre un riel horizontal rugoso con coeficiente de fricción μ. (Fig. P8.15). Está unida a un punto fijo sobre el riel por medio de un resorte lineal de módulo k. El alargamiento inicial del resorte es de 7 $\mu gm/k$. Describa el movimiento subsecuente si la partícula parte del reposo. Demuestre que la masa se detiene definitivamente cuando $t = 3\pi/\sqrt{k/m}$. *Sugerencia*: La ecuación diferencial no tiene la forma de la encontrada en el texto; cada vez que la partícula cambia de dirección, también lo hace la fuerza de fricción, por lo que la ecuación necesita ser reescrita después de cada detención.

8.16 Un resorte con módulo de 120 lb/plg soporta un bloque de 200 lb (Fig. P8.16) El bloque está fijo al resorte. Se aplica una fuerza de 400 lb hacia abajo en la parte superior del bloque en t = o, cuando éste se encuentra en reposo. Calcule la deflexión máxima del resorte.

* 8.17 Un bloque de 1 lb se tira desde una altura H = 0.1 plg (Fig. P8.17). Si k = 2.5 lb/plg, determine el intervalo de tiempo durante el cual los extremos del resorte están en contacto con el suelo.

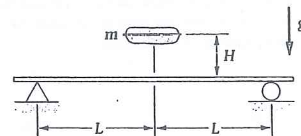


Figura P8.14

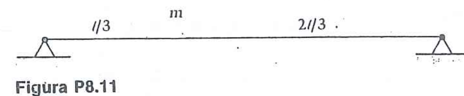


Figura P8.11

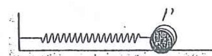


Figura P8.15

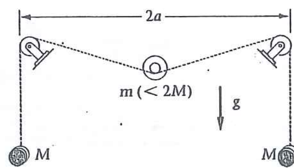


Figura P8.12

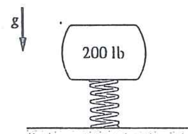
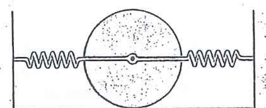


Figura P8.16


Figura P8.13

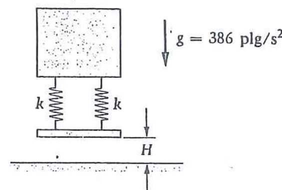


Figura P8.17

8.18 Suponga que la barra rígida delgada $\mathcal{B}$ en la Fig. P8.18 experimenta sólo pequeños ángulos de rotación. Encuentre el ángulo de rotación $\theta(t)$ si la barra está en equilibrio antes de t = 0, y en este instante la fuerza constante P comienza a desplazarse sobre la barra con velocidad también constante v.

* 8.19 Con referencia al problema anterior: (a) Calcule el trabajo hecho por P al recorrer la barra $\mathcal{B}$; (b) demuestre que este trabajo es igual al cambio en energía mecánica (que es la energía cinética de $\mathcal{B}$ más la energía potencial almacenada en el resorte).

* 8.20 El tornamesa en la Fig. P8.20 gira en un plano horizontal con velocidad angular *constante* ω. La partícula P (masa = m) se mueve en la ranura sin fricción y está unida al resorte (módulo k, longitud natural ℓ) como se muestra.

a. Obtenga la ecuación diferencial que describe el movimiento $y(t)$ de la partícula respecto a la ranura.
b. ¿Para qué extensión del resorte, P no tiene aceleración respecto a la ranura?
c. Suponga que el movimiento se inicia con el resorte sin estirar y la partícula se encuentra en reposo respecto a la ranura. Determine el movimiento subsecuente $y(t)$.

8.21 Obtenga el valor de $c_{crít}$ para el péndulo de la Fig. P8.21. Desprecie la masa de la barra rígida a la que está unida la partícula de masa m.

8.22 Si k = 100 lb/plg y la masa de la barra rígida, delgada y uniforme en la Fig. P8.22, es de 0.03 lb·s²/plg. ¿Cuál es el valor de la constante crítica de amortiguamiento?.

8.23 Si k = 100 lb/plg y la masa de la barra rígida, delgada y uniforme en la Fig. P8.23 es de 0.03 lb·s²/plg. ¿Cuál es el valor de la constante crítica de amortiguamiento? Compárelo con la c del Problema 8.22. Para este amortiguamiento, determine $\theta(t)$ si la barra gira un pequeño ángulo θ_0 y luego se suelta del reposo. Si se quitara el amortiguador, ¿cuál sería el período de vibración libre?

8.24 Un cañón con peso de 1200 lb dispara una bala de 100 lb con una velocidad de 600 pie/s (Fig. P8.24). Inmediatamente entra en contacto con un resorte de rigidez igual a 149 lb/pie y con un amortiguador calibrado para obtener un amortiguamiento crítico en el sistema. Suponiendo que no hay fricción entre las ruedas y el plano, halle el desplazamiento hacia la pared después de 1/4 de segundo.

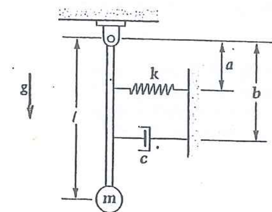


Figura P8.21

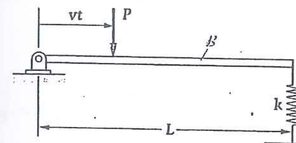


Figura P8.18

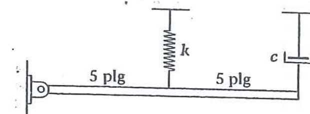


Figura P8.22

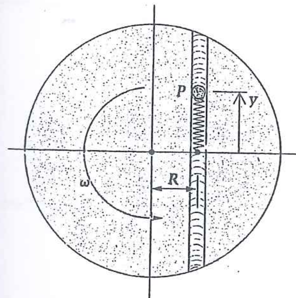


Figura P8.20

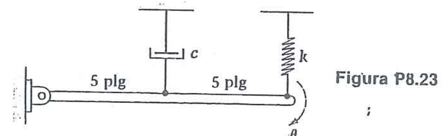
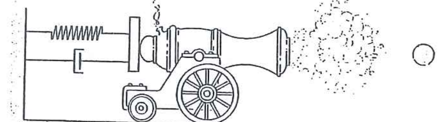


Figura P8.23


Figura P8.24

8.25 Considere las oscilaciones libres de un oscilador con amortiguamiento subcrítico. ¿Ocurren periódicamente las respuestas máximas locales?

8.26 En la Fig. P8.26, encuentre el desplazamiento de estado permanente $x(t)$ si $y(t) = 0.1$ sen $100t$ (en pulgadas), en donde t está en segundos, $m = 0.01$ lb·s²/plg, $k = 100$ lb/plg y $c = 2$ lb·s/plg. En particular:

a. ¿Cuál es la amplitud de $x(t)$?
b. ¿Cuál es el ángulo de defasamiento entre $x(t)$ y $y(t)$?

8.27 En la Fig. P8.27 encuentre el desplazamiento de estado permanente $x(t)$ si $y(t) = 0.2$ sen $90t$ (en pulgadas), en donde t está en segundos, $m = 0.01$ lb·s²/plg, $k = 50$ lb/plg y $c = 1$ lb·s/plg. En particular:

a. ¿Cuál es la amplitud de $x(t)$?
b. ¿Cuál es el ángulo de defasamiento entre $x(t)$ y $y(t)$?

8.28 El carro en la Fig. P8.28 está en reposo antes de $t = 0$; en este instante al extremo derecho del resorte se le imparte el movimiento $y = vt$, donde v es una constante. Encuentre $x(t)$.

8.29 El bloque en la Fig. P8.29 está en equilibrio antes de la aplicación de la fuerza constante $P = 50$ lb en $t = 0$. Si $k = 100$ lb/plg, $m = 0.01$ lb·s²/plg y el sistema tiene amortiguamiento subcrítico, encuentre $x(t)$.

* **8.30** En la Fig. P8.30 encuentre la respuesta $x(t)$ para las condiciones iniciales $x_1(0) = \dot{x}_1(0) = $ o si

$$k = 100 \text{ lb/plg}$$
$$m = 0.01 \text{ lb·s}^2\text{/plg}$$
$$c = 1.0 \text{ lb·s/plg}$$
$$X_2 = 0.05 \text{ plg}$$
$$\omega = 100 \text{ rad/s}$$

* **8.31** Repita el Problema anterior si (a) $c = 2.0$ lb·s/plg; (b) $c = 0.5$ lb·s/plg.

8.32 Sobre una mesa cuyas cuatro patas son resortes neumáticos se tiene montado equipo óptico. Si la mesa y el equipo pesan juntos 700 lb, ¿cuál debe ser la rigidez de cada resorte para que la amplitud del desplazamiento vertical (armónico simple, permanente) de la mesa no sea mayor que 5% del correspondiente movimiento del piso? La frecuencia forzante es de 30 rad/s. Desprecie el amortiguamiento en sus cálculos.

* **8.33** El bloque de masa m en la Fig. P8.33 está montada en resortes ky en un amortiguador c sobre un piso vibratorio. Obtenga una expresión para la aceleración de estado permanente del bloque (cuyo movimiento es de traslación vertical). Demuestre que la amplitud de la aceleración es menor que la del piso, independientemente del valor de c, siempre que $\omega > \sqrt{2}\omega_n$, en donde ω_n es la frecuencia de las vibraciones libres no amortiguadas del bloque. Demuestre además que si $\omega > \sqrt{2}\omega_n$, entonces cuanto menor sea el amortiguamiento tanto mejor será el aislamiento.

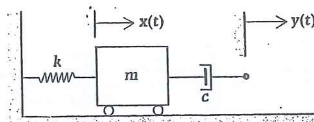


Figura P8.26

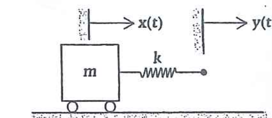


Figura P8.28

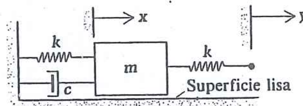


Figura P8.27

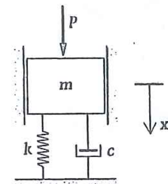


Figura P8.29

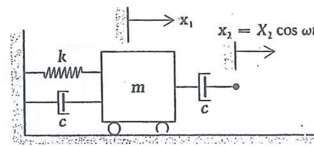


Figura P8.30

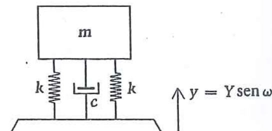


Figura P8.33

8.2 Leyes de Euler para un volumen de control

Las leyes de Euler describen la relación entre las fuerzas externas y el movimiento de cualquier cuerpo, sea este sólido, líquido o gaseoso. Sin embargo, algunas veces se desea centrar la atención en cierta región del espacio (volumen de control), a través del cual el material puede fluir, y no en el conjunto fijo de partículas que conforman a un cuerpo. Abundan los ejemplos de esta situación, sobre todo en el campo de la mecánica de fluidos, incluido el importante problema de describir y analizar el vuelo impulsado por cohetes. Nuestro propósito en esta sección es analizar las formas que asumen las leyes de Euler cuando el interés radica en el volumen de control más que en un cuerpo.

Consideramos como evidente lo que podría llamarse "ley de acumulación, producción y transporte", o sea: la tasa de acumulación de algo en una región del espacio es igual a la tasa de su producción dentro de la región, más la tasa con la que es transportada hacia la región*. Así por ejemplo, la tasa de acumulación de duraznos en una cierta región es igual a la tasa de su producción ahí más la tasa neta con la que se transportan hacia esa comarca. Esta idea puede aplicarse en mecánica siempre que tratemos con una cantidad cuya medida en un cuerpo sea la suma de las medidas para las partículas que constituyen el cuerpo. Entonces es posible aplicar este principio a la masa, la cantidad de movimiento lineal y angular, y a la energía cinética.

Supóngase que en un instante una región cerrada V (volumen de control) contiene material (partículas) que constituyen un cuerpo $\mathscr{B}$. Sea $m_{\mathscr{B}}$ la masa del cuerpo $\mathscr{B}$ y m_V la masa asociada a V (o sea, la masa de las partículas que se encuentran en V en momento dado). Instantáneamente $m_V = m_{\mathscr{B}}$, pero debido a que parte del material de $\mathscr{B}$ está saliendo de V y otro material está entrando, $\dot{m}_V \neq \dot{m}_{\mathscr{B}}$. De acuerdo con el principio de acumulación establecido antes,

$$\dot{m}_V = \dot{m}_{\mathscr{B}} + (\text{flujo neto de entrada de material a } V) \tag{8.29}$$

pues $\dot{m}_V$ representa la tasa de acumulación de masa en V, y $\dot{m}_{\mathscr{B}}$ es la tasa de variación de la masa del material instantáneamente dentro de V, representa el monto de producción. Por supuesto, un cuerpo considerado como una colección o conjunto de partículas, tiene masa constante; entonces $\dot{m}_{\mathscr{B}} = 0$ y (8.29) se reduce a $\dot{m}_V =$ (flujo de masa que entra a V); esta ecuación se llama con frecuencia **ecuación de continuidad.**

El enunciado correspondiente para la cantidad de movimiento (lineal) $\mathbf{L}$ es:

$$\dot{\mathbf{L}}_V = \dot{\mathbf{L}}_{\mathscr{B}} + (\textbf{flujo neto de cantidad de movimiento que entra a } V) \tag{8.30}$$

Pero la primera ley de Euler se aplica a un cuerpo (como el $\mathscr{B}$) de manera que $\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}_{\mathscr{B}}$, en donde $\Sigma\mathbf{F}$ es la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre $\mathscr{B}$—, o bien, en otras palabras, la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el material que se encuentra instantáneamente en V.. La Ec. (8.30) es entonces ahora:

$$\dot{\mathbf{L}}_V = \Sigma\mathbf{F} + (\textbf{flujo neto de cantidad de movimiento que entra a } V) \tag{8.31}$$

Esta ecuación es la *forma de la primera ley de Euler para un volumen de control*. La intensidad de flujo de la cantidad de movimiento (en el segundo miembro de la Ec.(8.31)) se calcula sumando (o integrando) la intensidad de flujo de la cantidad de movimiento a través de elementos infinitesimales de la frontera de V, en donde tal intensidad por área unitaria en la frontera es el produco de la intensidad de flujo de masa por unidad de área y la velocidad instantánea del materia al atravesar la frontera.

*La formulación matemática de esto se conoce como Teorema del Transporte de Reynolds.

Una deducción similar da la forma de la segunda ley de Euler para un volumen de control que puede expresarse de la siguiente manera:

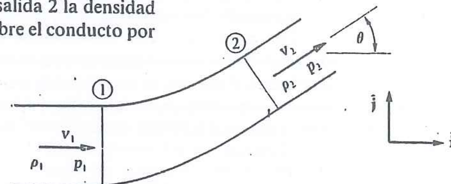
$$(\dot{\mathbf{H}}_O)_V = \Sigma \mathbf{M}_O + \begin{array}{c}\textbf{(flujo neto de cantidad de movimiento}\\ \textbf{angular con respecto a O, que entra a } V\end{array} \qquad (8.32)$$

en donde O es un punto fijo en el marco inicial de referencia.

Es importante ver que en estas deducciones no se ha impuesto ninguna restricción al volumen de control, excepto que debe ser una región cerrada en el espacio; puede moverse respecto al marco de referencia en cualquier forma imaginable y cambiar de forma o volumen en el tiempo. Terminamos esta sección con ejemplos de dos de las aplicaciones más comunes de la Ec.(8.31).

Ejemplo 8.6

Un fluido se encuentra en movimiento en un conducto que contiene un tramo curvo en el que el área de la sección transversal cambia de A_1 a A_2. En la entrada 1 la densidad es , y la velocidad (aproximadamente uniforme en la sección) es $v_1\hat{\imath}$. En la salida 2 la densidad es . Determinar la fuerza resultante ejercida sobre el conducto por el fluido. (Ver el diagrama).

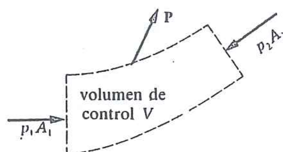


Solución

Sea la velocidad del fluido en la salida $v_2 = v_2$ (cos $\hat{\imath}$ + sen $\hat{\jmath}$). Entonces para régimen permanente, el flujo volumétrico (o gasto) (volumen por unidad de tiempo) en la entrada es igual a flujo volumétrico (o gasto) en la salida:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \qquad \text{de modo que} \qquad v_2 = \frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2} v_1$$

Consideramos que el volumen de control es la región limitada por la superficie interior del tramo curvo del conducto y por las secciones de entrada (1) y salida (2) (ver el diagrama). Una consecuencia de la condición de flujo volumétrico (o gasto) permanente es que dentro del volumen de control, las distribuciones de velocidad y densidad son independientes del tiempo. Entonces la cantidad de movimiento total asociada a V es constante, por lo que



$$\frac{d\mathbf{L}_V}{dt} = 0 \qquad \text{Pero} \qquad \frac{d\mathbf{L}_V}{dt} = \Sigma\mathbf{F} + \text{(flujo neto de cantidad de movimiento que entra a } V\text{)}.$$

Por consiguiente,

$$\Sigma\mathbf{F} = \text{(flujo neto de cantidad de movimiento que sale de } V\text{)}.$$

$$= \rho_2 A_2 v_2 (v_2 \cos\theta\hat{\imath} + v_2 \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}) - \rho_1 A_1 v_1 (v_1 \hat{\imath})$$

$$= \rho_1 A_1 v_1 (v_2 \cos\theta\hat{\imath} + v_2 \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath} - v_1 \hat{\imath})$$

$$= \rho_1 A_1 v_1 \left[\left(\frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2} v_1 \cos\theta - v_1\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2} v_1 \operatorname{sen}\theta\right)\hat{\jmath}\right]$$

$$= \rho_1 A_1 v_1^2 \left[\left(\frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2} \cos\theta - 1\right)\hat{\imath} + \frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2} \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath}\right]$$

Si $\mathbf{P}$ es la fuerza ejercida sobre el fluido por el tramo curvo,

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{P} + p_1 A_1 \hat{\imath} + p_2 A_2 (-\cos\theta\hat{\imath} - \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath})$$

en donde p_1 y p_2 son las presiones del fluido en la entrada y en la salida, respectivamente. Por lo tanto,

$$\mathbf{P} = \Sigma\mathbf{F} - p_1 A_1 \hat{\imath} + p_2 A_2 (\cos\theta\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\hat{\jmath})$$

y la fuerza ejercida sobre el recodo por el fluido es $-\mathbf{P}$, siendo

$$-\mathbf{P} = \left[p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta + \rho_1 A_1 v_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2}\cos\theta\right)\right]\hat{\imath} - \left[p_2 A_2 \operatorname{sen}\theta + \rho_1 A_1 v_1^2 \left(\frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2}\right)\operatorname{sen}\theta\right]\hat{\jmath}$$

Ejemplo 8.7

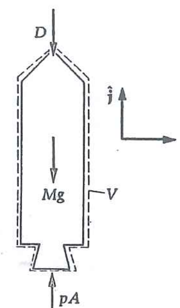


Diagrama de cuerpo libre del cohete

Para ilustrar como se usa la primera ley de Euler en un volumen de control para describir el movimiento de un cohete, consideremos que un vehículo tal asciende en vuelo rectilíneo vertical. Sea $v\hat{\jmath}$ la velocidad de avance o propulsión del cohete (o misil), del cual salen expulsados productos de combustión con velocidad de eyección $-v_e\hat{\jmath}$ respecto al cohete. Sea $M(t)$ la masa en el tiempo t del vehículo con su contenido, la intensidad del flujo de masa de los gases de escape y p la presión del gas en la tobera eyectora, cuya sección transversal es A.

Solución

La fuerza D en el diagrama de cuerpo libre es la fuerza resistente al movimiento, o sea la resultante de (1) todos los esfuerzos cortantes en el aire que actúan sobre la superficie del vehículo y de (2) todas las presiones sobre la superficie. Entonces $(pA - D)\hat{\jmath}$ es la resultante de todas las fuerzas distribuidas en la superficie sobre el volumen de control. Los dos términos se han separado para hacer ver que la fuerza pA permanece actuando aún después de que el vehículo ha dejado atrás la atmósfera. Esto es, p es la presión ejercida por las partículas de gas *a punto de cruzar* el plano* de salida de la boquilla sobre las partículas que *acaban de atravesar dicho plano*, y viceversa.

*Este término puede despreciarse si los gases de escape se han expandido hasta alcanzar la presión atmosférica o valores cercanos a ella.

Si V es el volumen de control que rodea al vehículo, la Ec.(8-31) da:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_V = (pA - D)\hat{\mathbf{j}} - Mg\hat{\mathbf{j}} - \mu(v - v_e)\hat{\mathbf{j}}$$

Ahora debemos aproximar el valor $\mathbf{L}_v$ por medio de $Mv\hat{\mathbf{j}}$; se trata de una aproximación porque algunos de los productos de la combustión dentro del cohete se mueven relativamente al vehículo. En consecuencias.

$$\frac{d}{dt}(Mv\hat{\mathbf{j}}) = (pA - D)\hat{\mathbf{j}} - Mg\hat{\mathbf{j}} - \mu(v - v_e)\hat{\mathbf{j}}$$

o bien

$$v\frac{dM}{dt} + M\frac{dv}{dt} = pA - D - Mg - \mu v + \mu v_e$$

por lo que

$$\frac{dM}{dt} = -\mu$$

de manera que

$$M\frac{dv}{dt} = pA - D - Mg + \mu v_e$$

que es una ecuación de la forma: fuerza = masa × aceleración, en donde una de las fuerzas es el *empuje* o *fuerza propulsora* μv_e.

Problemas / Sección 8.2

8.34 Sean dm_i/dt y dm_0/dt los respectivos flujos de masa entrante y saliente de un sistema. Demuestre que la Ec. (8.31) puede expresarse en términos de esas tasas de variación de la siguiente manera:

$$\Sigma\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \left(\frac{dm_i}{dt} - \frac{dm_o}{dt}\right)\mathbf{v} + \frac{dm_o}{dt}\mathbf{v}_o - \frac{dm_i}{dt}\mathbf{v}_i$$

en donde $m\mathbf{v} = \mathbf{L}_V$ y se supone que todas las partículas que entran tienen una velocidad común $\mathbf{v}_i$ (en un marco inercial) y que todas las partículas que salen tienen una velocidad común $\mathbf{v}_o$.

8.35 Un líquido de peso específico w sale de un agujero en el lado de un tanque en un chorro de sección transversal A. Si la velocidad del chorro es v, determine la fuerza ejercida sobre el tanque por la estructura que mantiene a ése en equilibrio. Nótese que la presión en el chorro será la atmosférica.

8.36 Una chica apunta una manguera a la espalda de un amigo (Fig. P8.36) Si el chorro de agua (peso específico, 62.4 lb/pie^3) tiene un diámetro de plg y una velocidad de 50 pie/s, estime la fuerza ejercida sobre el "blanco" si: (a) está estacionario; (b) corre alejándose del chorro con velocidad de 10 pie/s. Suponga que el chorro en contacto con la espalda del amigo es vertical respecto a él, o sea desprecie cualquier rebote del agua.



Figura P8.36

8.37 Un chorro continuo y uniforme de líquido se dirige contra una superficie rígida lisa, y se divide como muestra la Fig. P8.37. Suponga que cada partícula del fluido se mueve en un plano paralelo al de la figura e ignore la fuerza de gravedad. Omitiendo tal fuerza y la fricción, puede demostrarse que la rapidez de la partícula después de la bifurcación es aún v, como se muestra. Calcule la fracción del flujo que tiene escurre hacia arriba y hacia abajo. *Sugerencia*: Tome en cuenta que ninguna fuerza externa tangente a la superficie actúa sobre el líquido.

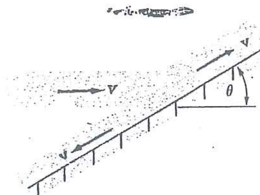


Figura P8.37

8.38 Por la admisión de un motor de reacción penetra aire a una tasa q (slug/s o bien kg/s). Si v es la velocidad del aeroplano al volar a través de aire en reposo y u es la velocidad de los gases de escape del motor respecto del avión, obtenga una expresión para la fuerza (empuje) del fluido sobre el motor. Desprecie el hecho de que el flujo mágico de los gases de escape es ligeramente mayor que q debido a la adición de combustible en el motor.

8.39 Revise el análisis del problema anterior tomando en cuenta ahora la masa de combustible inyectado al motor. Sea f la intensidad de flujo de masa del combustible, y suponga que éste se inyecta con velocidad cero relativa al alojamiento del motor.

8.40 En una cantera las piedras se deslizan hacia una banda transportadora a una tasa constante k y con una velocidad v_{rel}, relativa al suelo (Fig. P8.40). La banda es impulsada por un motor (con torque o par M aplicado al tambor o cilindro de la derecha) a velocidad constante v_B. Encuentre la potencia que el motor debe entregar, despreciando la fricción en los cojinetes del eje y suponiendo que la banda no resbala. *Sugerencia*: Use el volumen de control indicado por la línea punteada para calcular la diferencia entre las tensiones en la banda, despreciando la flexión o colgamiento de ésta debido al peso de las piedras.

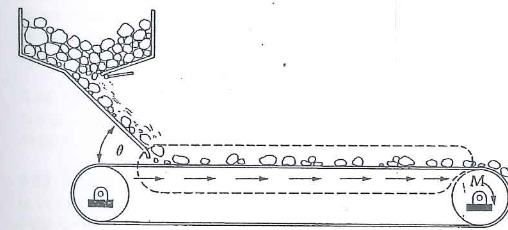


Figura P8.40

8.41 Se está vaciando arena sobre un carro de masa M según una tasa constante q (Fig. P8.41). El carro es halado con una fuerza constante P, y la fricción es despreciable. El vagón estaba en reposo en $t = 0$. Determine la aceleración del carro en función de P, M, q y t.

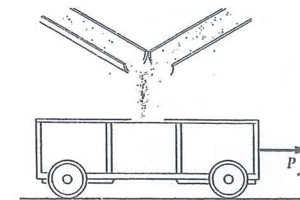


Figura P8.41

8.42 La presión en el codo a 90° de una tubería de agua es de 2 lb/plg^2 (manométrica). El diámetro interior del tubo es de 6 plg y el agua fluye con un gasto constante de 1.5 pie^3/s. Encuentre la magnitud de la fuerza ejercida sobre el codo por el fluido. El peso específico del agua es de 62.4 lb/pie^3.

8.43 El tramo de transición en la Fig.P8.43 conecta un tubo de 36 plg de diámetro interior a otro de 24 plg también de diámetro interior. El agua entra en la sección reductora con velocidad de 10 pie/s y presión de 5 lb/plg^2; sale con 2 lb/plg^2. Encuentre la fuerza ejercida sobre el tramo por el flujo continuo del agua.

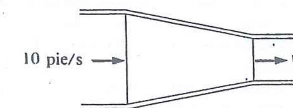


Figura P8.43

8.44 Si el plano de la Fig. P8.44 es horizontal, calcule la fuerza y el momento en O que permitirán al cuerpo permanecer en equilibrio cuando la corriente de agua a cielo descubierto choca contra él continuamente como se muestra en la figura. La velocidad de la corriente es de 60 pie/s y su sección transversal constante es de 12 plg^2; su peso específico es de 62.4 lb/pie^3.

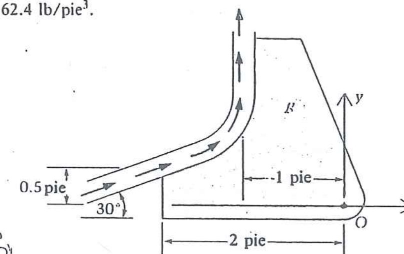


Figura P8.44

8.45 Un vagón transportador de carbón pesa 5 ton vacío; es empujado bajo una tolva de carga por una fuerza constante de 500 lb. La canaleta, inclinada 60° como se muestra en la Fig. P8.45, entrega 100 lb de carbón por segundo al carro a una velocidad de 30 pie/s. Cuando el vagón contiene 10 ton de carbón, su velocidad es de 10 pie/s hacia la derecha. (a) ¿Cuál es la aceleración en este instante?. Las ruedas son ligeras y todas las fuerzas horizontales de fricción pueden considerarse incluidas en la fuerza de 500 lb; (b) ¿cuál es la componente horizontal de la fuerza sobre el carro proveniente del carbón en este instante?.

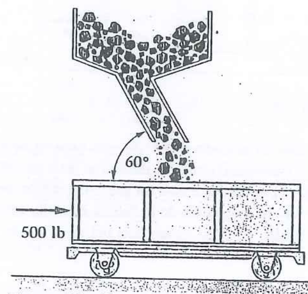
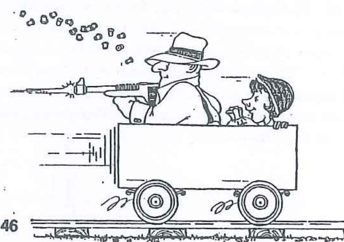


Figura P8. 45

8.46 Una pareja de *gangsters* escapan en un carro que tiene una fricción despreciable bajo sus ruedas (Fig.P8.46). El usa su ametralladora para propulsar el vehículo y para defenderse de sus perseguidores; dispara 500 balas por minuto, las cuales pesan 1 onza cada una y salen del arma con una velocidad relativa al carro de 2500 pie/s. Las balas constituyen originalmente el 2% de una masa total inicial m_0 = 20 slug. Si el sistema parte del reposo en t = 0, encuentre: (a) la velocidad máxima del "auto"; (b) ¿cuánto se tardará en alcanzar esta velocidad?


Figura P8. 46

8.47 Una caja "negra" con masa inicial m_0 (de la cual 10% pertenece a la caja y 90% al propulsante) se suelta del reposo sobre el plano inclinado de la Fig. P8.47. El coeficiente de fricción entre la caja y el plano es μ .

a. Demuestre que si $\tan\alpha > \mu$, la caja comenzará a deslizar hacia abajo sobre el plano.
b. Suponga ahora que $\tan\alpha > \mu$ y que un mecanismo en la caja es capaz de detectar la velocidad de ésta y de emitir partículas hacia atrás (hacia arriba a lo largo del plano) a una tasa constante k_0 (masa/tiempo) y a una velocidad relativa siempre igual a la negativa del artefacto. Encuentre la velocidad de la caja en el tiempo t_f cuando el propulsante se agota.
c. Demuestre que la caja viaja 5.5 veces más rápido en $t = t_f$ que cuando no se hubiese emitido ningún propulsante.

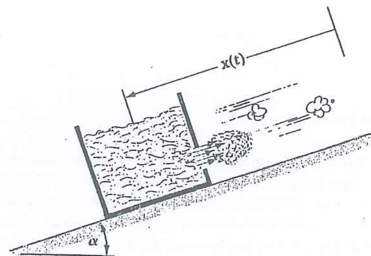
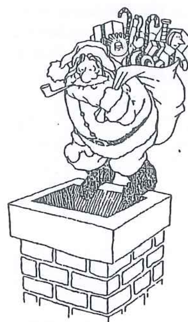


Figura P8. 47

8.48 Santa Claus pesa 450 lb y desciende por una chimenea (no muy limpia) de 20 pie de altura (Fig. P8.48). Durante el descenso gana masa debido al hollín y a las cenizas a razón de 3 slug/s.

a. Determine la velocidad de Santa Claus en función del tiempo (desprecie la fricción).
b. Calcule la velocidad v_b y el tiempo t_b en que alcanzará el fondo de la chimenea *sin* masa añadida, y luego compare v_b con su velocidad *con* la masa añadida en el mismo tiempo t_b.


Figura P8. 48

8.49 Un cohete pequeño se dispara verticalmente hacia arriba. Se desprecia la resistencia del aire. Demuestre que para que el misil tenga aceleración constante hacia arriba, su masa debe variar en el tiempo según la ecuación:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{a+g}{u}m$$

en donde a es la aceleración del cohete y u es la velocidad de los gases respecto al cohete.

8.50 Una cadena, de longitud L y peso w por unidad de longitud, se encuentra apilada sobre el piso; un extremo de ella es levantado verticalmente por una fuerza variable P con la que se logra una velocidad constante v (Fig. P8.50). Encuentre P en función de x. *Sugerencia*: Escoja una frontera del volumen de control tal que el material cruce la misma (con velocidad despreciable) justamente *antes* de que actúe sobre él el material en movimiento ya dentro del volumen de control; o sea que no se transmitan fuerzas a través de la frontera del volumen citado. La solución será una aproximación a la realidad debido a la hipótesis de que los eslabones son arbitrariamente pequeños; pero cuantos más eslabones tengan la velocidad común de los eslabones dentro del volumen, tanto mejor será la aproximación.

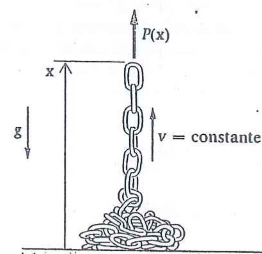


Figura P8.50

8.51 Resuelva la ecuación final del Ejemplo 8.7 para la velocidad $v\hat{j}$ del cohete en función del tiempo en el caso en que: la fuerza de presión pA y la resistencia D son despreciables, la masa inicial del cohete es m_0, y la aceleración de la gravedad g, el flujo eyectivo μ y la velocidad relativa de eyección v_e son todos constantes. Inicialmente el cohete está en reposo.

8.52 Repita el problema anterior pero esta vez incluya una fuerza resistente igual a $-kv$, en donde k es una constante positiva.

8.53 En el Problema 8.51, (a) determine la altura del cohete en función del tiempo; (b) si la fracción de m_0 que es propulsante es f, encuentre la velocidad y la posición del cohete cuando se agote todo el material de propulsión.

8.54 Gotas de lluvia esféricas formadas por condensación se precipitan desde una nube cuando su radio es a; caen libremente desde el reposo y sus radios crecen debido a la humedad con una taza uniforme k respecto al tiempo. Calcule la velocidad de una gota en el tiempo t y demuestre que la distancia recorrida en ese tiempo es

$$\frac{gt^2}{8}\left(\frac{2a+kt}{a+kt}\right)^2$$

* 8.55 Una cadena de longitud L y peso γ por unidad de longitud comienza a caer por un agujero en un techo (Fig. P8.55). Observando la sugerencia del Problema 8.50:

a. Encuentre $v(x)$ si v = 0 cuando x y t son cero.
b. Demuestre que la aceleración del extremo de la cadena es la constante $g/3$.
c. Demuestre que cuando el último eslabón ha dejado el techo, la cadena ha perdido más energía potencial que la que ha ganado en energía cinética, siendo la diferencia $\gamma L^2/6$. Explique la causa de esta pérdida.

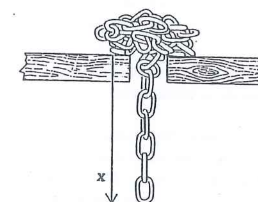


Figura P8.55

8.56 La ametralladora en la Fig. P8.56 tiene masa M sin considerar las balas, que tienen en conjunto una masa M'. Las balas se disparan a razón de k_0 slug/s con velocidad u_0 relativa al suelo. Si el coeficiente de fricción entre el soporte del arma y el piso es μ, encuentre la velocidad de la ametralladora en el instante en que se dispara la última bala.

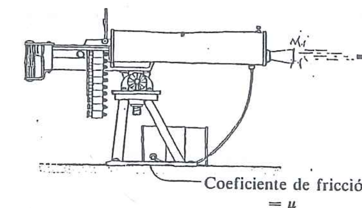


Figura P8.56

* **8.57** Una partícula de masa m, inicialmente en reposo, se lanza con velocidad $\mathbf{v}_0$ según un ángulo α respecto a la horizontal y se mueve bajo la acción de la gravedad (Fig. P8.57). Durante su vuelo, gana masa con tasa uniforme k. Si se desprecia la resistencia del aire, demuestre que la ecuación de su movimiento es:

$$(m + kt)\ddot{\mathbf{r}} + k\dot{\mathbf{r}} = (m + kt)g\hat{\mathbf{k}}$$

y que la ecuación de su trayectoria es

$$\mathbf{r} = \frac{m^2}{4k^2}\left[\left(1 + \frac{kt}{m}\right)^2 - 1 - 2\log\left(1 + \frac{kt}{m}\right)\right]g\hat{\mathbf{k}} + \frac{m}{k}\log\left(1 + \frac{kt}{m}\right)\mathbf{v}_0$$

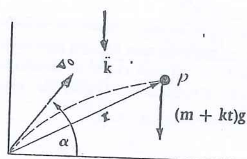


Figura P8.57

* **8.58** Si en el Problema anterior la resistencia del aire es $-c\mathbf{r}$, determine la ecuación de la trayectoria.

* **8.59** Desde un cohete que se mueve libremente hacia arriba en dirección vertical se expulsa material hacia abajo con una velocidad relativa constante gT *constante* $2M/T$. Inicialmente el cohete está en reposo y tiene una masa $2M$, la mitad de la cual será expulsada. Despreciando la resistencia del aire y variaciones en la atracción gravitacional, (a) demuestre que la velocidad máxima hacia arriba se alcanza cuando la masa del cohete se reduce a M, y determine esta velocidad; (b) demuestre que el cohete alcanza la altura

$$\tfrac{1}{2}gT^2(1 - \ln 2)^2$$

8.60 Con la misma notación y condiciones que en el anterior Problema 8.34, demuestre que la Ec. (8.32) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{\mathcal{V}} + \frac{dm_o}{dt}(\mathbf{r}_o \times \mathbf{v}_o) - \frac{dm_i}{dt}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)$$

en donde $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_o$ son los vectores de posición para los centros de masa de las partículas entrantes y salientes.

* **8.61** Una rueda giratoria de fuegos artificiales de radio a, que puede girar libremente alrededor de un eje horizontal, tiene inicialmente masa M y momento de inercia I respecto a su centro. Una carga de material está distribuida en su periferia y es encendida en $t = 0$. Mientras la carga está quemándose, el borde de la rueda pierde masa a razón constante de m_1 unidades por segundo y en el borde también una masa m_2 por segundo, de gas se toma de la atmósfera, que se encuentra en reposo. La masa total $m_1 + m_2$ es descargada por segundo tangencialmente al borde, con velocidad v relativa a éste. Demuestre que si θ es el ángulo que ha girado la rueda después de t segundos, entonces:

$$\theta = \frac{v}{a(\mu - \lambda)}\left[\mu t - 1 + (1 - \lambda t)^{\mu/\lambda}\right]$$

en donde

$$\lambda = \frac{m_1 a^2}{I} \qquad \mu = \frac{(m_1 + m_2)a^2}{I}$$

* **8.62** Una rueda de radio a parte del reposo y arroja material a una tasa uniforme desde todos los puntos de su borte (Fig. P8.62). La materia sale tangencialmente con velocidad relativa v y a una tasa tal que la masa disminuye en el borde en m unidades por segundo. Demuestre que el ángulo θ girado por la rueda está dado por

$$\theta = \frac{vI_O}{ma^3}\left[\left(1 - \frac{ma^2t}{I_O}\right)\ln\left(1 - \frac{ma^2t}{I_O}\right) + \frac{ma^2t}{I_O}\right]$$

en donde I_0 es el momento de inercia inicial de la rueda respecto a su eje.

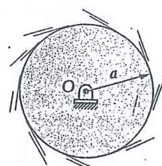


Figura P8.62

8.3 Movimiento debido a una fuerza central

En el Capítulo 2 definimos una **fuerza central** actuando sobre una partícula $\mathcal{P}$ como aquélla que (1) siempre pasa por un cierto punto O fijo en el marco de referencia inercial $\mathcal{I}$, y (2)

depende sólo de la distancia r entre O y $\mathcal{P}$ (Fig. 8.12). En esta sección vamos a analizar la fuerza central con más detalle. Se procurará efectuar un análisis lo más general posible o sea sin especificar el modo en que $\mathbf{F}$ depende de r. En la segunda parte de la sección estudiaremos la más importante de las fuerzas centrales: la atracción gravitacional.

Si la fuerza central $\mathbf{F}$ es la única fuerza que actúa sobre la partícula entonces $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$; y como la fuerza mencionada siempre pasa por O, entonces $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es idénticamente cero. Esto permite escribir:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = 0$$

o, como $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = 0$$

Por lo tanto, para una partícula sobre la que actúa sólo una fuerza central:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{vector constante en } \mathcal{I} = \mathbf{h}_O \tag{8.33}$$

Multiplicando escalarmente por $\mathbf{r}$ esta ecuación, encontramos, ya que $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{h}_O$$

y vemos que $\mathbf{r}$ es siempre perpendicular a un vector que es constante en $\mathcal{I}$; por consiguiente $\mathcal{P}$ se mueve en un plano en $\mathcal{I}$. Si usamos coordenadas polares para describir el movimiento de $\mathcal{P}$ en este plano, las ecuaciones serán:

$$\Sigma F_r = -F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{8.34}$$

y

$$\Sigma F_\theta = 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \tag{8.35}$$

De la Ec. (8.35) vemos que

$$r^2\dot{\theta} = \text{constante} = h_O \tag{8.36}$$

en donde h_0 es la magnitud del vector constante $\mathbf{h}_0$ de la Ec. (8.33) ya que, expresando $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ en coordenadas polares,

$$\mathbf{h}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{constante} = r\hat{\mathbf{e}}_r \times (\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta) = r^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$$

por lo que

$$|\mathbf{h}_O| = h_O = r^2\dot{\theta} = \text{constante} \tag{8.37}$$

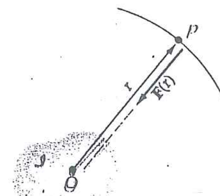


Figura 8.12

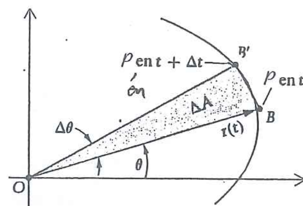


Figura 8.13

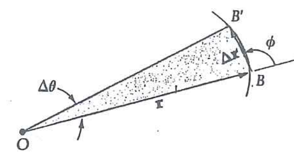


Figura 8.14

La Ec. (8.37) expresa la conservación de la cantidad de movimiento angular de $\mathcal{P}$; la constante h_0 es la magnitud de la cantidad de movimiento angular $\mathbf{H}_0$ de $\mathcal{P}$ dividida entre su masa m; llamaremos a h_0 la cantidad de movimiento angular (en magnitud) específica o por unidad de masa.

Podemos usar los dos resultados para mostrar que la segunda de las tres leyes de Kepler para el movimiento planetario, es válida para cualquier fuerza central. Esta ley dice que el radio vector que va del Sol a un planeta describe áreas iguales en intervalos de tiempo iguales. En la Fig. 8.13, el incremento de área ΔA descrito por $\mathcal{P}$ entre θ (en t) y $\theta + \Delta\theta$ (en $t + \Delta t$) está dado aproximadamente por el área del triángulo OBB' *(Fig. 8.14):

$$\Delta A \approx \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$$

$$\approx \tfrac{1}{2} r(\Delta r \operatorname{sen} \phi) \approx \tfrac{1}{2} |\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}|$$

Dividiendo entre el incremento de tiempo Δt y tomando límites cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos

$$\lim \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \left| \mathbf{r} \times \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2} \overbrace{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}^{\mathbf{h}_O}$$

o bien

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h_O}{2} \quad \text{(una constante que es } r^2\dot{\theta}/2) \tag{8.38}$$

Vemos que la derivada del área descrita es constante. Por ello un satélite o un planeta en órbita elíptica (Fig. 8.15) viaja más rápido en su *perigeo* que en su *apogeo*; la misma área debe describirse en el mismo intervalo de tiempo*. Enfatizemos nuevamente que este resulta-

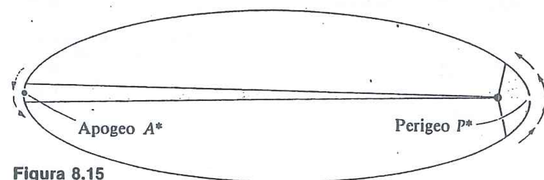


Figura 8.15

*"Aproximadamente" porque el área entre el arco y la cuerda se encuentra fuera del triángulo.

*Usamos *perigeo* y *apogeo* en sentido general; técnicamente estos nombres se refieren a los puntos más cercano y más alejado, respectivamente, de la Luna y de los satélites artificiales. Para las órbitas de los planetas, los términos correctos són *perihelio* y *afelio*.

do es válido para *todas* las trayectorias de fuerza central, no sólo para las órbitas elípticas y no únicamente si la fuerza central es la de gravedad.

Ahora centraremos nuestra atención en la fuerza central más importante: la atracción gravitacional. Si G es la constante de gravitación universal, y M y m son las masas de los cuerpos atrayente y atraído,* entonces la fuerza central que actúa sobre m es

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2} \tag{8.39}$$

y la Ec. (8.34) es:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2} \tag{8.40}$$

Cancelando m y sustituyendo $r^2\dot{\theta}$ por h_0,

$$\ddot{r} - \frac{h_O^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2} \tag{8.41}$$

Si multiplicamos la Ec. (8.39) por $\dot{r}$ podemos integrarla:

$$\dot{r}\ddot{r} - h_O^2 r^{-3}\dot{r} = -GMr^{-2}\dot{r} \tag{8.42}$$

Integrando se obtiene

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + h_O^2 \frac{r^{-2}}{2} = \frac{-GMr^{-1}}{-1} + C_1 \tag{8.43}$$

Si multiplicamos la Ec. (8.43) por m y reemplazamos h_0 por $r^2\dot{\theta}$, vemos que

$$\frac{m}{2}[\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2] - \frac{GMm}{r} = C_1 m \tag{8.44}$$

en donde el lado izquierdo de esta ecuación es la energía total de $\mathcal{P}$, cinética más potencial. Reemplazamos entonces C_1 por E la energía de $\mathcal{P}$ por masa unitaria y obtenemos:

$$\dot{r}^2 + h_O^2 r^{-2} = +2GMr^{-1} + 2E \tag{8.45}$$

Esta ecuación nos será útil más tarde. Ahora interesa estudiar la trayectoria de la partícula $\mathcal{P}$, o sea encontrar r en función de θ. Por la regla de la cadena,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta}$$

y como $\dot{\theta} = h_O/r^2$ de la Ec. (8.36),

$$\frac{dr}{dt} = \frac{h_O}{r^2}\frac{dr}{d\theta} \tag{8.46}$$

* En realidad ambos se atraen mutuamente. La constante GM para el Sol es igual a 4.68×10^{21} pie^3/s^2.

Necesitamos la segunda derivada de r en la Ec. (8.41), por lo que aplicamos la regla de la cadena una vez más:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h_O}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\right]\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{h_O}{r^2}\left[-\frac{2h_O}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{h_O}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\right] \qquad (8.47)$$

$$= \frac{h_O^2}{r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2h_O^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{h_O^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$$

Sustituyendo en la Ec. (8.41) obtenemos

$$\frac{h_O^2}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{h_O^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}$$

o bien

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{1}{r} = -\frac{GM}{h_O^2} \qquad (8.48)$$

Con el siguiente cambio de variables, la solución de esta ecuación diferencial se reconocerá inmediatamente:

$$u = \frac{1}{r} \qquad (8.49)$$

Sustituyendo la Ec. (8.49) en la (8.48) junto con

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta} = \frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta} \qquad (8.50)$$

nos da

$$\frac{d}{d\theta}\left[u^2\left(\frac{-1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)\right] - u = \frac{-GM}{h_O^2} \qquad (8.51)$$

o bien

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h_O^2} \qquad (8.52)$$

La solución de la Ec. (8.52) consta de una porción homogénea (o complementaria) y de una porción particular:

$$u = \overbrace{u_H}^{} + \overbrace{u_P}^{}$$

$$= A_1 \cos\theta + B_1 \operatorname{sen}\theta + \frac{GM}{h_O^2} \qquad (8.53)$$

Cambiando variables de acuerdo con la Ec. (8.49) obtenemos:

$$r = \frac{h_O^2/GM}{1 + (h_O^2/GM)(A_1\cos\theta + B_1 \operatorname{sen}\theta)} \qquad (8.54)$$

Esta solución para $r(\theta)$ es la ecuación de una **cónica**: se puede expresar en forma más familiar después de un breve repaso de las secciones cónicas. Para todo punto sobre una cónica, la razón de las distancias de P a un punto fijo (O: el foco) y a una recta fija (ℓ: la directriz) es una constante llamada **excentricidad** de la cónica:

$$e = \frac{OP}{L} \qquad (8.55)$$

Por consiguiente, en términos de los parámetros en la Fig. 8.16:

$$e = \frac{r}{q - r\cos\theta} \qquad (8.56)$$

o, despejando a r,

$$r = \frac{eq}{1 + e\cos\theta} \qquad (8.57)$$

La cónica especificada por la Ec. (8.57) es una:

Hipérbola si $|e| > 1$

Parábola si $e = 1$ (8.58)

Elipse si $-1 < e < 1$

La elipse se vuelve un círculo (o mejor dicho, una circunferencia) si $e = 0$. Es una elipse con perigeo (punto más próximo a O) en $\theta = 0$ si $0 < e <$ y una elipse con apogeo (punto más lejano a O) en $\theta = 0$ si $-1 < e < 0$; este último tipo se llama *elipse subcircular*.

Volviendo a la solución (8.54) para $r(\theta)$, es usual seleccionar una de las constantes A_1 y B_1 de modo que $dr/d\theta = 0$ cuando $\theta = 0$ (Fig. 8.16). Esta condición da $B_1 = 0$, como se puede demostrar usando el Cálculo. El resultado significa simplemente que estamos midiendo θ desde el perigeo de la cónica. En este momento deberíamos comparar las Ecs. (8.57) y (8.54) con $B_1 = 0$:

$$r = \frac{h_O^2/GM}{1 + (h_O^2/GM)A_1\cos\theta} \qquad (8.59)$$

y

$$r = \frac{eq}{1 + e\cos\theta} \qquad (8.60)$$

Por comparación directa de esas dos expresiones para r, vemos que,

$$A_1 = \frac{eGM}{h_O^2} \quad \text{y} \quad eq = \frac{h_O^2}{GM}$$

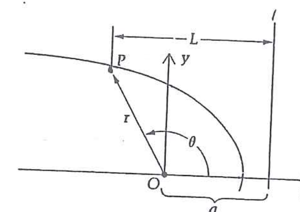


Figura 8.16

Es más usual sin embargo expresar la constante A_1 (así como la excentricidad) en términos de la energía E de la órbita. Para hacer esto las Ecs. (8.45) y (8.46) dan

$$\frac{h_O^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{h_O^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = 2E \tag{8.61}$$

En el punto r_P, en donde $\theta = 0$ y $dr/d\theta = 0$, vemos que

$$\frac{h_O^2}{r_P^2} - \frac{2GM}{r_P} = 2E \tag{8.62}$$

Entonces h_0, r_P y E no son independientes. Eliminaremos r_P. Multiplicando la Ec. (8.62) por r_P^2 queda

$$2Er_P^2 + 2GMr_P - h_O^2 = 0 \tag{8.63}$$

Aplicando la fórmula cuadrática:

$$r_P = \frac{-2GM + \sqrt{4G^2M^2 + 8Eh_O^2}}{4E} \tag{8.64}$$

en donde usamos el signo positivo ya que necesitamos la menor raíz para las cónicas cerradas ($E < 0$). El signo positivo también garantiza una r_P positiva para cónicas abiertas ($E > 0$).

Volviendo a la solución (8.59) se tiene para $\theta = 0$:

$$r_P = \frac{h_O^2/GM}{1 + (h_O^2/GM)A_1} \tag{8.65}$$

Igualando las dos expresiones para r_P dadas por las Ecs. (8.64) y (8.65) podemos despejar A_1.

Comparando las Ecs. (8.59) y (8.60) vemos que la excentricidad e de la cónica será $(h_0^2/GM)\,A_1$. Igualando los segundos miembros de las Ecs. (8.64) y (8.65) y resolviendo para evaluar esta cantidad, obtenemos

$$\frac{h_O^2}{GM}A_1 = e = \sqrt{1 + \frac{2Eh_O^2}{G^2M^2}} \tag{8.66}$$

por lo tanto

$$r = \frac{h_O^2/GM}{1 + \sqrt{1 + (2Eh_O^2/G^2M^2)}\cos\theta} \tag{8.67}$$

que expresa r en función de θ, la constante GM, la energía E y la cantidad de movimiento angular por masa unitaria (ímpetu específico) h_0. Obsérvese también que comparando las Ecs. (8.59) y (8.60) podemos obtener la distancia q entre el foco O y la directriz ℓ:

$$\frac{h_O^2}{GM} = eq \Rightarrow q = \frac{h_O^2/GM}{\sqrt{1 + 2Eh_O^2/G^2M^2}} \tag{8.68}$$

La primera de las **tres Leyes de Kepler para el movimiento planetario** establece que los planetas viajan en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos*. Estas elipses son casi círculos para la mayor parte de los planetas; la excentricidad de la Tierra es $e = 0.017$. Para obtener

*Las leyes de Kepler, basadas en sus observaciones astronómicas y establecidas en los años 1609 y 1619, fueron estudiadas por Newton antes de que éste publicara los *Principia*, que contienen sus propias leyes del movimiento.

la tercera de las Leyes de Kepler, volvemos nuevamente a nuestras ecuaciones y obtenemos para órbitas elípticas, de la Ec. (8.67) la distancia r cuando $\theta = 90°$:

$$r_{90} = \frac{h_O^2/GM}{1 + 0} = \ell \tag{8.69}$$

Esta distancia, el semilado recto, puede usarse para expresar la distancia r_A entre el foco O y el apogeo A^*, y la distancia r_P entre O y el perigeo P^*. (Ver la Fig. 8.17). En el apogeo, $\theta = \pi$ y las Ecs. (8.59), (8.60) y (8.69) dan

$$r_{A^*} = \frac{h_O^2/GM}{1 - e} = \frac{\ell}{1 - e} \tag{8.70}$$

y en el perigeo ($\theta = 0$),

$$r_{P^*} = \frac{\ell}{1 + e} \tag{8.71}$$

La longitud del semieje mayor de la elipse es

$$a = \frac{r_{A^*} + r_{P^*}}{2} = \frac{\ell}{1 - e^2} \tag{8.72}$$

y la longitud del semieje menor es, por Geometría analítica:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{\ell}{\sqrt{1 - e^2}} \tag{8.73}$$

El área limitada por una elipse es

$$A_T = \pi ab = \pi\left(\frac{\ell}{1 - e^2}\right)\left(\frac{\ell}{\sqrt{1 - e^2}}\right)$$

o bien

$$A_T = \frac{\pi\ell^2}{(1 - e^2)^{3/2}} = \pi a^2\sqrt{1 - e^2} \tag{8.74}$$

Con estos resultados demostraremos ahora la tercera ley de Kepler. Como dA/dt es constante,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h_O}{2} \Rightarrow A = \frac{h_O t}{2} \tag{8.75}$$

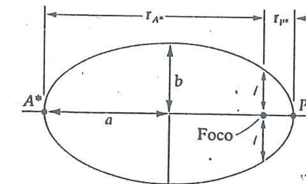


Figura 8.17

en donde consideramos $A = 0$ cuando $t = 0$, digamos en el perigeo. En una órbita tenemos, siendo T el período orbital,

$$A_T = \text{area del elipse}$$

$$= \pi a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{h_O T}{2} \qquad (8.76)$$

Como (según las Ecs. (8.69) y (8.72),

$$h_O = \sqrt{GM\ell} = \sqrt{GMa(1-e^2)} \qquad (8.77)$$

obtenemos de la Ec. (8.76):

$$\pi a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{GMa(1-e^2)}}{2}T \qquad (8.78)$$

por lo que

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \qquad (8.79)$$

La Ec. (8.79) expresa la tercera Ley de Kepler: Los cuadrados de los períodos planetarios son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de los órbitas.

Ejemplo 8.8

Calcular la longitud del semieje mayor de un satélite terrestre con período de 90 min.

Solución

Podemos resolver este problema con ayuda de la tercera ley de Kepler. El peso de una partícula (de masa m) sobre la superficie de la Tierra (de masa M) es tanto mg como GMm/re^2; entonces:

$$mg = \frac{GMm}{r_e^2} \Rightarrow GM = gr_e^2$$

El producto de las constantes G y M es

$$GM = gr_e^2 = \frac{32.2}{5280}(3960)^2 = 95{,}600 \text{ mi}^3/\text{sec}^2$$

Por lo tanto,

$$T^2 = (90 \times 60)^2 = \frac{4\pi^2}{95{,}600}a^3$$

$$a = 4130 \text{ mi}$$

que equivale a 170 mi aproximadamente sobre la superficie de la Tierra

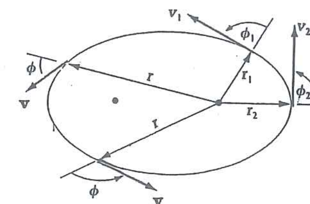


Figura 8.18

Presentaremos otro ejemplo sobre órbitas elípticas, pero primero se necesitan dos ecuaciones que relacionen las velocidades v_1 y v_2 en dos puntos cualesquiera P_1 y P_2, con radios r_1 y r_2 en la órbita. La primera se obtiene de la Ec. (8.37) que establece que $r^2\dot{\theta}$ = constante. Como la velocidad **v** es siempre tangente a la trayectoria, vemos en la Fig. 8.18 que si ϕ es el ángulo entre **r** y **v**, entonces en coordenadas cilíndricas,

$$v \text{ sen } \phi = (\text{componente transversal de } \mathbf{v}) = r\dot{\theta}$$

de modo que

$$r(r\dot{\theta}) = rv \text{ sen } \phi = \text{constante}$$

o, para dos puntos P_1 y P_2 sobre la órbita,

$$r_1 v_1 \text{ sen } \phi_1 = r_2 v_2 \text{ sen } \phi_2 \qquad (8.80)$$

Nótese que en el apogeo y perigeo, $\phi = 90°$. Si P_1 y P_2 son esos dos puntos, obtenemos de la Ec. (8.80),

$$r_{A^*} v_{A^*} = r_{P^*} v_{P^*} \qquad (8.81)$$

y las dos velocidades son inversamente proporcionales a los radios, siendo v mayor en el perigeo, como ya vimos al estudiar la segunda ley de Kepler.

La otra ecuación que relaciona v_1 con v_2 se obtiene del potencial gravitacional, el que según la Ec. (2.27) y el Ejemplo 8.8 es

$$\varphi = -\frac{gr_e^2 m}{r} = -\frac{GMm}{r}$$

Usando el principio de la conservación de la energía entre P_1 y P_2,

$$T_1 + \varphi_1 = T_2 + \varphi_2$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_2}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (8.82)$$

Si P_2 representa el perigeo P^*, como en la Fig. 8.18, la Ec. (8.80) será entonces

$$v_2 = v_{P^*} = \frac{r_1 v_1 \text{ sen } \phi_1}{r_{P^*}} \qquad (8.83)$$

en donde sen $\phi_2 =$ sen 90° = 1. Ahora, si r_1, v_1 y ϕ_1 son los valores iniciales (en el despegue) de r, v y ϕ podemos considerar entonces a esas cantidades como dadas. Sustituyendo la Ec. (8.83) en la (8.82), obtenemos una ecuación para el radio del perigeo, r_2 (= $r_{P'}$):

$$\frac{r_1^2 v_1^2 \operatorname{sen}^2 \phi_1}{r_{P'}^2} - v_1^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_{P'}} - \frac{1}{r_1}\right)$$

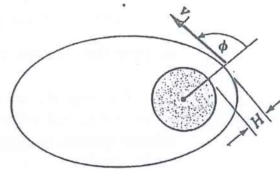
Multiplicando toda la ecuación por $-r_{P'}^2/(r_1^2 v_1^2)$ y reordenando términos, obtenemos

$$\left(\frac{r_{P'}}{r_1}\right)^2\left(1 - \frac{2GM}{r_1 v_1^2}\right) + \left(\frac{r_{P'}}{r_1}\right)\frac{2GM}{r_1 v_1^2} - \operatorname{sen}^2 \phi_1 = 0 \tag{8.84}$$

Vemos que la Ec. (8.84) es una simple ecuación cuadrática en la relación $(r_{P'}/r_1)$, y que es un parámetro adimensional de la órbita. Ilustraremos ahora el uso de esta importante ecuación en un ejemplo.

Ejemplo 8.9

Se pone un satélite en órbita (o sea, se le orbita con los siguientes parámetros de despegue: H = 1000 mi, v_1 = 17 000 mi/h y ϕ = 100°. Determinar los radios de apogeo y perigeo de la órbita resultante.



Solución

Necesitamos GM en mi³/h²; por tanto

$$GM = gr_e^2 = 32.2(3960)^2 \text{ pie·mi}^2/\text{sec}^2$$

$$= 32.2(3960)^2 \times \frac{1}{5280} \times 3600^2 \text{ mi}^3/\text{hr}^2$$

$$= 124 \times 10^{10} \text{ mi}^3/\text{hr}^2$$

Por consiguiente, el parámetro $2GM/(r_1v_1^2)$ en la Ec. (8.84) es entonces

$$\frac{2GM}{r_1 v_1^2} = \frac{2(124 \times 10^{10})}{(1000 + 3960)17{,}000^2} = 1.73$$

La Ec. (8.84) resulta

$$\left(\frac{r_{P'}}{r_1}\right)^2(-0.73) + 1.73\left(\frac{r_{P'}}{r_1}\right) - 0.970 = 0$$

La fórmula cuadrática da

$$\left(\frac{r_{P'}}{r_1}\right)_{1,2} = \frac{-1.73 \pm \sqrt{1.73^2 - 4(-0.73)(-0.970)}}{2(-0.73)}$$

$$= 0.911 \text{ y } 1.46$$

Por lo tanto,

$$r_{P_1} = r_{P'} = 0.911(4960) = 4520 \text{ mi}$$

La otra raíz corresponde al apogeo. (Como la condición de partida sen ϕ = 1 es la misma para el apogeo y el perigeo, ambas respuestas se obtienen con la fórmula cuadrática):

$$r_{P_2} = r_{A'} = 1.46(4960) = 7240 \text{ mi}$$

Las alturas son:

Altura del perigeo = 4520 — 3960 = 560 mi
Altura del apogeo = 7240 — 3960 = 3280 mi

Para determinar la órbita en el espacio, necesitamos conocer el ángulo entre el perigeo y el punto de despegue, y también la excentricidad de la órbita. Los Problemas 8.81 y 8.82 tratan de la obtención de esas dos cantidades dados valores iniciales de r, v y ϕ.

Problemas / Sección 8.3

8.63 Demuestre que un satélite en órbita tiene un período T dado por

$$T = \frac{2\pi ab}{r_{A'}\cdot v_{A'}(\text{or } r_{P'}\cdot v_{P'})}$$

8.64 Demuestre que para un cuerpo en órbita elíptica (Fig. P8.64), $b = \sqrt{r_{A'}\cdot r_{P'}}$.

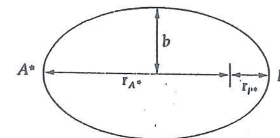


Figura P8.64

8.65 La última visita del cometa Halley a la Tierra fue en 1986. El cometa describe una órbita elíptica alrededor del Sol muy alargada, cada 74 a 79 años; el período varía debido a perturbaciones en su órbita causadas por los cuatro planetas mayores. (Su paso se ha registrado desde el año 240 a.C.) ¿Cuál es la longitud aproximada del semieje mayor de su órbita? (Use 76 años para el período).

8.66 Encuentre el período máximo de un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra. ¿En que hipótesis se basa su respuesta?

8.67 Repita el problema anterior si el satélite está en órbita alrededor de la Luna. Suponga que

$$g_{\text{Luna}} = \frac{1}{6} g_{\text{Tierra}}$$

$$r_{\text{Luna}} = 0.27\, r_{\text{Tierra}}$$

8.68 Demuestre que para órbitas circulares alrededor de un cuerpo atractor de masa M, se tiene que $rv^2 = GM$. Luego use el radio promedio de la Tierra, de 93 × 10⁶ mil, y el hecho de que su órbita es casi circular, para evaluar la constante GM_S para el Sol como centro de atracción (sistema heliocéntrico).

8.69 El primer satélite artificial de la Tierra fué el soviético Sputnik I. Su período orbital era de 96.2 min. Encuentre la longitud de su semieje mayor. Si la excentricidad inicial era de 0.0517, calcule cuáles eran sus distancias máximas y mínimas a la Tierra.

8.70 Demuestre que si un satélite se encuentra en órbita circular de radio r alrededor de un planeta de masa M, la velocidad que debe tener para *escapar* a la atracción gravitacional del planeta, está dada por

Encuentre en cuanto debe incrementarse la velocidad orbital para alcanzar la velocidad de escape

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

8.71 Demuestre que si la velocidad de partida en el Ejemplo 8.9 es de 15 000 mi/h, el satélite no entrará en órbita.

8.72 Usando la Ec. (8.54), demuestre que $B_1 = 0$ se infiere de la condición $dr/d\,\theta = 0$ cuando $\theta = 0$.

*8.73 Demuestre que la Ec. (8.66) se obtiene de las (8.64) y (8.65).

8.74 Encuentre la forma de la fuerza central $F(r)$ para la cual todas las órbitas circulares alrededor de un centro de atracción tienen el mismo ímpetu angular (y se describen en ellas áreas iguales en tiempos iguales).

8.75 Demuestre que en términos del radio r_{P^*} y la velocidad v_{P^*} en el perigeo, la energía y excentricidad de la órbita pueden expresarse como

$$\frac{Er_{P^*}}{GM} = \frac{r_{P^*}v_{P^*}^2}{2GM} - 1$$

y

$$e = \frac{r_{P^*}v_{P^*}^2}{GM} - 1$$

8.76 Use las Ecs. (8.81) y (8.82) para demostrar que las velocidades en el apogeo y en el perigeo, en términos de los radios conocidos r_{A^*} y r_{P^*}, son:

$$v_{A^*} = \sqrt{\frac{2GMr_{P^*}}{r_{A^*}(r_{A^*} + r_{P^*})}}$$

y

$$v_{P^*} = \sqrt{\frac{2GMr_{A^*}}{r_{P^*}(r_{A^*} + r_{P^*})}}$$

* 8.77 Un cohete se encuentra en una órbita circular estacionaria a 200 mil de altura sobre un planeta. ¿Qué incremento a la velocidad en el punto P resultará en la nueva órbita elíptica mostrada en la Fig. P8.77? *Sugerencia*: Use los resultados del Problema 8.75.

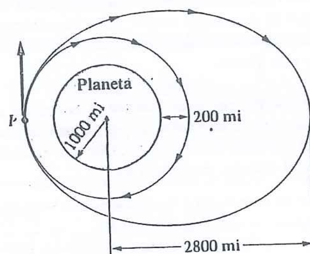


Figura P8.77

* 8.78 Un satélite se encuentra en una órbita circular de radio R_1. (Fig. P8.78). Encuentre el incremento (negativo) de velocidad que llevará al satélite a la posición A, con radio R_2 ($< R_1$), a 180° de la posición original. Luego encuentre el segundo incremento negativo de velocidad, esta vez aplicado en A, que pondrá al satélite en una órbita circular de radio R_2. *Sugerencia*: Use el Problema 8.76.

8.79 Un satélite tiene r_{A^*} = 8000 mi y r_{P^*} = 5000 mi. Si fue lanzado con una velocidad de 15 000 mi/h, ¿cuál fué su radio en el lanzamiento? ¿Cuál fue el ángulo ϕ entre r y v durante el lanzamiento? *Sugerencia*: Use el Problema 8.76.

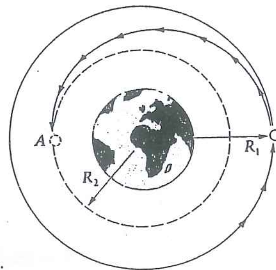


Figura P8.78

8.80 ¿Cuál es el período del Satélite en el Problema anterior?

* 8.81 Demuestre que si los parámetros de lanzamiento, r_1, v_1 y ϕ_1 son conocidos, entonces el ángulo θ desde el perigeo hasta el punto de lanzamiento de un satélite en órbita está dado por

$$\tan\theta = \frac{r_1v_1^2}{GM}\operatorname{sen}\phi_1\cos\phi_1 \Big/ \left[\frac{r_1v_1^2}{GM}\operatorname{sen}^2\phi_1 - 1\right]$$

* 8.82 Demuestre que si los parámetros de lanzamiento r_1, v_1 y ϕ_1 son conocidos, entonces la excentricidad de la cónica resultante es:

$$e = \sqrt{\left(\frac{r_1v_1^2}{GM} - 1\right)^2\operatorname{sen}^2\phi_1 + \cos^2\phi_1}$$

* 8.83 Un gran meteorito se acerca a la Tierra (Fig. P8.83). Las mediciones indican que en un cierto tiempo tiene una velocidad de 8000 mi/h, en un radio de 100,000 mi. ¿Entrará en órbita? Si lo hace, ¿con qué período? Si no, ¿cuál es la velocidad máxima v que le habría permitido entrar en órbita? *Sugerencia*: Use el resultado del problema anterior.

8.84 Clasifique las distintas órbitas según los valores del parámetro adicional $GM/(r_0v_0)$ para un satélite lanzado en las condiciones de la Fig. P8.84.

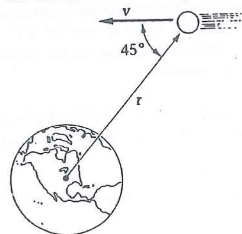


Figura P8.83

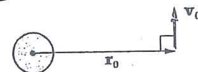


Figura P8.84

*8.85 Encuentre el incremento en energía cinética necesario para mover un satélite del radio R al nR(siendo $n > 1$) en órbitas circulares. *Sugerencias*: Use el Problema 8.76.

*8.86 Una partícula de masa m se mueve en el plano xy bajo la influencia de una fuerza central de atracción que es proporcional a su distancia desde el origen $[F(r) = kr)$. Se tienen las mismas condiciones iniciales que en el Problema 8.84. Encuentre los valores máximo y mínimo de r en el movimiento resultante.

8.87 Un satélite tiene apogeo y perigeo a 1000 y 180 mi, respectivamente, por encima de la superficie de la Tierra. Calcule el período del satélite.

8.88 En el problema anterior encuentre las velocidades del Satélite en el perigeo y en el apogeo. *Sugerencia:* Use el Problema 8.76.

Cuestionario de Repaso / Capítulo 8

¿Verdadero o falso?

1. Las frecuencias de vibración del movimiento periódico están asociadas sólo a amplitudes pequeñas.
2. Las frecuencias naturales de vibración están asociadas sólo al movimiento de traslación.
3. Las frecuencias naturales de vibración de cuerpos en un campo gravitacional no tienen que depender de g.
4. Las vibraciones libres siempre decrecen en el tiempo debido al "amortiguamiento en el mundo real".
5. Hay tres tipos de vibraciones amortiguadas, y el caso subcrítico tiene la mayor importancia práctica.
6. En vibraciones forzadas, la porción de régimen permanente de la respuesta se desvanece gradualmente debido al amortiguamiento inherente al sistema físico.
7. En general, la tasa de acumulación de cantidad de movimiento dentro de una región del espacio es igual a la tasa con que es transportado a esa región.

Al usar las leyes de Euler en su forma del volumen de control éste:

8. debe estar fijo en el marco inercial de diferencia;
9. puede cambiar en forma o volumen con el tiempo;
10. debe ser una región cerrada del espacio.
11. En un problema unidimensional de volumen de control, la primera Ley de Euler se puede formular en general de la siguiente manera:

$$\Sigma F = \frac{d}{dt}(mv_C) = \dot{m}v_C + m\dot{v}_C$$

12. La ley de acumulación, producción y transporte se aplica únicamente a cantidades escalares.

13. Una fuerza central depende sólo de la distancia r entre las partículas atrayentes y atraídas.

14. Existen otras fuerzas centrales además de la gravedad.

15. En todo problema de fuerza central la cantidad de movimiento angular respecto al punto de atracción O es una constante.

16. Las tres leyes de Kepler se aplican a los movimientos de una partícula bajo la influencia de cualquier tipo de fuerza central.

17. Todos los problemas de fuerza central conducen a trayectorias que son curvas cónicas.

18. En un problema de fuerza central gravitacional, el tipo de cónica está determinado por la excentricidad.

Respuestas: 1 F; 2 F; 3 V; 4 V; 5 V; 6 F; 7 F; 8 F; 9 V; 10 V; 11 F; 12 F; 13 V; 14 V; 15 V; 16 F; 17 F; 18 V.

Apéndices

Apéndice A

Unidades de medida

El valor numérico asignado a una cantidad física expresa la relación entre esa cantidad y una cantidad de referencia llamada **unidad de medida**. Existe actualmente un conjunto internacional de normas metrológicas llamado *Sistema Internacional de Unidades*, (simbolizado por SI) descendiente del sistema métrico mks (metro-kilogramo-segundo). En el sistema SI, la unidad de tiempo es el **segundo** (s), la unidad de longitud es el **metro** (m) y la unidad de masa es el **kilogramo** (kg). Estas unidades independientes (o *básicas*) se definen en función de entidades o fenómenos físicos. El segundo se define en función del periodo de una radiación estudiada en física atómica; el metro se definía* en función de la longitud de onda de una radiación diferente; el kilogramo se establece como la masa de un cierto cuerpo patrón conservado en Francia. Cualquier otra unidad SI que se necesite se *derivará* de esas tres unidades básicas. Por ejemplo, la unidad de fuerza, el **newton** (N), es como veremos, una unidad derivada en el sistema SI.

Hasta hace poco casi todos los ingenieros en Estados Unidos usaban el sistema (llamado gravitacional inglés o sistema US) en el que las unidades básicas son el **segundo** para el tiempo, el **pie** para la longitud* y la **libra** para la fuerza. La libra es el peso en un lugar específico de un cierto cuerpo conservado en Estados Unidos. En este sistema la unidad de masa, el **slug**, es una entidad derivada. Es fuente de confusiones que a veces se usa la unidad de masa llamada también "libra" (la masa cuyo peso es una libra de fuerza en condiciones gravitacionales estándares); asimismo, en Europa y América Latina, el término *kilogramo* solía usarse como el de la unidad de fuerza . En Estados Unidos los compradores en los supermercados están expuestos a esta confusión porque los artículos están marcados por peso (mejor dicho, por masa) tanto en libras como en kilogramos. En este texto, sin excepción, *la libra es una unidad de fuerza* y *el kilogramo es una unidad de masa*.

Estados Unidos se encuentra actualmente en el penoso proceso de cambiar gradualmente al sistema métrico de unidades después de haber usado por más de 200 años el sistema inglés o británico. Los nuevos ingenieros que comenzarán a practicar su profesión en la década de los 90 se enfrentarán a ambos sistemas, por lo que es crucial para ellos dominarlos (incluido el *pensar* en términos de las unidades de ambos) y ser capaces de convertir las unidades de

* (N. del R.) Su definición más reciente se basa en la velocidad de la luz: Distancia recorrida por la luz en el vacio durante un intervalo de tiempo igual a la fracción 1/299 792 458 de segundo. La fracción es aproximadamente 3.3×10^{-9} s. Este apéndice se actualiza y aclara con las consideraciones de la U.S. Metric Association (USMA) y las normas del Bureau International des Poids et Mesures (BIPM).

* Algunas veces, particularmente en el campo de las vibraciones mecánicas, se usa la pulgada como unidad de longitud; en ese caso la unidad de masa es 1 lb · s^2/plg, que equivale a 12 slug.

(N. del R.) Véase la conversión a unidades gravitacionales en el reverso de la cubierta.

un sistema al otro. Las unidades mencionadas aquí están resumidas en la Tabla A.1 para los sistemas SI y US.

Tabla A.1

Cantidad	Unidad SI	Unidad US
fuerza	newton (N)	libra (lb)
masa	kilogramo (kg)	slug
longitud	metro	pie (pie)
tiempo	segundo	segundo (s)

Examinaremos ahora cómo se deriva el newton en el SI y el slug en el sistema US. Designaremos las dimensiones de las cuatro unidades fundamentales de la siguiente manera: *F* (fuerza), *M* (masa), *L* (longitud) y *T* (tiempo). De la primera ley del movimiento (discutida en detalle en el Capítulo 2), $F = ma$, observamos que las cuatro unidades básicas siempre están relacionadas por la fórmula,

$$F = \frac{ML}{T^2}$$

Esto implica, por supuesto, que podemos seleccionar tres de las unidades como básicas y derivar la cuarta. Dos maneras en que se ha hecho lo anterior originaron los sistemas *gravitacionales* y los sistemas *absolutos*. La primera clasificación corresponde al sistema US, y la segunda al SI (ver la Tabla A.2).

Tabla A.2

Sistema gravitacional	Sistema absoluto
Las unidades básicas son las de fuerza, longitud y tiempo; la de masa es derivada: $M = \frac{FT^2}{L}$	Las unidades básicas son las de masa, longitud y tiempo; la de fuerza es derivada: $F = \frac{ML}{T^2}$
Este sistema ha sido el tradicional entre los ingenieros.	Este sistema ha sido el tradicional entre los físicos.
En el sistema US de unidades, libra, el pie y el segundo son básicas; la unidad de masa, el slug, es derivada: $1 \text{ slug} = 1 \frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{pie}}$	En el Sistema Internacional de Unidades (SI), el kilogramo, el metro y el segundo son básicas; la unidad de fuerza, el newton, es derivada: $1 \text{ newton} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$
...l slug puede entonces expresarse como la masa que es acelerada 1 pie/s² al actuar sobre ella una fuerza de 1 lb.	El newton puede entonces expresarse como la fuerza que acelera 1 m/s² a una masa de 1 kg.

Por consiguiente, en unidades US la masa de un objeto que pesa *W* lb es igual a *W*/32.2 slugs. Similarmente, en unidades SI el peso de un objeto con masa igual a *M* kilogramos es de 9.81 *M* newtons.

En el SI la unidad de momento de fuerza es el newton-metro (N · m); en el sistema US es la libra-pie (lb · pie). El trabajo y la energía tienen esta misma dimensión; la unidad en el US es el pie · lb y en el SI es el joule (*J*), que equivale dimensionalmente al newton-metro. En el SI la unidad de potencia se llama watt (W) y es igual a un joule por segundo (J/s); en el sistema US es el pie · lb/s. La unidad de presión o esfuerzo en el SI se denomina pascal (Pa) y es igual a 1 N/m²; en el sistema US es la libra por pie cuadrado (lb/pie²), aunque con frecuencia se usa la pulgada como unidad de longitud y entonces la unidad de presión corresponde a la libra por pulgada cuadrada (lb/plg²) (o psi). En ambos sistemas, la unidad de frecuencia es el hertz (Hz) que equivale a un ciclo por segundo. Otras unidades de interés en la dinámica se incluyen en la Tabla A.3.

Tabla A.3

Cantidad	Unidad SI	Unidad US
Velocidad	m/s	pie/s
Velocidad angular	rad/s	rad/s
Aceleración	m/s²	pie/s²
Aceleración angular	rad/s²	rad/s²
Densidad	kg/m³	slug/pie³
Peso específico	N/m³T	lb/pie³
Momento de inercia de masa	kg · m²	slug · pie²
Cantidad de movimiento	kg · m/s	slug · pie/s
Cantidad de movimiento angular	kg · m²/s	slug · pie²/s
Impulso	N · s(= kg · m/s)	lb · s
Impulso angular	N · m · s(= kg · m²/s)	lb · pie · s

En el sistema SI existen prefijos para indicar multiplicación por potencias de 10. Por ejemplo, kilo (k) se usa para indicar multiplicación por 1000 o 10^3; así, 5 kN (kilonewtons) representa 6×10^3 N. En la Tabla A.4 se muestran otros prefijos de uso frecuente en ingeniería.

Tabla A.4

tera	T	10^{12}	centi	c	10^{-2}
giga	G	10^{9}	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^{6}	micro		10^{-6}
kilo	k	10^{3}	nano	n	10^{-9}
hecto	h	10^{2}	pico	p	10^{-12}
deca	da	10^{1}	fento	f	10^{-15}
deci	d	10^{-1}	ato	a	10^{-18}

Repetimos que en un futuro inmediato, los ingenieros estadounidenses encontrarán de valor conocer bien los dos sistemas, el US y el SI; por este motivo se aplican ambos conjuntos de unidades en los ejemplos y problemas de todo el libro.

Se verá ahora el problema de convertir unidades. La conversión de unidades se logra rápida y eficientemente multiplicando por fracciones equivalentes hasta que aparezcan las unidades deseadas. Supongamos que se desea saber a cuántos newtons-metro (N · m) de momento equivale 1 lb · pie. Como 1 m tiene 3.281 pie y 1 lb tiene 4.448 N.

$$1 \text{ lb} \cdot \text{pie} = 1 \text{ lb} \cdot \text{pie}\left(\frac{1 \text{ m}}{3.281 \text{ pie}}\right)\left(\frac{4.448 \text{ N}}{1 \text{ pie}}\right) = 1.356 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Nótese que si la unidad no deseada (la lb. en este caso) no se cancela, el factor de conversión estará invertido.

Como segundo ejemplo, encontremos cuántos slugs de masa hay en un kilogramo:

$$1\ \text{kg} = 1\,\frac{\cancel{N}\cdot s^2}{\cancel{m}}\cdot\left(\frac{1\ \text{lb}}{4.448\,\cancel{N}}\right)\cdot\left(\frac{1\,\cancel{m}}{3.281\ \text{ft}}\right) = \frac{1}{14.59}\ \frac{\text{lb-sec}^2}{\text{ft}} = 0.06852\ \text{slug}$$

Recíprocamente, 1 slug = 14.59 kg. En la Tabla A.5* se da un conjunto de factores de conversión para pasar del SI al US, y viceversa.

Tabla A.5

Para convertir de US	a SI	Multiplicar por	Recíproco (para pasar de Si a US)
Longitud, área, volumen			
pie (pie)	metro (m)	0.30480	3.2808
pulgada (plg)	m	0.025400	39.370
milla (mi)	m	1609.3	6.2137×10^{-4}
pie^2 (pie^2)	$metro^2$ (m^2)	0.092903	10.764
$pulgada^2$ (plg^2)	m^2	6.4516×10^{-4}	1550.0
pie^3 (pie^3)	$metro^3$ (m^3)	0.028317	35.315
$pulgada^3$ (plg^3)	m^3	1.6387×10^{-5}	61024
Velocidad			
pie/segundo (pie/s)	metro/segundo (m/s)	0.30480	3.2808
pie/minuto (pie/min)	m/s	0.0050800	196.85
nudo (milla náutica/h) (nmi/h)	m/s	0.51444	1.9438
milla/h (mi/h)	m/s	0.44704	2.2369
milla/h (mi/h)	kilómetro/hora (km/h)	1.6093	0.62137
Aceleración			
$pie/segundo^2$ (pie/s^2)	$metro/segundo^2$ (m/s^2)	0.30480	3.2808
$plg/segundo^2$ (pie/s^2	m/s^2	0.025400	39.370
Masa			
libra masa (lbm)	kilogramo (kg)	0.45359	2.20462
slug (lb · s^2/pie)	kg	14.594	0.068522
Densidad			
libra masa/$pulgada^3$ (lbm/plg^3)	kg/m^3	2.7680×10^4	3.6127×10^{-5}
libra masa/pie^3 (lbm/pie^3)	kg/m^3	16.018	0.062428
slug/pie^3 (slug/pie^3	kg/m^3	515.38	0.0019403

(Continua)

* Redondeado a los cinco dígitos citados. Nótese, por ejemplo, que 1 pie = 0.30480 m, de modo que:

$$(\text{número de pies}) \times \left(\frac{0.30480\ \text{m}}{1\ \text{ft}}\right) = \text{número de metros.}$$

Tabla A.5 *(Continuación)*

Para convertir de US	a SI	Multiplicar por	Recíproco (para pasar de Si a US)
Fuerza			
libra (lb) o libra fuerza (lbf)	newton (N)	4.4482	0.22481
Momento de fuerza			
libra-pie (lb · pie)	newton-metro (N · m)	1.3558	0.73757
Energía, trabajo			
pie-libra (pie · lb)	joule (J)	1.3558	0.73757
Potencia			
pie-libra/minuto (pie · lb/min)	watt (W)	0.022597	44.254
caballo (hp)	W	745.70	0.0013410
Esfuerzo, presión			
libra/$pulgada^2$ (lb/plg^2) (psi)	newton/$metro^2$ (N/m^2) (Pa)	6894.8	1.4504×10^{-4}
libra/pie^2 (lb/pie^2)	newton/$metro^2$ (N/m^2) (Pa)	47.880	0.020886
Momento de inercia de masa			
slug-pie^2 (slug · pie^2)	kg · m^2	1.3558	0.73756
Cantidad de movimiento (lineal)			
slug-pie/segundo (slug · pie/s)	kg · m/s	4.4482	0.22481
Impulso (lineal)			
libra-segundo (lb · s)	newton-segundo (N · s)	4.4482	0.22481
Cantidad de movimiento angular			
slug-pie^2/segundo (slug · pie^2/s)	kg · m^2/s	1.3558	0.73756
Impulso angular			
libra-pie-segundo (lb · pie · s)	newton-metro-segundo (N · m · s)	1.3558	0.73756

Adviértase que las unidades de tiempo (segundo, s), velocidad angular (rad/s, o bien l/s) y aceleración angular (rad/s^2, o bien l/s^2) son las mismas en los dos sistemas. Con cinco dígitos, la aceleración de la gravedad al nivel del mar es de 32.174 pie/s^2 en el sistema US y de 9.8067 m/s en el SI.

Se recuerda al lector que debe tenerse mucho cuidado con los cálculos numéricos que implican unidades diferentes. Por ejemplo, si dos longitudes van a sumarse, siendo una de 2 pie y la otra de 6 plg, la simple suma de esas dos cantidades, 2 + 6 = 8, no proporciona por supuesto una medida de la longitud deseada. Es cierto también que no podemos sumar o igualar las medidas numéricas de diferentes tipos de entidades; así, no tiene sentido pretender sumar una masa a una longitud, ya que estas cantidades tienen dimensiones diferentes. Dimensión es el nombre asignado al *carácter* de la medida estándar implicada en vez de a la selección de una medida estándar particular (unidad). En ciencia y en ingeniería tratamos de desarrollar ecuaciones que expresen las relaciones entre varias entidades de un fenómeno físico. Expresamos tales ecuaciones en forma simbólica, de modo que son válidas independientemente de la selección del sistema de unidades, pero, sin embargo, deben ser *dimensionalmente consistentes*. Por ejemplo, en la siguiente ecuación podemos verificar que las unidades en el primer miembro concuerdan con las del segundo; r es una distancia radial, P es una fuerza y los puntos denotan de derivadas respecto al tiempo:

$$P - mg\cos\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

Las dimensiones de. . .	. . .son
P	F
$mg\cos\theta$	$M\left(\frac{L}{T^2}\right)(1) = F$
$m\ddot{r}$	$M\frac{L}{T^2} = F$
$-mr\dot{\theta}^2$	$ML\left(\frac{1}{T}\right)^2 = F$

Por consiguiente, las unidades de cada término en la ecuación son las de fuerza. Si tal verificación se hace antes de sustituir valores numéricos, se puede ahorrar mucho tiempo en caso de haber cometido un error.

Problemas / Apéndice A

A.1 Determine las unidades de la constante de la gravitación universal G definida por

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

en (a) el SI y (b) en el sistema US

A.2 Calcule el peso en libras de 1 kg de masa.

A.3 Calcule el peso en newtons de 1 slug de masa.

A.4 Una *libra masa* (lbm) es la masa de una substancia sobre la que actúa 1 lb de fuerza gravitacional al nivel del mar. Encuentre la relación entre (a) 1 lbm y 1 slug; (b) 1 lbm y 1 kg.

A.5 La cantidad de movimiento de un cuerpo es el producto de su masa m y la velocidad v_C de su centro de masa. Un joven tira una pelota de 8 onzas al aire con una rapidez inicial de 20 mi/h. Calcule la magnitud de la cantidad de movimiento de la pelota en (a) slug · pie/s; (b) en kg · m/s.

A.6 ¿Es correcta dimensionalmente la siguiente ecuación?

$$\int_0^5 Fv\,dt = \frac{mv^2}{2} + ma \qquad (v = \text{velocidad};\ a = \text{aceleración})$$

A.7 La ecuación para la distancia r_s del centro de la Tierra a la órbita de un satélite geosincrónico es

$$gr_e^2 = r_s^3\omega^2 \qquad (\omega = \text{rapidez angular de la Tierra};\ r_e = \text{radio de la Tierra})$$

a. Demuestre que la ecuación es dimensionalmente correcta.

b. Use la ecuación para evaluar la razón del radio de la órbita al radio de la Tierra.

A.8 La constante de la gravitación universal es $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg². Exprese G en las unidades del sistema US lb · pie²/slug².

Apéndice **B**

Ejemplos de análisis numérico — Método de Newton-Raphson

Hay algunos sitios en este libro en los que surgen ecuaciones cuyas soluciones no se encuentran fácilmente por medio del álgebra elemental; se trata de polinomios de grado superior al segundo, o bien de ecuaciones trascendentes. En este apéndice explicamos brevemente la idea fundamental en que se basa el *método numérico de Newton-Raphson* para resolver tales ecuaciones. Aplicaremos primero el método para encontrar una de las raíces de la ecuación cúbica que aparece en el Capítulo 7.

Para resolver la ecuación cúbica del Ejemplo 7.5,

$$f(\mathcal{J}) = -\mathcal{J}^3 + 48\mathcal{J}^2 - 633\mathcal{J} + 1342 = 0$$

podríamos, alternativamente, usar el algoritmo de Newton-Raphson. Con este procedimiento se encuentra una raíz de la ecuación $f(\mathcal{J}) = 0$ (no tiene que ser una ecuación polinomial) usando la pendiente de la curva. El algoritmo, que puede encontrarse en forma más detallada en cualquier libro sobre análisis numérico, consiste en lo siguiente. Si $\mathcal{J}_{1_0}$ es una estimación inicial de una raíz $\mathcal{J}_1$, entonces una mejor aproximación es

$$\mathcal{J}_{1_1} = \mathcal{J}_{1_0} - \frac{f(\mathcal{J}_{1_0})}{f'(\mathcal{J}_{1_0})}$$

Las Figuras B.1 y B.2 indican qué es lo que sucede. La cantidad $f(\mathcal{J}_{1_0})/f'(\mathcal{J}_{1_0})$ ocasiona un retroceso en la aproximación de $\mathcal{J}_1$, en nuestro caso del valor *inicial* 3 al valor mejorado $\mathcal{J}_{1_1}$:

$$\mathcal{J}_{1_1} = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{-152}{-372}$$

$$= 3 - 0.408602150$$

$$= 2.591397850$$

en donde

$$f'(\mathcal{J}) = -3\mathcal{J}^2 + 96\mathcal{J} - 633$$

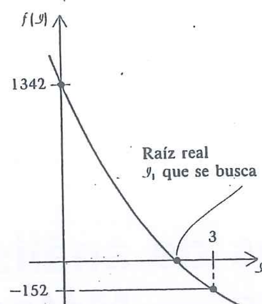


Figura B.1

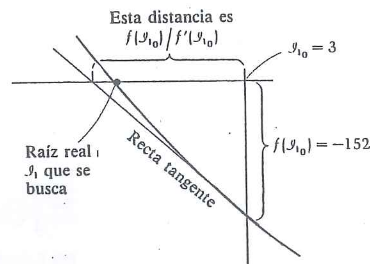


Figura B.2

de modo que $f'(3) = -372$. Repitiendo el algoritmo, obtenemos

$$\vartheta_{1_2} = \vartheta_{1_1} - \frac{f(\vartheta_{1_1})}{f'(\vartheta_{1_1})}$$

$$= 2.591397850 - \frac{6.579491260}{-404.3718348}$$

$$= 2.591397850 + 0.016270894$$

$$= 2.607668744$$

Repitiendo una vez más,

$$\vartheta_{1_3} = \vartheta_{1_2} - \frac{f(\vartheta_{1_2})}{f'(\vartheta_{1_2})}$$

$$= 2.607668744 - \frac{0.010645000}{-403.0636094}$$

$$= 2.607668744 + 0.000026410$$

$$= 2.607695154$$

Este algoritmo puede programarse fácilmente en una computadora. Después de hacerlo así, los resultados son (con la misma estimación inicial $\vartheta_{1_0} = 3$):

$$\vartheta_{1_0} = 3$$
$$\vartheta_{1_1} = 2.591397850$$
$$\vartheta_{1_2} = 2.607668744$$
$$\vartheta_{1_3} = 2.607695154$$
$$\vartheta_{1_4} = 2.607695156$$
$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{1_5} &= 2.607695153\\ \vartheta_{1_6} &= 2.607695153\\ \vartheta_{1_7} &= 2.607695153\end{aligned}\right\} \text{Hay convergencia}$$

que está de acuerdo con los resultados del Ejemplo 7.5.

Incidentalmente, nótese en las Figs. B.3 a B.5 que sumando $(-f/f')$ para formar la nueva estimación resulta igualmente bien para las otras tres combinaciones de signo de f y f'. Adviértase también que si la estimación queda *muy lejos* de la raíz, como P en la Fig. B.4, el procedimiento puede que no converja; la tangente Q en este caso nos llevaría muy lejos de la raíz deseada.

Ahora consideremos la ecuación del Problema 5.140 cuando $M = 4m$:

$$f(\theta) = \text{sen}\,\theta - \frac{\theta}{2} = 0 \qquad \text{(B.1)}$$

siendo la derivada de f:

$$f'(\theta) = \cos\theta - \frac{1}{2}$$

Hay sólo una raíz de la Ec. (B.1) para $\theta > 0$, como puede verse en la Fig. B.6, que muestra las dos funciones que forman a $f(\theta)$. Para encontrar esta raíz, podemos usar el método de Newton-Raphson, tal como se describió previamente. La Fig. B.7 indica que π puede servir

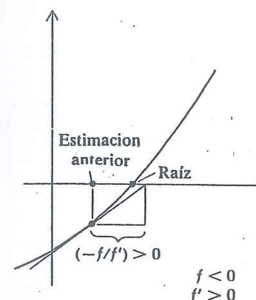


Figura B.3

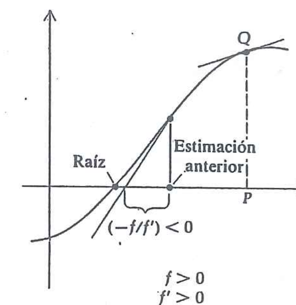


Figura B.4

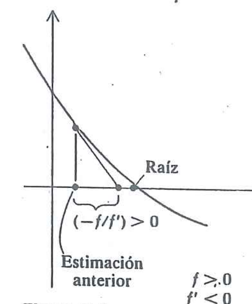


Figura B.5

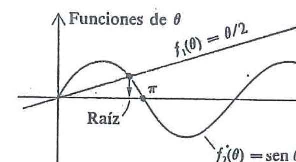


Figura B.6

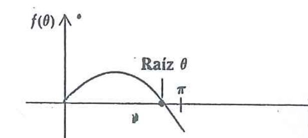


Figura B.7

como una primera estimación de la raíz. Un programa del método de Newton-Raphson revela que así es y proporciona muy rápidamente los valores indicados a continuación:

$$\theta_0 = 3.141592654$$
$$\theta_1 = 2.094395103$$
$$\theta_2 = 1.913222955$$
$$\theta_3 = 1.895671752$$
$$\theta_4 = 1.895494285$$
$$\left.\begin{aligned}\theta_5 &= 1.895494267\\ \theta_6 &= 1.895494267\\ \theta_7 &= 1.895494267\end{aligned}\right\}\quad \text{Hay convergencia}$$

El último ejemplo en este Apéndice será para resolver la ecuación

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - q\right) = 0.373q$$

del Ejemplo 2.8. Escribiremos esta ecuación como sigue:

$$f(q) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - q\right) - 0.373q = 0$$

con

$$f'(q) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - q\right) - 0.373$$

El croquis en la Fig. B.8 muestra algunos puntos que indican que $\pi/2$ está bastante cercano a la raíz. Se dan a continuación los resultados de un programa del método de Newton-Raphson análogo al de los dos primeros ejemplos, que permite encontrar rápidamente el valor de la raíz con mucha precisión:

$$q_0 = 1.570796327$$
$$q_1 = 1.683007224$$
$$q_2 = 1.679300543$$
$$\left.\begin{aligned}q_3 &= 1.679296821\\ q_4 &= 1.679296821\\ q_5 &= 1.679296821\end{aligned}\right\}\quad \text{Hay convergencia}$$

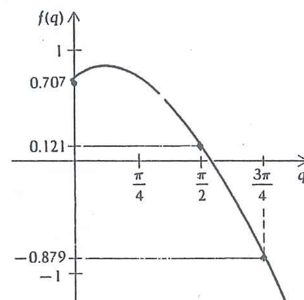


Figura B.8

Apéndice C

Momentos de inercia de masas (Véase también la Sección 4.3)

	Objeto	Coordenadas del centro de masa y volumen V	Momentos de inercia respecto a los ejes indicados
Barra delgada recta		$(0, 0, 0)$ $V = A\ell$ (A = área de sección transversal)	$I^C_{xx} \approx 0,\ I^C_{yy} = I^C_{zz} \approx \dfrac{m\ell^2}{12}$ (Nota: $I^E_{yy} = I^E_{zz} \approx m\ell^2/3$.)
Barra delgada en círculo		$\left(\dfrac{r \operatorname{sen}(\alpha/2)}{\alpha/2}, 0, 0\right)$ $V = Ar\alpha$ (A = área de sección transversal	$I_{xx} = \dfrac{mr^2}{2}\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)$ $I_{yy} = \dfrac{mr^2}{2}\left(1 + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)$ $I_{zz} = mr^2$ (Nótense los casos particulares para $\alpha = \pi$ y 2π.)
Barra delgada en "V"		$\left(\dfrac{\ell \operatorname{sen}\alpha}{2}, 0, 0\right)$ $V = 2A\ell$ (A = área de sección transversal)	$I_{xx} = \dfrac{m\ell^2 \cos^2\alpha}{3}$ $I_{yy} = \dfrac{m\ell^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{3}$ $I_{zz} = \dfrac{m\ell^2}{3}$

	Objeto	Coordenadas del centro de masa y volumen V	Momentos de inercia respecto a los ejes indicados
Paralelepípedo rectangular		$(0, 0, 0)$ $V = abc$	$I_{xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$ (Nota: si es una placa rectangular el espesor se desprecia)
Cilindro hueco		$(0, 0, 0)$ $V = \pi(R^2 - r^2)H$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{4}\left(R^2 + r^2 + \frac{H^2}{3}\right)$ $I_{zz} = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$ (Nótense los casos particulares cuando $r = 0$, $r \approx R$ y $H \ll R$). Si $R \ll H$, véase el caso de la barra delgada.
Cuatro casos particulares 1. Si $r = 0$: cilindro sólido o macizo		$(0, 0, 0)$ $V = \pi R^2 H$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{4} + \frac{mH^2}{12}$ $I_{zz} = \frac{mR^2}{2}$
2. Si $r \approx R$: casco cilíndrico (tubo)	R = radio medio	$(0, 0, 0)$ $V = 2\pi RtH$	$I_{xx} = I_{yy} \approx \frac{mR^2}{2} + \frac{mH^2}{12}$ $I_{zz} \approx mR^2$
3. Si $H \ll r$: placa anular o anillo	H (espesor)	$(0, 0, 0)$ $V = t(R^2 - r^2)H$	$I_{xx} = I_{yy} \approx \frac{m}{4}(R^2 + r^2)$ $I_{zz} = \frac{m(R^2 + r^2)}{2}$

	Objeto	Coordenadas del centro de masa y volumen V	Momentos de inercia respecto a los ejes indicados
4. Si $H \ll r \approx R$: Anillo delgado con sección transversal rectangular	$t = R - r$ H (espesor)	$(0, 0, 0)$ $V = 2\pi RtH$ $= 2\pi R(A)$ $(A = tH$ = área de sección transversal	$I_{xx} = I_{yy} \approx \frac{mR^2}{2}$ $I_{zz} \approx mR^2$ (Nota: se aplican para *cualquier* forma de la sección transversal, en tanto el anillo sea delgado)
Placa triangular recta delgada	Espesor = t	(Interesan aquí las propiedades respecto a cualquier base, como la x en la figura.) $\left(\frac{2B}{3}, \frac{H}{3}, 0\right)$ $V = \frac{1}{2}BHt$	$I_{xx} = \frac{mH^2}{6}$ $I_{yy} = \frac{mB^2}{2}$ $I_{zz} = \frac{mH^2}{6} + \frac{mB^2}{2}$ $I_{xy} = -\frac{mBH}{4}$
Placa elíptica delgada	Espesor = t en la dirección z	$(0, 0, 0)$ $V = \pi abt$	$I_{xx} = \frac{mb^2}{4}$ $I_{yy} = \frac{ma^2}{4}$ $I_{zz} = \frac{m(a^2 + b^2)}{4}$
Placa parabólica delgada	Espesor = t, en la dirección z	$\left(\frac{3a}{5}, 0, 0\right)$ $V = \frac{4}{3}abt$	$I_{xx} = \frac{mb^2}{5}$ $I_{yy} = \frac{3ma^2}{7}$ $I_{zz} = \frac{m(15a^2 + 7b^2)}{35}$
Placa delgada en sector circular	Espesor = t	$\left(\frac{2R\ \text{sen}(\alpha/2)}{3\alpha/2}, 0, 0\right)$ $V = \frac{\alpha R^2 t}{2}$	$I_{xx} = \frac{mR^2}{4}\left(1 - \frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha}\right)$ $I_{yy} = \frac{mR^2}{4}\left(1 + \frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha}\right)$ $I_{zz} = \frac{mR^2}{2}$
Dos casos particulares 1. Si $\alpha = \pi$: placa semicircular	Espesor = t	$\left(\frac{4R}{3\pi}, 0, 0\right)$ $V = \frac{\pi R^2 t}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} \approx \frac{mR^2}{4}$ $I_{zz} = \frac{mR^2}{2}$

	Objeto	Coordenadas del centro de masa y volumen V	Momentos de inercia respecto a los ejes indicados
2. Si $\alpha = 2\pi$: placa circular	Espesor = t	$(0, 0, 0)$ $V = \pi R^2 t$	$I_{xx} = I_{yy} \approx \frac{mR^2}{4}$ $I_{zz} = \frac{mR^2}{2}$ (Nota: los resultados parecen ser iguales que para la placa semicircular, pero las masas difieren en un factor de 2)
Placa delgada en segmento circular	Espesor = t	$\left(\frac{4R\,\text{sen}^3(\alpha/2)}{3(\alpha - \text{sen}\,\alpha)}\right)$ $V = \frac{R^2 t}{2}(\alpha - \text{sen}\,\alpha)$	$I_{xx} = \frac{mR^2}{12}(3 - k)$ $I_{yy} = \frac{mR^2}{4}(1 + k)$ $I_{zz} = \frac{mR^2}{6}(3 + k)$ en donde $k = \frac{(1 - \cos\alpha)\,\text{sen}\,\alpha}{\alpha - \text{sen}\,\alpha}$ (Nótense los casos particulares para $\alpha = \pi$, y 2π.)
Tetraedro rectangular		$\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right)$ $V = \frac{abc}{6}$	$I_{xx} = \frac{m}{10}(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{m}{10}(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{m}{10}(a^2 + b^2)$
Esfera hueca		$(0, 0, 0)$ $V = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}m\left(\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}\right)$ (Nota: si $r = 0$, se obtiene $\frac{2}{5}mR^2$ y si $r \approx R$ se obtiene $\frac{2}{3}mR^2$ $V \approx$ con $4\pi R^2 t$, en donde $t = R - r$ = espesor del casco esférico; $(R - r)$ es divisor del numerador y del denominador.
Elipsoide		$(0, 0, 0)$ $V = \frac{4}{3}\pi abc$	$I_{xx} = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)$

	Objeto	Coordenadas del centro de masa y volumen V	Momentos de inercia respecto a los ejes indicados
Casquete esférico (sólido)		$\left(0, 0, \frac{3(2R - \delta)^2}{4(3R - \delta)}\right)$ $V = \frac{\pi}{3}\delta^2(3R - \delta)$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{2}\left[2R^2 - \frac{3(10R^2 - \delta^2)\delta}{5(3R - \delta)} + \frac{3\delta^2}{2}\right]$ $I_{zz} = \frac{m\delta}{10}\left[\frac{20R^2 - 15R\delta + 3\delta^2}{3R - \delta}\right]$ (Nota: si $\delta = R$, se tiene un hemisferio con $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mR^2$; $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ y $\bar{z} = \frac{3}{8}R$.)
Paraboloide de revolución (sólido)		$(0, 0, \frac{2}{3}H)$ $V = \frac{\pi R^2 H}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{6}(R^2 + 3H^2)$ $I_{zz} = \frac{mR^2}{3}$
Paraboloide elíptico (sólido)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{H}$	$\left(0, 0, \frac{2H}{3}\right)$ $V = \frac{\pi abH}{2}$	$I_{xx} = \frac{m}{6}(b^2 + 3H^2)$ $I_{yy} = \frac{m}{6}(a^2 + 3H^2)$ $I_{zz} = \frac{m}{6}(a^2 + b^2)$
Cono (sólido)		$\left(0, 0, \frac{H}{4}\right)$ $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{20}(3R^2 + 2H^2)$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mR^2$
Prisma rectangular recto (sólido)		$\left(0, 0, \frac{H}{4}\right)$ $V = \frac{abH}{3}$	$I_{xx} = \frac{m}{80}(4b^2 + 8H^2)$ $I_{yy} = \frac{m}{80}(4a^2 + 8H^2)$ $I_{zz} = \frac{m}{20}(a^2 + b^2)$

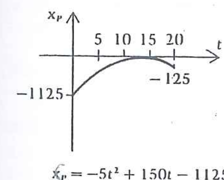
	Objeto	Coordenadas del centro de masa y volumen V	Momentos de inercia respecto a los ejes indicados
Toroide (sólido)		$(0, 0, 0)$ $V = 2\pi^2 R r^2$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{8}(4R^2 + 5r^2)$ $I_{zz} = \frac{m}{4}(4R^2 + 3r^2)$ (Nota: Si $R \gg r$, se tiene un aro para el cual $I_{xx} = I_{yy} = mR^2/2$ e $I_{zz} = mR^2$)
Cono truncado (sólido)		$\left(0, 0, \frac{H(R^2 + 2Rr + 3r^2)}{4(R^2 + Rr + r^2)}\right)$ $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{20}\left[3(R^2 + r^2) + \frac{(2R^2 + 6Rr + 12r^2)H^2 - 3r^2R^2}{R^2 + Rr + r^2}\right]$ $I_{zz} = \frac{3m(R^5 - r^5)}{10(R^3 - r^3)}$

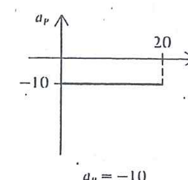
Respuestas a los problemas de número impar

En las soluciones a los problemas de los Capítulos 1-5, a menos que se indique otra cosa, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ son vectores unitarios con las direcciones →, ↑ y normal y hacia afuera de la página, respectivamente. En los Capítulos 6, 7 y 8 los vectores unitarios son paralelos a los ejes definidos en los problemas.

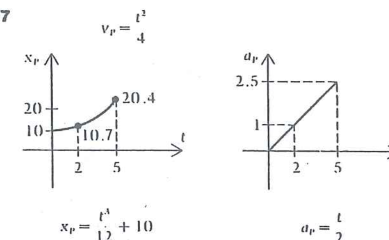
Capítulo 1

1.1 $18\hat{\jmath} - 8\hat{k}$ kg · m/s²
1.3 $11.2\hat{\imath} + 20\hat{\jmath} - 30\hat{k}$ slug · pie/s²
1.5 $5\hat{\imath} + 0.889\hat{\jmath} - 0.222\hat{k}$ slug · pie/s²
1.7 $0.00420\hat{\imath} + 29.7\hat{\jmath}$ kg · m/s²
1.9 $6\hat{\imath} + 117\hat{\jmath} - 84\hat{k}$ N · s
1.11 $-57.2\hat{\imath} + 210\hat{\jmath} - 195\hat{k}$ lb · s
1.13 $52.5\hat{\imath} - 3.60\hat{\jmath} + 0.630\hat{k}$ lb · s
1.15 $-0.0183\hat{\imath} + 213\hat{\jmath}$ N · s
1.17 La respuesta se da en el problema.
1.19 $-1.64\hat{\imath} + 12.9\hat{\jmath}$ pie/s² **1.21** $\hat{\imath} - (\pi/2)\hat{\jmath}$ pie/s²
1.23 $20\hat{\imath} - 152\hat{k}$ m; 153 m
1.25 $0.405\hat{\imath} - 0.0417\hat{\jmath} + 0.00579\hat{k}$ m; 0.407 m
1.27 $6.08\hat{\imath} - 1.11\hat{k}$ m; 6.18 m **1.29** 387 pie
1.31 $32.3\hat{\imath}$ pie/s²
1.33 15 s para *regresar* (tiempo total transcurrido = 21 s)
1.35 $v_P = -10t + 150$





1.37 $v_P = \frac{t^2}{4}$



1.39 (a) 2.57 s; (b) 11.7 m/s; (c) 15.0 m
1.41 2 → pie/² **1.43** 512 pie
1.45 (a) $230\hat{\imath}$ m; (b) 234 m **1.47** 8.46 m
1.49 0.469 s
1.51 $\dot{x} = 1/(5t + 1.67)$ m/s **1.53** 52.6 s
1.55 (a) B gana por 198 pie; (b) 660 pie; (c) 2.4 mi
1.57 $\mathbf{v}_A = 10$ ↓ m/s y $\mathbf{v}_B = 20$ ↑ m/s (en $t = 2$ s)
1.59 11.3 m **1.61** 6.21 ↑ m/s
1.63 $1.73\left(\frac{5\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}}{13}\right)$ m/s **1.65** $(8a_0/15)\hat{\jmath}$
1.67 $20\pi\hat{\jmath}$; $-20\pi\hat{\imath}$; $20\pi\hat{\imath}$; $20\pi\hat{\jmath}$ m/s
1.69 $\mathbf{v}_P = -10 \text{ sen } 5t\hat{\imath} + 10 \cos 5t\hat{\jmath}$ m/s; $\mathbf{a}_P = -50 \cos 5t\hat{\imath} - 50 \text{ sen } 5t\hat{\jmath}$ m/s²
1.71 $3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$ pie/s; $18\hat{\jmath}$ pie/s²

1.73 (a) $1.5\hat{i} + 11.8\hat{j}$ m/s²; (b) 0 y 2.52 s

1.75 (a) $v_P = -6\pi \operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}\,\hat{i} + 4\pi\cos\frac{\pi t}{2}\,\hat{j}$ m/s;

$a_P = -3\pi^2\cos\frac{\pi t}{2}\,\hat{i} - 2\pi^2\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2}\,\hat{j}$ m/s²

(b) $r_{OP} = 12\hat{i}$ m; $v_P = 4\pi\hat{j}$ m/s; $a_P = -3\pi^2\hat{i}$ m/s²

(c) $(x/12)^2 + (y/8)^2 = 1$ (una elipse) **1.77** kr

1.79 $y = \frac{2}{3}x - 11$, una recta

1.81 $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$, una elipse

1.83 $3\hat{i} + 0.0968\hat{j}$ plg/s

1.85 $3\hat{i} - 0.00312\hat{j}$ plg/s²

1.87 $-0.00937\hat{j}$ plg/s²

1.89 $0.000604\hat{j}$ plg/s **1.91** 14.9 m en 0.690 s

1.93 $0.671\hat{i} + 2.30\hat{j} + 0.500\hat{k}$ m/s

1.95 (a) 7 m/s; (b) $4.46 \times 10^5\hat{k}$ m/s²; (c) 3 m/s

1.97 Para x dentro de los intervalos (en pies) (290, 1200) y (1800, 2700)

1.99 0.000219 pie/s²; en x = 0, 1500 y 3000 pie

1.101 $(\dot{\theta}, \ddot{\theta}) = (1.29$ rad/s, -3.44 rad/s²$)$, o bien $(-1.29$ rad/s, 3.44 rad/s²$)$

1.103 $2\sqrt{2}\hat{j}$ pie/s; $-12\sqrt{2}\hat{i} + 6\sqrt{2}\hat{j}$ pie/s²

1.105 En el orden $\theta = 0,\ \pi/2,\ \pi$ y $-\pi/2$: $v_P = 2aK\hat{j}$, $-aK(\hat{i}+\hat{j})$, 0; y $aK(\hat{i}-\hat{j})$. Nótese que respectivamente $\hat{e}_r = \hat{i}, \hat{j}, -\hat{i}, -\hat{j}$ y $\hat{e}_\theta = \hat{j}, -\hat{i}, -\hat{j}, \hat{i}$.

1.107 $v_P = \frac{9}{\sqrt{2}}\hat{e}_r + \frac{3}{\sqrt{2}}\hat{e}_\theta$; $a_P = \frac{18}{\sqrt{2}}(\hat{e}_r + \hat{e}_\theta)$

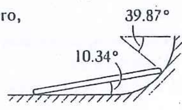
1.109 (a) 0.577 pie/s; (b) $-0.136\hat{i} - 0.385\hat{j}$ pie/s²

1.111 (a) $-535\hat{e}_r + 560\hat{e}_\theta$ m/s² (en $\theta = 114°$, $t = 0.446$ s) (b) $-1380\hat{e}_r + 160\hat{e}_\theta$ m/s²

1.113 (a) si; (b) si

1.115 $\frac{2.93x}{\sqrt{361 + x^2}}$ ↑ pie/s; midiendo r de la polea a la defensa o parachoques, $\dot{r}$ es la velocidad de las tejas; es también la componente de v_A a lo largo de la cuerda.

1.117 Primero,



Por tanto: $v_B = 0.640$ ∠50.1° pie/s

1.119 $1.65\hat{i} + 1.13\hat{j} + 0.600\hat{k}$ m; $-0.0226\hat{i} + 0.0330\hat{j} + 0.0200\hat{k}$ m/s

1.121 $R\hat{e}_r + H\hat{k}$; $k_1\hat{e}_r + \frac{2k_2R^2}{k_1}\hat{e}_\theta + \frac{2Hk_1}{R}\hat{k}$;

$\frac{-4k_2^2R^3}{k_1^2}\hat{e}_r + 6Rk_2\hat{e}_\theta + \frac{2Hk_1^2}{R^2}\hat{k}$

1.123 La más grande: 73.3 pie/s, en la cima; la más pequeña: 1.17 pie/s en la base.

1.125 La respuesta se da en el problema.

1.127 La respuesta se da en el problema.

1.131 0.678 mi sobre la curva a la izquierda de T; tiempo total = 1.68 min; 0.333 ↓ mi/min.²

1.133 $s = 6.5t^2 + c$, en donde c es una constante que define la posición de la partícula sobre la recta en un tiempo inicial.

1.135 16 pie **1.137** 0.471 pie **1.139** $(-\dot{x}_0^2/a)\hat{j}$

1.141 $\frac{-aK^2}{\sqrt{2}}\hat{e}_t + \frac{3aK^2}{\sqrt{2}}\hat{e}_n$; $\frac{2\sqrt{2}}{3}a$

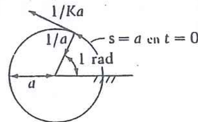
1.143 $(x, y) = (2.88, -0.584)$ m

1.145 $-1.85\hat{i} - 1.91\hat{j} - 3.41\hat{k}$ m; 28.9 m/s²

1.147 $11.3\hat{i} - 6.24\hat{k}$ m

1.149 Use $v = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}$ y $a = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$ para la demostración; 9680 pie

1.151 $a_t = \frac{1}{Ka}$; $a_n = \frac{1}{a}$ m/s²



1.153 $a_t = 0$; $a_n = 0.708$ pie/s²; $\ddot{x} = 0.0637$ y $\ddot{y} = -0.701$ con $\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 0.704$ pie/s²

1.155 Las respuestas se dan en el problema.

1.157 $y_M = 2D/3$ en $t = 2D/(3V_0)$

Capítulo 2

2.1 La respuesta se da en el problema.

2.3 $a(n+1)/(n+2)$ **2.5** $\frac{4b}{3\pi}$

2.7 $2R/\pi$ desde el centro del círculo a lo largo de la línea de simetría en el plano del alambre.

2.9 Sobre el eje del casco o cascarón, a 2/3 del vértice a la base.

2.11 La respuesta está en el problema. (Use un argumento contradictorio. Suponga que yace a un lado de un plano y considere un eje normal al plano que pasa por C.)

2.13 $\left(-\frac{\ell}{5}, \frac{\ell}{5}, -\frac{\ell}{2}\right)$

2.15 $y_C = -0.856$ pie, $x_C = 0 = z_C$

2.17 $\left(0, \frac{1370\rho_1 - 150\rho_2 - 2270\rho_3}{85.3\rho_1 + 250\rho_2 + 195\rho_3}, \frac{32\rho_3}{85.3\rho_1 + 250\rho_2 + 195\rho_3}\right)$ plg

$(0, -1.98, 0.0603)$ plg;

2.19 30° **2.21** 125 pie; 88.6 pie/s

2.23 8.63 m/s; 49.7°

2.25 552 pie **2.27** 18.0° **2.29** 27.2° o bien 66.0°

2.31 $H = 3.15$ m; $D = 16.5$ m

2.33 $\frac{2u^2\cos\theta\operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{g\cos^2\alpha}$; $\frac{u^2}{g(1 + \operatorname{sen}\alpha)}$

2.35 con v_s: 61 pie; sin v_s: 64 pie

2.37 (a) $40.2m$ lb; (b) $24.2m$ lb (con m en slugs)

2.39 $0.997W$ **2.41** $g\mu$ **2.43** cero **2.45** 442 N

2.47 28.2 N; 5.76 m/s² **2.49** 39.4 lb

2.51 90.0 lb

2.53 T_L(izquierda) = 114 N; T_R(derecha) = 413 N; $a_B = 1.55$ → m/s²

2.55 32.6 lb **2.57** $0.032\hat{i}$ lb **2.59** 136 N

2.61 $a_A = 0.0204g$ ↓, $a_B = 0.224g$ ↑, $a_C = 0.184g$ ↓; C; 0.941 s ($g = 9.81$ m/s²)

2.63 La respuesta se da en el problema.

2.65 (a) Una componente (vertical) de la tensión en la cuerda;

(b) $\sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv_0^2}{R}\right)^2}$;

(c) otra componente de la tensión en la cuerda, ésta en la dirección $\hat{e}_t$.

2.67 (a) La respuesta a ambas preguntas es que, si no, el satélite no puede permanecer estacionario con respecto a un punto sobre la Tierra.

(b) 6.61, usando el Sol como marco inercial tal que

$\omega_{\text{Tierra}} = 2\pi\left(1 + \frac{1}{365.25}\right)$ rad/día; $g = 32.17$ pie/s²

2.69 $\sqrt{g(R - \delta)/\mu}$

2.71 La respuesta está dada en el problema.

2.73 31.7°, comparado con tan ⁻¹(0.5) = 26.6° para el caso estático.

2.75 $m\ell\omega_0^2\cos\phi = (m + M)g$

2.77 La respuesta se da en el problema. **2.79** 1.5 m/s

2.81 $2\pi\sqrt{\frac{ma}{Mg}}$ **2.83** 1.69 s; 31.7 pie/s

2.85 mv_0/k; $v_0e^{-Kt/m}$

2.87 $v = \sqrt{25K/(24\,mS)}$, donde m = masa de un perro.

2.89 592 pie; 621 pie **2.91** 0.00500 (lb · s²)/pie²

2.93 0.916 m/C; 156 pie **2.95** 1540 pie/s

2.97 La respuesta se da en el problema.

2.99 La respuesta para la primera parte se da en el problema.

$x|_{t=\infty} = \frac{mv_i\cos\phi_i}{k}$; $\dot{y}|_{t=\infty} = \frac{-mg}{k}$

2.101 La respuesta se da en el problema.

2.103 60 ↻ lb · pie

2.105 76,300 lb/pie **2.107** 11.4 pie **2.109** 20.6 pie

2.111 2.56 ← m/s

2.113 $\sqrt{2gH}$ es la velocidad para todas las trayectorias

2.115 8.26 pie **2.117** 272 lb

2.119 La respuesta se da en el problema.

2.121 5.08 pie/s cada uno **2.123** 9.60 pie

2.125 La respuesta se da en el problema.

2.127 La respuesta se da en el problema. (Demuestre que la fuerza normal nunca se anula).

2.129 Las respuestas se dan en el problema. (Se aparta a un ángulo cos⁻¹ H/a con la vertical.)

2.131 (a) $2\hat{i}$ m; (b) $2\hat{j}$; (c) $6\hat{j} + 6\hat{k}$ kg · m/s;

(d) $2\hat{j} + 2\hat{k}$ m/s; (e) $\frac{14}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{4}{3}\hat{k}$ m/s²

2.133 1.07 lb **2.135** 36.2 → pie/s

2.137 7.86 s; 491 pie/s **2.139** 0.364 → pie/s

2.141 $v/3$ → **2.143** $\frac{m^2U}{(M + 2m)(M + m)}$ →

2.145 e^4H

2.147 La respuesta se da en el problema. (Si $e > 1$, se *ganaría* energía.)

2.149 0.446

2.151 $v_A = 2\hat{i} - 1.20\hat{j}$ pie/s.

$v_B = -4\hat{i} + 3.97\hat{j}$ pie/s; impulso sobre $B = 0.0812\hat{j}$ (lb · s)

2.153 Con (3, 4; $\hat{j}$, $\hat{i}$), $v_A = -0.479\hat{i} - 2.49\hat{j}$ pie/s

$v_B = 4.69\hat{j}$ pie/s; impulso sobre $B = 0.113\hat{j}$ (lb · s)

2.155 2.00 pie **2.157** 0.997 pie

2.159 $\frac{W_1 + W_2}{k} + \sqrt{\frac{W_1^2(W_1 + W_2) + 2HkW_1^2}{k^2(W_1 + W_2)}}$

2.161 $v_A = 2.97$ → m/s; $v_B = 1.48$ ← m/s

2.163 La respuesta se da en el problema.

2.165 $-18\hat{j}$ kg · m²/s; $-6\hat{j} - 12\hat{k}$ kg · m²/s

2.167 No lo alcanzará (sus velocidades relativas al suelo son las mismas).

2.169 La respuesta se da en el problema.

2.171 La respuesta se da en el problema.

2.173 La respuesta se da en el problema.

Capítulo 3

3.1 a,c,d,e **3.3** $0.1\hat{i} + 0.1\hat{j}$ m/s

3.5 0; $-6.67\hat{k}$ rad/s.

3.7 $\omega_1 = 2$ ↺ rad/s; $\omega_2 = 0.640$ ↺ rad/s

3.9 $\omega_1 = 2$ ↻ rad/s; $\omega_2 = 2$ ↻ rad/s

3.11 $\omega_1 = 13.3$ ↺ rad/s; $\omega_2 = 22.7$ ↺ rad/s

3.13 $0.058\hat{j}$ m/s; 0.385 ↺ rad/s

3.15 $0.3\hat{i} - 1.3\hat{j}$ m/s **3.17** $0.272\hat{i}$ m/s

3.19 1.08 → m/s

3.21 $-1.6\hat{i} - 1.2\hat{j}$ m/s; $-6\hat{k}$ rad/s; $4\hat{k}$ rad/s

3.23 $1.73\left(\frac{5\hat{i} + 12\hat{j}}{13}\right)$ m/s

3.25 (a) 0, 0.688 ↻ rad/s; 0, 0
3.27 Las gráficas pueden elaborarse a partir de la respuesta al 3.26, que es $[(r \cos \theta)/\sqrt{\ell^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}]\dot{\theta}$

3.29 $\dfrac{-12 \cos \theta \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{169 - 120 \operatorname{sen} \theta}}$ m/s

3.31 En cada caso, (I) se encuentra en la intersección de la recta radial OA con la normal a la ranura en B, $\mathbf{v}_B = 0$ cuando $\overline{OAB}$ y $\overline{AOB}$ son rectas.
3.33 Véase 3.7 **3.35** $2\hat{\mathbf{j}}$ m/s; $\frac{2}{3}\hat{\mathbf{k}}$ rad/s
3.37 Véase 3.11. **3.39** 0.129 ↻ rad/s; 0.129 ↺ rad/s
3.41 Véase el Ejemplo 3.5
3.43 $\omega_2 = 0.2$ ↺ rad/s $= \omega_3$
3.45 $-0.389\hat{\mathbf{k}}$ rad/s
3.47 2.11 → pie/s; 0.201 pie arriba de P;

$\mathbf{v}_Q = 60.7$ ↘ (4; 4.20) pie/s

$\mathbf{v}_S = 60.7$ ↗ (4; 4.20) pie/s

$\mathbf{v}_R = 85.9$ → pie/s²
3.49 0.0400 ↻ rad/s; 0 **3.51** 14 ↻ rad/s
3.53 8.95 ↺ rad/s² **3.55** $-29\hat{\mathbf{i}} - 24.4\hat{\mathbf{j}}$ rad/s²
3.57 $\alpha_2 = 0.0128\hat{\mathbf{k}}$ rad/s²;
$\alpha_3 = -0.055\hat{\mathbf{k}}$ rad/sec²
3.59 3.91 ↺ rad/sec²
3.61 84.5 → plg/s; 38.1 ← plg/s²; 565 ← plg/s²
3.63 $2\hat{\mathbf{k}}$ rad/s²; 0
3.65 $\ddot{\varphi} = \dfrac{r\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta (r^2 - \ell^2)}{(\ell^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2}}$.
3.67 $6.26\hat{\mathbf{i}} + 0.320\hat{\mathbf{j}}$ m/s²; 0.320 ↺ rad/s²
3.69 $-0.0938\hat{\mathbf{i}} - 0.225\hat{\mathbf{j}}$ m/s²
3.71 $-18\hat{\mathbf{i}} - 24\hat{\mathbf{j}}$ plg/s²
3.73 0.0735 ↑ m/s²; 0.0172 ↻ rad/s²

3.75 0.779 ↻ rad/s²; 6.56 ↗ (5; 12) plg/s²

3.77 $\dfrac{\omega_o}{K}(e^{Kt} - 1)$; $\omega_o e^{Kt}$; $\omega_o K e^{Kt}$
3.79 $(v_0^2/2)\hat{\mathbf{j}}$ pie/s²
3.81 (a) 4 ↻ rad/s² (b) $\theta = 45°$; $\overline{PA} = \sqrt{2}/2$ pie
3.83 $x = \dfrac{a_{P_x}\omega^2 - a_{P_y}\alpha}{\omega^4 + \alpha^2}$; $y = \dfrac{a_{P_x}\alpha - a_{P_y}\omega^2}{\omega^4 + \alpha^2}$
3.85 (a) 1.4 pie arriba de P; (b) $-0.27\hat{\mathbf{i}} + 1.13\hat{\mathbf{j}}$ pie/s
3.87 $\mathbf{v}_A = 117$ ← plg/s; $\mathbf{v}_B = 0$; $\mathbf{v}_D = 2820$ → plg/s; $\mathbf{v}_E = 2930$ → plg/s; A va hacia atrás (hacia la izquierda) ya que está debajo de (I) y la rueda gira ↻.

3.89 $\mathbf{v}_C = 1\hat{\mathbf{i}}$ m/s; $\mathbf{v}_B = 1\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ m/s
(Nota: el radio es superfluo)

3.91 $\dfrac{\omega}{\dot{\phi}} = \dfrac{R + r}{r}$
3.93 En orden, $2v_0\hat{\mathbf{i}}$; $1.71v_0\hat{\mathbf{i}} - 0.707v_0\hat{\mathbf{j}}$; $v_0\hat{\mathbf{i}} - v_0\hat{\mathbf{j}}$; 0; $v_0\hat{\mathbf{i}} + v_0\hat{\mathbf{j}}$
3.95 $\mathbf{v}_A = 0.1\hat{\mathbf{i}} + 0.1\hat{\mathbf{j}}$ m/s; $\mathbf{v}_B = 0.2\hat{\mathbf{i}}$ m/s;
$\mathbf{v}_D = 0.1\hat{\mathbf{i}} - 0.1\hat{\mathbf{j}}$ m/s; $\mathbf{v}_E = 0$; ($\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{i}}$)

3.97 $\omega_3 = 0.113$ ↻ rad/s;
$\omega_2 = 0.653$ ↻ rad/s
3.99 $\omega_2 = 7.5$ ↻ rad/s; $\omega_3 = 0$
3.101 34 ↻ rad/s; $680\hat{\mathbf{i}}$ cm/s, velocidad del punto del diente de $\mathcal{B}_4$ en contacto con $\mathcal{B}_3$
3.103 0; 80 → m/s²
3.105 $\dot{x}_C$ = cualquier constante positiva k; $\dot{\theta} = k/R$ (Las direcciones son → y ↺.)
3.107 $2a_o\hat{\mathbf{i}}$; $(1.71a_o - 0.707v_0^2/R)\hat{\mathbf{i}} + (0.707a_o + 0.707v_0^2/R)\hat{\mathbf{j}}$; $(a_o - v_0^2/R)\hat{\mathbf{i}} + a_o\hat{\mathbf{j}}$; 0; $(a_o + v_0^2/R)\hat{\mathbf{i}} - a_o\hat{\mathbf{j}}$
3.109 $0.6\hat{\mathbf{i}} + 0.6\hat{\mathbf{j}}$ m/s; $0.75\hat{\mathbf{i}} - 0.45\hat{\mathbf{j}}$ m/s²
3.111 (a) $-8\hat{\mathbf{i}}$ cm/s; $6\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}}$ cm/s²
(b) $-8\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}}$ cm/s; $-26\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$ cm/s² (c) 19.8 cm/s²
(d) 10.7 cm debajo de T
3.113 $119000\hat{\mathbf{i}}$ plg/s²; $83900(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$ plg/s²; $-119000\hat{\mathbf{i}}$ plg/s²
3.115 $0.347\hat{\mathbf{i}} + 0.0198\hat{\mathbf{j}}$ m/s²
3.117 $-0.889\hat{\mathbf{i}} - 5.41\hat{\mathbf{j}}$ m/s²
3.119 $\alpha_3 = 0.0889\omega_0^2$ ↻; $\alpha_2 = 0.178\,\omega_0^2$ ↻
3.121 $-400\hat{\mathbf{i}}$ pie/s²
3.123 14.7 ↻ rad/s²; $-11.9\hat{\mathbf{j}}$ m/s²
3.125 $-\dfrac{v_0^2}{R - r}\hat{\mathbf{i}} - \dfrac{v_0^2}{r}\hat{\mathbf{j}}$
3.127 (a) $-6\hat{\mathbf{i}}$ y $-6\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}}$ cm/s;
(b) $4\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}}$ y $22\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ cm/s²; -16.3 cm/s²
3.129 2.70 ↺ rad/s²; 0.216 ↻ rad/s²
3.131 Si x y y están dirigidas hacia abajo y hacia el plano, respectivamente, con origen en el centro del disco, entonces las coordenadas (x, y) del punto son (4.80, 3.60), en pies. (4.80, 3.60), en pies.

3.133 $-43.3\hat{\mathbf{i}}$ plg/s²

3.135 Si $\hat{\mathbf{i}}$ parte del centro de $\mathcal{B}_2$ y está dirigido a lo largo de $\mathcal{B}_1$, y $\hat{\mathbf{k}}$ sale de la página, entonces las respuestas son: $-24\pi^2\hat{\mathbf{i}} + 3\pi\hat{\mathbf{j}}$ plg/s² ($\mathcal{B}_2$), y $138\pi^2\hat{\mathbf{i}} + 3\pi\hat{\mathbf{j}}$ plg/s² ($\mathcal{B}_3$).

3.137 21.6 m/s² (Es el punto más alto de $\mathcal{P}$.)

3.139 (a) La respuesta se da en el problema.
(b) La curva es cóncava hacia abajo.
(c) La primera es $a\alpha\hat{\mathbf{i}} + a\alpha\hat{\mathbf{i}} - \omega^2 a\hat{\mathbf{j}}$ y la segunda es $(2a\alpha)\hat{\mathbf{i}} - [(2a\omega)^2/(4a)]\hat{\mathbf{j}}$; ambas son iguales.

3.141 La respuesta se da en el problema.
3.143 0.25 ↻ rad/s
3.145 0.781 ↻ rad/s **3.147** 0.120 ↺ rad/s
3.149 0.592 ↻ rad/s; $11.6\hat{\mathbf{i}} - 4.85\hat{\mathbf{j}}$ cm/s
3.151 $(D\dot{\theta} \operatorname{sen} \theta/\cos^2 \theta)(\cos \theta\hat{\mathbf{i}} + \operatorname{sen} \theta\hat{\mathbf{j}})$
3.153 La respuesta se da en el problema.
3.155 0.0334 ↖ (8; 15) m/s; 0.428 ↻ rad/s

3.157 La respuesta se da en el problema.
3.159 $26\pi \operatorname{sen} \pi t$ ↓; $26\pi^2 \cos \pi t$ ↓
3.161 $-0.165\hat{\mathbf{i}}$ m/s²; 0.170 ↺ rad/s²
3.163 $0.186\hat{\mathbf{k}}$ rad/s²
3.165 $\mathbf{v}_{A/\mathcal{A}} = 0.240\hat{\mathbf{i}} + 0.180\hat{\mathbf{j}}$ pie/s
$\mathbf{v}_{A/\mathcal{B}} = -0.480\hat{\mathbf{i}} + 0.640\hat{\mathbf{j}}$ pie/s
$\mathbf{a}_{A/\mathcal{A}} = 0.512\hat{\mathbf{i}} + 0.384\hat{\mathbf{j}}$ pie/s²
$\mathbf{a}_{A/\mathcal{B}} = -0.180\hat{\mathbf{i}} + 0.240\hat{\mathbf{j}}$ pie/s²
3.167 $-8.51\hat{\mathbf{k}}$ rad/s²; $-118\hat{\mathbf{i}} + 49.2\hat{\mathbf{j}}$ cm/s²

3.169 $-r\omega_0^2$ ↙ (θ); $2\omega_0 v$ ↘ (θ)
3.171 (a) 103 ↻ rad/s²; (b) $2.25\hat{\mathbf{i}} + 1.62\hat{\mathbf{j}}$ m/s²
3.173 9.11 pie
3.175 $(\ell + a\phi)\dot{\phi}\hat{\mathbf{j}}$; $-(\ell + a\phi)\dot{\phi}^2\hat{\mathbf{i}} + [(\ell + a\phi)\ddot{\phi} + a\dot{\phi}^2]\hat{\mathbf{j}}$
3.177 $\theta = 70.7°$ para la rapidez máxima del pistón

Capítulo 4

4.1 16π slug · pie² **4.3** $\pi R^2 L^3(17\rho_1 + 35\rho_0)/60$
4.5 (a) $\dfrac{mH^2}{6} + \dfrac{mt^2}{12}$; (b) $\dfrac{mB^2}{2} + \dfrac{mt^2}{12}$; (c) $\dfrac{mH^2}{6} + \dfrac{mB^2}{2}$;
(d) $-\dfrac{mBH}{4}$; (e) 0, 0; despréciense los términos con t^2 en (a) y en (b)
4.7 La respuesta se da en el problema. (I_{zz}^0 excede a $I_{xx}^0 + I_{yy}^0$ en $mt^2/6$.) **4.9** $mR^2\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{4\alpha} - \dfrac{16}{9\alpha^2} \operatorname{sen}^2 \dfrac{\alpha}{2}\right)$
4.11 3619 kg · m²; 1660 kg · m²
4.13 $0.145\, mR^2 + 0.0481\, mH^2$
4.15 Desde la esquina, 1.56 pie ← y 0.563 pie ↑; $I_{zC} = 4.45$ slug · pie² **4.17** 1.00 slug · pie²
4.19 3.44 slug · pie² **4.21** $0.259\, mR^2$
4.23 37.7 kg · m² **4.25** 29.3 kg · m²
4.27 2.69, 0.0200, y 2.71 kg · m², respectivamente
4.29 $r = 0.116$ m, $d = 0.220$ m, $k_C = 0.286$ m
4.31 $-2mR^2/\pi$ **4.33** 6.50 kg · m² **4.35** $\frac{3}{4}mg$
4.37 (a) 12.9 → pie/s²; (b) izquierda: 40 ↑ lb; derecha: 60 ↑ lb

4.39 $\dfrac{b}{2} \le H \le \dfrac{3}{2}b$ **4.41** 8.05 pie/s²
4.43 (a) 108 N; (b) 64.8 N **4.45** $8g/15$ →

4.47 $10\mu/(1 + 9\mu)$
4.49 $-12.9 \le a \le 8.05$ pie/s²
4.51 2.95 m/s² **4.53** (a) $\dfrac{\mu\, dg}{b + \mu H}$; (b) μg
4.55 Cada fuerza $= \dfrac{WL\omega^2}{2g} + \dfrac{W}{2} \operatorname{sen} \theta$ (tensión)

$\mathbf{a}_C = L\omega^2$ ↖ (θ) $+ g \cos \theta$ ↙ (θ)
4.57 (a) Cada una tiene $\omega = 2.84\sqrt{1 - \cos \theta}$ ↻ rad/s, y $\alpha = 4.03 \operatorname{sen} \theta$ ↻ rad/s² (b) $T_1 = 193 \cos \theta - 129$ (tensión), $T_2 = 2\, T_1$ (compresión)

4.59 1.01 rad **4.61** $x = L/\sqrt{12}$ **4.63** 7.85 ↻ rad/s²

4.65 32.8 rad/s en sentido horario (el dentista mira hacia los dientes).

4.67 $t = \omega_i R(1 + \mu^2)/[\mu g(1 + \mu)]$;
$\theta = R\omega_i^2(1 + \mu^2)/[2\mu g(1 + \mu)]$ **4.69** $1.59\hat{\mathbf{j}}$ lb
4.71 17.3 ↓ pie/s²; 14.9 ↑ lb
4.73 La respuesta se da en el problema.
4.75 (a) Roberto, Emma, Carolina, Arturo;
(b) $1.41K$, $1.67K$, $1.73K$, $2K$ donde $K = \sqrt{\dfrac{D}{g \operatorname{sen} \beta}}$
4.77 $0.200\, mg \operatorname{sen} \beta$ (compresión)
4.79 $2g/3$; $5g/7$; $g/2$ ↓

4.81 g ↖ (30°) **4.83** $\dfrac{0.714\, M_O}{mr}$ →

4.85 0.577; 1.02 s **4.87** (a) 4.00 → m/s² (b) 0.23 m

4.89 (a) se enrolla 14.4 plg; 0.064 **4.91** 300 pie
4.93 0.450 ↺ rad/s² **4.95** 78.6 m
4.97 (a) 14.6°; (b) 1.38 s
4.99 71.8 pie a la derecha de P
4.101 (a) 7.03 m a la izquierda del punto de partida (b) 0 (no se mueve)

4.103 17.4 ↙ (30°) pie/s²
4.105 3.39 ↑ pie/s² (C) y 3.39 ↓ pie/s² (B)
4.107 $-0.698\hat{\mathbf{i}}$ m/s²; 8.73 m a la izquierda
4.109 4.02 s
4.111 (a) 13.3 ↻ rad/s² (b) 1.11 ↻ rad/s² (c) 0.0197

4.113 12.9 ↙ (30°) pie/s²
4.115 $[mg \operatorname{sen} \theta(0.180 \cos \theta - 0.424)/(0.849 \cos \theta - 1.5)]\hat{\mathbf{i}} + mg[1 + 0.180 \operatorname{sen}^2 \theta/(0.849 \cos \theta - 1.5)]\hat{\mathbf{j}}$
4.117 La ecuación final es:
$[I_{zC} + m\delta^2 \cos^2 \theta + m(r - \delta \operatorname{sen} \theta)^2]\ddot{\theta} - (m\delta r \cos \theta)\dot{\theta}^2 - mg\delta \cos \theta = 0$, en donde $\delta = (4r/3\pi)$ y $I_{zC} = (mr^2/2) - m\delta^2$.

4.119 16.9 ($30°$) pie/s²; sí

4.121 La magnitud de la fuerza horizontal sobre la puerta, que es $-0.75 m a_0 \operatorname{sen}\beta\cos\beta\,\hat{\mathbf{i}} + m a_0 (1 - 0.75\operatorname{sen}^2\beta)\hat{\mathbf{j}}$

4.123 (a) $a_0 \le 7.85$ m/s² (b) 20.0 m

4.125 (a) 3.33 → pie/s², 6.67 → lb; (b) 0.104

4.127 2.81 s

4.129 En A, $16.0\hat{\mathbf{i}} + 160\hat{\mathbf{j}}$ lb; en B, $-76.0\hat{\mathbf{i}}$ lb

4.131 $\dfrac{mg}{1 + 3\cos^2\theta}$ ↑ **4.133** 5.41 ↻ rad/s²

4.135 $mg(B^2 + H^2)/(4B^2 + H^2)$

4.137 Las respuestas se dan en el problema.

4.139 $a_C = 3g/4$ ↓; $\alpha = 3g/(2s)$ ↻

4.141 $a_C = g$ ↓; $\alpha = 6g/s$ ↻

4.143 $a_C = 2g/3$ ↓; $\alpha = 2g/s$ ↻

4.145 6.38 lb

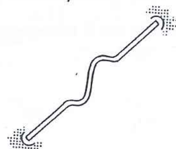
4.147 Sobre la sección a la izquierda del corte $V = 3WL/64$ ↓ y $M = 9WL^2/256$ ↺.

4.149 En O, $\dfrac{2}{7} mg$ ↑; en A, $\dfrac{mg}{14}$ ↑

4.151 $3T_0/[(2R^2)(9M + 2m)]$ ↺

4.153 La respuesta se da en el problema.

4.155 C está sobre el eje z y $I^C_{xz} = I^C_{yz} = 0$.



4.157 98.5 ml² ↻;

4.159 (0, 1) plg sobre $\mathcal{D}_1$; (−1, 0) plg sobre $\mathcal{D}_2$

4.161 $\dfrac{13mr^2\omega_0^2 \operatorname{sen}\psi\cos\psi}{48\ell}$, hacia abajo en la izquierda y hacia arriba en la derecha.

4.163 $\mathbf{B} = \dfrac{mR^2}{2\pi(R + d)}(\alpha\hat{\mathbf{i}} + \omega^2\hat{\mathbf{j}})$ sobre la derecha
$-\mathbf{B}$ sobre la izquierda

4.165 En $\mathcal{A}$, $(x, y) = (-56/3, -21)$ plg; en $\mathcal{B}$, $(x, y) = (-70/3, -35)$ plg

4.167 24.0 rad/s

Capítulo 5

5.1 16 pie · lb **5.3** 100J **5.5** 140 N/m

5.7 3.75 ↻ rad/s

5.9 $\sqrt{\dfrac{3g\operatorname{sen}\theta_0}{L}}$ (↻ para $\mathcal{A}$ y ↺ para $\mathcal{B}$)

5.11 103,000 lb/pie **5.13** 4.18 ↺ rad/s

5.15 2.95 ↺ rad/s **5.17** 2.00 ↺ rad/s

5.19 12.1 ↻ rad/s

5.21 (a) 2360 N/m; (b) 1110 N/m

5.23 (a) 0.0794 m; (b) de regreso hacia atrás hacia el punto de partida

5.25 4.36 ($60°$) m/s

5.27 $\sqrt{\dfrac{18ag}{7}}$ ← **5.29** (a) 30 lb; (b) 26.7 plg/s

5.31 (a) 1.56 ↺ rad/s; (b) 1.40 ↺ rad/s

5.33 0.0931 ← m/s

5.35 (a) 7.19 ↻ rad/s; (b) 7.53 ↻ rad/s; (c) 8.58 ↻ rad/s

5.37 $\sqrt{24\pi gr\operatorname{sen}\beta/13}$ (β) **5.39** 35 lb/pie; sí

5.41 4.43 (pendiente 1:1) pie/s

5.43 8 plg; los dos puntos son las intersecciones del perímetro de $\mathcal{B}_2$ (en la posición inicial) con un círculo de radio 12 plg y centro en Q (en la posición final).

5.45 $\dfrac{L\omega}{2}\sqrt{1 - \left(\dfrac{2H}{L}\right)^2}$ ↓

5.47 $4\sqrt{2R}\sqrt{\dfrac{g(1 - \cos\theta)}{R(9\pi - 16)}}$ (dirección 1:1)

5.49 4.91 ↺ rad/s; $\frac{1}{3}$ pie **5.51** 3.82 m

5.53 2.11 ↻ rad/s **5.55** $\sqrt{\dfrac{16Fx_C}{8M + 3mn}}$

5.57 (a) 4/17 m; (b) 50 N *aumenta*, $\mu_{min} = 0.220$

5.59 Comienza moviéndose hacia la derecha, el resorte se afloja y luego sale por la derecha. (Se necesitaría un pie más de longitud horizontal para que el cilindro no saliera)

5.61 $\sqrt{6\sqrt{2}g\ell}$ ↓ **5.63** 1.33 ↻ rad/s

5.65 0.106 m hacia la izquierda; 0.000428

5.67 $41.5\hat{\mathbf{j}}$ lb

5.69 (a) $\dfrac{3g\cos\theta_0}{2L}$ ↻; $W\operatorname{sen}\theta_0$ (θ) $+ \dfrac{W\cos\theta}{4}$ (θ);
(b) $\dfrac{3W\operatorname{sen}\theta_0}{2}$ ← $+ \dfrac{W}{4}$ ↑

5.71 $\tan^{-1}[\mu/(1 + 36k^2)]$; 5.27°

5.73 La respuesta se da en el problema.

5.75 5.66 ↑ m/s **5.77** $2gt_0/(R\pi)$

5.79 (a) 0.00240 → m/s; (b) 0.0889 → m/s

5.81 0.366 s **5.83** (a) 1.88 ↓ m/s; (b) 4.51 ↑ m/s

5.85 Véase 4.67(c). **5.87** 4.02 s **5.89** 1.38 s

5.91 1.19 ↻ rad/s **5.93** $\dfrac{5\,gt\operatorname{sen}\beta}{7}$

5.95 32.2 → pie/s **5.97** (a) 2.82 ← m/s; (b) cero

5.99 $2d/9$ hacia arriba

5.101 $\Delta t = \dfrac{I_1 I_2(\omega_2 - \omega_1)}{\mu m_1 gR(I_1 + I_2)}$; $\omega_f = \dfrac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$;
$\Delta T = \dfrac{I_1 I_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$; ω_f y ΔT son las mismas

5.103 (a) no; (b) sí, cuando $R^2 H \le dfk^2$

5.105 $6v_0 m/[\ell(4m + M)]$, antihorario viendo hacia abajo

5.107 (a) $\sqrt{1.26g/r + 0.399\, v_0^2/r^2}$; (b) 36.8%

5.109 $3I^2/(2M)$ **5.111** $\dfrac{2m_2 L}{3m_1 h}\sqrt{\dfrac{2(\sqrt{2} - 1)gL}{3}}$

5.113 0.159 s **5.115** $-0.25v_0\hat{\mathbf{i}} + 0.75v_0\hat{\mathbf{j}}$

5.117 0.8 pie; 19.0(10⁶) slug · pie²; diferencia = 1.05%

5.119 $\Delta T = \dfrac{35}{72} m v_0^2$, o pérdida del 72.9%

5.121 La respuesta se da en el problema.

5.123 $\dfrac{3M^2\ell}{2\mu(M + 3m)^2}$

5.125 $e = 0.8$; $\mu = 0.32$

5.127 (a) 1.66 rad/s en ambos casos; (b) 17%

5.129 (a) $v_{G_A} = 0$; $v_{G_B} = v_0$ →; $\omega_{\mathcal{A}} = v_0/r$ ↻; $\omega_{\mathcal{B}} = 0$; (b) $v_{G_A} = 2v_0/7$ →; $v_{G_B} = 5v_0/7$ →;
(c) Si $\mu = 0$, el movimiento final está dado por (a).

5.131 $\omega_f = \dfrac{3\ell v_{C_i}(1 + e)}{2\ell^2 + 9r^2}$ con sentido horario;
$\mathbf{v}_{C_f} = (-\ell\omega_f/2 + e v_{C_i})\hat{\mathbf{i}} + r\omega_f\hat{\mathbf{j}}$
(véase el Ejemplo 5.18 para $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$); $\omega_f(e = 0) = \frac{1}{2}\omega_f(e = 1)$; $\dot{x}_{C_f}(e = 0) = 1.91\dot{x}_{C_f}(e = 1)$; $\dot{y}_{C_f}(e = 0) = \frac{1}{2}\dot{y}_{C_f}(e = 1)$

5.133 La respuesta se da en el problema.

5.135 $v_{C_{rebote}} = 2.63$ (pendiente 8/15) m/s; $\Delta T = 512$ pie · lb

5.137 0.545 m desde el extremo izquierdo; 0.562 kg-m²; 0.0957 kg-m²; 0.657 m desde el extremo izquierdo

5.139 $\dfrac{F\,\Delta t(2\ell + a - c)}{\dfrac{4m\ell^2}{3} + M\left[\dfrac{2a^2}{5} + (a + 2\ell)^2\right]}$ ↺

Capítulo 6

6.1 La respuesta se da en el problema.

6.3 (a) $(-t^5 + t^3 + 3t^2)\hat{\mathbf{i}} + (t^6 - t^2 + 2t)\hat{\mathbf{j}} + (-t^5 + t^3 + 1)\hat{\mathbf{k}}$ m/s²; (b) $3\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ m/s²; (c) $-12\hat{\mathbf{i}} + 64\hat{\mathbf{j}} - 23\hat{\mathbf{k}}$ m/s²

6.5 $19.6\hat{\mathbf{j}} - 1.29\hat{\mathbf{k}}$ **6.7** $\omega_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} = 13.7\hat{\mathbf{j}}_1 + \hat{\mathbf{k}}_1$

6.9 $\omega_x\hat{\mathbf{i}} + \omega_y\cos\omega_x t\,\hat{\mathbf{j}} + (\omega_z + \omega_y\operatorname{sen}\omega_x t)\hat{\mathbf{k}}$ **6.11** $\dot{\theta}\hat{\mathbf{i}}$

6.13 La solución es la Ec. (6.70) con
$\theta_1 = \theta_{cabeceo} = \dfrac{\pi}{18}\operatorname{sen}\dfrac{2\pi t}{6}$; $\theta_2 = \theta_{balanceo} = \dfrac{\pi}{6}\operatorname{sen}\dfrac{2\pi t}{8}$;
y $\theta_3 = \theta_{guiñada} = \dfrac{\pi}{22.5}\operatorname{sen}\dfrac{2\pi t}{50}$.

6.15 A las componentes en 6.13 añádase, respectivamente $-\dot{P}\cos R$, $-\dot{R}$, y $-\dot{P}\operatorname{sen} R$.

6.17 ${}^{\mathcal{I}}\dot{\alpha}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} = {}^{\mathcal{E}}\dot{\alpha}_{\mathcal{B}/\mathcal{I}} + \omega_{\mathcal{E}/\mathcal{I}} \times \alpha_{\mathcal{B}/\mathcal{I}}$, y el producto vectorial generalmente no es nulo en esta ocasión.

6.19 (a) $(7\cos t + 8t - 14t^2)\hat{\mathbf{i}} + (-7\operatorname{sen} t + 2 + 28t^3)\hat{\mathbf{j}} + (2t\operatorname{sen} t - 4t^2\cos t + 7)\hat{\mathbf{k}}$;
(b) $7\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}$;
(c) $6.64\hat{\mathbf{i}} + 2.14\hat{\mathbf{j}} + 6.60\hat{\mathbf{k}}$ rad/s²

6.21 $\alpha_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} = 1.12\hat{\mathbf{i}}_1 + 13.4\hat{\mathbf{j}}_1$

6.23 Las componentes son: (−0.00710, 0.00331, 0.0749) rad/s² en el marco $\mathcal{S}$.

6.25 $1.34\hat{\mathbf{i}} + 0.00905\hat{\mathbf{j}} - 1.41\hat{\mathbf{k}}$ pie/s²

6.27 $4\hat{\mathbf{i}} + 40\hat{\mathbf{j}}$ pie/s; $-400\hat{\mathbf{i}} + 80\hat{\mathbf{j}} - 4\hat{\mathbf{k}}$ pie/s²

6.29 $6\hat{\mathbf{j}}$ rad/s²; $-32.0\hat{\mathbf{i}} + 1.20\hat{\mathbf{j}} + 8.90\hat{\mathbf{k}}$ plg/s²

6.31 36.5 pie

6.33 $17.3\hat{\mathbf{i}} + 15.7\hat{\mathbf{j}} - 10\hat{\mathbf{k}}$ plg/s
$-147\hat{\mathbf{i}} + 218\hat{\mathbf{j}} - 64.3\hat{\mathbf{k}}$ plg/s²

6.35 $\mathbf{a} = -14.3\hat{\mathbf{i}} + 2.61\hat{\mathbf{j}}$ pie/s²;
magnitud = 14.5 pie/s²

6.37 $x = (v_0 t - R)\operatorname{sen}\omega_0 t$; $y = (v_0 t - R)\cos\omega_0 t + R$

6.39 6.60 rad/s

6.41 La respuesta se da en el problema.

6.43 $-0.0590\hat{\mathbf{i}} + 0.0609\hat{\mathbf{j}}$ lb no; un deslizamiento hacia adentro (hacia arriba) implica una fuerza de fricción en este instante hacia abajo ↓ o en la dirección de $-\hat{\mathbf{j}}$.

6.45 32.7 rad/s²; $-0.522\hat{\mathbf{i}} + 0.0141\hat{\mathbf{j}} + 0.522\hat{\mathbf{k}}$ N

6.47 La respuesta se da en el problema.

6.49 $\dfrac{2\pi}{T}\left(\operatorname{sen}\beta\,\hat{\mathbf{j}} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos\beta}\hat{\mathbf{k}}\right)$

6.51 $-1350\hat{\mathbf{j}}$ rad/s² (cada uno)

6.53 $-0.0301\,\omega_E^2\hat{\mathbf{k}}$ rad/s²

6.55 $\mathbf{v}_Q = r\Omega_2 s_1\hat{\mathbf{i}} + (R\Omega_2 - r\Omega_1 C_1)\hat{\mathbf{j}} - r\Omega_1 s_1\hat{\mathbf{k}}$;
$\mathbf{a}_Q = (-R\Omega_2^2 + 2r\Omega_1\Omega_2 C_1)\hat{\mathbf{i}} + (r\Omega_1^2 s_1 + r\Omega_2^2 s_1)\hat{\mathbf{j}} + r\Omega_1^2 C_1\hat{\mathbf{k}}$, en donde $s_1 = \operatorname{sen}\Omega_1 t$ y $C_1 = \cos\Omega_1 t$

6.57 (a) $\omega = -(R\omega_1/r)\hat{\mathbf{i}} + \omega_1\hat{\mathbf{k}}$; $\alpha = -(R\omega_1^2/r)\hat{\mathbf{j}}$
(b) $R\omega_1^2\hat{\mathbf{i}} + (R^2\omega_1^2/r)\hat{\mathbf{k}}$

6.59 $0.2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{1}{2}\hat{\mathbf{k}}\right)$ rad/s

6.61 $\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}\hat{\mathbf{k}}$; $\dfrac{R(\omega_1 - \omega_2)}{2r}\hat{\mathbf{j}}$; $\dfrac{R(\omega_1 + \omega_2)}{2}\hat{\mathbf{i}}$;
$\dfrac{R(\omega_1 + \omega_2)}{2}\hat{\mathbf{i}} - \dfrac{r(\omega_1 + \omega_2)}{2}\hat{\mathbf{j}} - \dfrac{R(\omega_2 - \omega_1)}{2}\hat{\mathbf{k}}$

6.63 1.36 rad/s, dirigido desde O a través de la línea de contacto entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$.

6.65 $-1.68\hat{i} + 2.24\hat{j} - 2\hat{k}$ rad/s

6.67 La respuesta se da en el problema. También

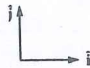
$$R = \frac{H}{2} + 13 \text{ por lo que el segundo miembro es}$$

$(6H - 260)\omega_g$

6.69 $-0.000432t^5/\sqrt{363 - 0.000144t^6}\,\hat{k}$ m/s

6.71 (a) La respuesta se da en el problema. (b) r/R

6.73 $\omega_{\mathscr{L}} = -22.6\hat{i}$ rad/s; $\omega_{\mathscr{L}}' = -27.7\hat{i}$ rad/s;



$\omega_{\mathscr{L}} = -43.6\hat{j}$ rad/s con

6.75 (a) La respuesta se da en el problema.
(b) Misma respuesta si α se reemplaza por ω.

6.77 $-11.8\hat{i} + 25.0\hat{j} - 5.33\hat{k}$ rad/sec²

6.79 $|\omega_{\mathcal{B}|\mathcal{I}}| = \sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta}$

6.81 Las componentes son:
$(\dot{\theta}_1 + s_2\dot{\theta}_3,\ c_1\dot{\theta}_2 - s_1c_2\dot{\theta}_3,\ s_1\dot{\theta}_2 + c_1c_2\dot{\theta}_3)$

6.83 Consideramos que A se desplaza desde su posición inicial a la final. Usando ahora el teorema de Euler, todos los otros puntos del cuerpo pueden situarse en sus posiciones finales por medio de una simple rotación alrededor de un eje que pase por A.

6.85 $\dot{x} = r(\dot{\psi}s_\phi s_\theta + \dot{\theta}c_\phi)$; $\dot{y} = -r(\dot{\psi}c_\phi s_\theta - \dot{\theta}s_\phi)$

6.87 Las componentes son:
$(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3 s_2,\ \dot{\theta}_2 c_1 - \dot{\theta}_3 s_1 c_2,\ \dot{\theta}_2 s_1 + \dot{\theta}_3 c_1 c_2)$,
las mismas que en el Problema 6.73.

6.89 $\dot{E}\hat{n}_{21} + (S_E\dot{A} + \dot{P})\hat{n}_{22} + \dot{A}C_E\hat{n}_{23}$

6.91 $E = \tan^{-1}[(c_\lambda c_\delta - r)/(s_\lambda c_\delta)]$;
$A = \tan^{-1}[s_\delta/\sqrt{c_\delta^2 - 2rc_\lambda c_\delta + r^2}]$, en donde $r = R_e/R$

Capítulo 7

7.1 Con $\hat{i}$ a lo largo del eje que va de O al centro de la rueda y $\hat{k}$ saliendo de la página,

$$\mathbf{H}_O = \frac{2\pi mb^2}{T}\left[-\cos\beta\,\text{sen}^2\beta\hat{i} + \left(1 - \frac{\cos^2\beta}{2}\right)\text{sen}\,\beta\hat{j}\right]$$

7.3 $m\ell^2\omega_0[2\hat{i} + (10/3)\hat{k}]$

7.5 Con $\hat{i}$ y $\hat{j}$ paralelos a los ejes x y y de la figura;

$$\mathbf{H}_C = \frac{mr^2}{4}\Omega\,\text{sen}\,\phi\left(\hat{i} - \frac{2\ell}{r}\hat{j}\right)$$

7.7 $I_{xx}^Q = 11.7m\ell^2$; $I_{yy}^Q = 14.3m\ell^2$; $I_{zz}^Q = 8.00m\ell^2$; $I_{xy}^Q = 2.00m\ell^2$; $I_{xz}^Q = 4.50m\ell^2$; $I_{yz}^Q = 0$

7.9 $0.944m\ell^2$

7.11 $\dfrac{-mR^2}{2}\,\text{sen}\,\phi\cos\phi$ **7.13** $2m(a^2 + b^2 + c^2)/15$

7.15 4.33 slug · pie² **7.17** $-0.0186ma^2$

7.19 Si $c > a + b$, el elipsoide $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ no puede ser un elipsoide de inercia, porque representaría un cuerpo con un momento de inercia mayor que la suma de los otros dos, lo que es físicamente imposible.

7.21 $I_1 = 1.5mR^2$, cosenos directores (0, 0, 1);
$I_2 = 1.41mR^2$, (−0.345, 0.939, 0);
$I_3 = 0.0942mR^2$, (0.939, 0.345, 0)

7.23 $\frac{5}{6}\ell\hat{i} + \frac{1}{2}\ell\hat{j} - \frac{1}{6}\ell\hat{k}$; la dirección es diferente.

7.25 $I_{xz}^P = I_{xz}^C - mac = 0$ y $I_{yz}^P = I_{yz}^C - mbc = 0$, (con $I_{xz}^C = 0$, $I_{yz}^C = 0$ tachados) de modo que z es un eje principal por cada punto sobre ese eje

7.27 $I_{xz}^C = I_{xz}^P - m(-a)e = mae$ (con $I_{xz}^P = 0$)

$I_{xz}^C = I_{xz}^Q - m(-a)(e + d)$ (con $I_{xz}^Q = 0$)

$= ma(e + d)$

$\therefore a = 0$. De las Ecs. I^{yz} obtenemos $b = 0$, de modo que C está sobre el eje z; por el Problema 7.26 z es un eje principal para C.

7.29 $I_1 = 83.4\rho t$, cosenos directores (0, 0, 1);
$I_2 = 74.6\rho t$, (0.985, −0.170, 0);
$I_3 = 8.80\rho t$, (0.170, 0.985, 0)

7.31 $I_1 = 37.2\rho Ar^3$, cosenos directores (1, 0, 0);
$I_2 = 6.18\rho Ar^3$, (0, 0.455, 0.891);
$I_3 = 37.3\rho Ar^3$, (0.453, −0.892, 0)

7.33 $I_1 = \dfrac{7}{3}m\ell^2$ con $\hat{n}_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

$I_2 = I_3 = \dfrac{23}{6}m\ell^2$ con $\hat{n}$ en cualquier dirección normal a $\hat{n}$

7.35 $I_1 = 0.278mH^2$, cosenos directores (0, 0, 1);
$I_2 = 0.239mH^2$, (0.290, −0.957, 0);
$I_3 = 0.0387mH^2$, (0.957, 0.290, 0)

7.37 3.58°, trabajando con seis dígitos y redondeando al final

7.39 (a) $\begin{bmatrix} 1.44m\ell^2 & 0.563m\ell^2 & 0.500m\ell^2 \\ & 1.44\ m\ell^2 & -0.500m\ell^2 \\ \text{Simétrica} & & 1.54\ m\ell^2 \end{bmatrix}$;

(b) $I_1 = 2.00m\ell^2$, cosenos directores (0.707, 0.707, 0);
$I_2 = 1.99m\ell^2$, (0.379, −0.379, 0.844);
$I_3 = 0.427m\ell^2$, (0.597, −0.597, −0.535)

7.41 $I_1 = 34.3 \times 10^5$ slug · pie², $\hat{n} = (0, 0, 1)$
$I_2 = 33.7 \times 10^5$ slug · pie², $\hat{n} = (0.566, -0.824, 0)$
$I_3 = 47.5 \times 10^5$ slug · pie², $\hat{n} = (0.824, 0.566, 0)$
Nota: Se tiene aquí un problema de precisión porque (1) I^{xx} e I^{yy} son mucho mayores que I^{xy}, y (2) I^{xx} e I^{yy} son casi iguales.

7.43 izquierda: 121 ↓ N; derecha: 121 ↑ N

7.45 En B_1: (1419 − 507 cos ϵ) sen ϵ ↑;
en B_2: (659 + 507 cos ϵ) sen ϵ ↑

7.47 En A: $\dfrac{mr^2\Omega^2\,\text{sen}\,2\beta}{16L}$ ↓; en B: misma magnitud pero ↑ **7.49** (a) 2.41 lb · pie ; (b) 1.09 lb · pie

7.51 90.6 mi/h

7.53 es aquí igual a $\omega_{\mathcal{C}|\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C$ y $\omega_{\mathcal{C}|\mathcal{I}}$ es vertical. Puesto que la componente z de $\mathbf{H}_C$ es mayor que la componente x (con ambas positivas), la dirección de $\mathbf{M}_{rC}$ es la de $\omega_{\mathcal{C}|\mathcal{I}} \times \hat{k}$, que es ↺.

7.55 $-\dot{\mathbf{H}}_G = \dfrac{v_G^2}{R^2}(I_3 - I_1)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\hat{j}$ y

$\mathbf{r}_{QG} \times (-m\mathbf{a}_G) = \dfrac{mv_G^2}{R}\left(H\cos\theta - \dfrac{D}{2}\,\text{sen}\,\theta\right)\hat{j}$

(Nótese que $\mathbf{M}_{rQ} = \dot{\mathbf{H}}_G + \mathbf{r}_{QG} \times m\mathbf{a}_G$.) Valores mayores de v_G, $(I_3 - I_1)$, m y H incrementan el peligro del volteo, así como lo hacen valores menores de R, D y θ (por ser θ pequeña).

7.57 $\mathbf{M}_{rC} = 0 = {}^{\mathcal{I}}\dot{\mathbf{H}}_C \Rightarrow \mathbf{H}_C$ = constante = $I(\omega_x\hat{i} + \omega_y\hat{j} + \omega_z\hat{k}) \Rightarrow \omega_{\mathcal{B}|\mathcal{I}}$ = constante en $\mathcal{I}$.

7.59 $(-\dot{\phi}s_\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}C_\theta + \dot{\psi}\dot{\theta})\hat{i}_2 + (\ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi} - s_\theta)\hat{j}_2 + (\ddot{\psi} + \ddot{\phi}C_\theta - \dot{\theta}\dot{\phi}s_\theta)\hat{k}_2$ **7.61** 332 días

7.63 ψ = 30.7 respecto al eje $z(+)$

7.65 0.123 lb · plg

7.67 $\phi = \cos^{-1}\{g\ell/[\Omega^2(\ell^2 - r^2/4)]\}$; para $\phi = 60°$, $\Omega_{\min}$ = 3.35 rad/s < 2π rad/s

7.69 Con x desde Q a lo largo de $\mathcal{S}$ y y hacia arriba

$$\mathbf{F} = (-mR\omega_1^2, mg, 0) \text{ and } \mathbf{M}_C = \left(0, 0, \frac{mr^2}{2}\omega_1\omega_2\right)$$

7.71 La fuerza de tensión en $\mathcal{A}$ es $T = mL\Omega^2 - mg\tan\theta_0 + m\Omega^2(r\,\text{sen}\,\theta_0 + 2L)/4$;
La fuerza de fricción es $T - mL\Omega^2$ hacia afuera
La fuerza normal es mg ↑ Cuando $\theta_0 \to 0$, las respuestas concuerdan.

7.73 Las respuestas son iguales a las del Ej. 7.8.

7.75 $\mathbf{F} = (-mR\omega_2^2, -mD\omega_2^2, mg)$; $\mathbf{M}_O =$

$$\left(-mgD + mHD\omega_2^2 + \frac{mr^2}{2}\omega_2\omega_3, 0, mgR - mRH\omega_2^2\right)$$

7.77 Los momentos respecto a la base de la rueda, de d

$-ma_c$ — $\dot{H}_C$ son, respectivamente, $(\cos\phi)(d + r)\left(m\dfrac{v_C^2}{R}\right)$ ↺

y $\left[\dfrac{v_C^2}{R^2}\,\text{sen}\,\phi\cos\phi(I_1 - I_2) + \dfrac{2Iv_C^2}{rR}\cos\phi\right]$ ↺. Para ϕ, pequeño, el momento de $\leftarrow ma_c$ es mucho mayor que $-\dot{H}_C$.

7.79 $[J\omega_3 + (J - 2I)\omega_1]\omega_2(\hat{j} \times \hat{u})$

7.81 Fuerza= $-190\hat{i} - 375\hat{j} + 80\hat{k}$ lb;
Par = $5.6\hat{i} + 7.7\hat{j} + 1.4\hat{k}$ lb · pie

7.83 $\dot{\theta}_1$ = 1 rad/s; $\dot{\theta}_2$ = 2 rad/s;
$\dot{\theta}_3$ = 3 rad/s; $\ddot{\theta}_1$ = 10 rad/s²;
$\ddot{\theta}_2$ = 5 rad/s²; $\ddot{\theta}_3$ = 6 rad/s²

7.85 $\dot{\psi}$ = 244 rad/s

7.87 0.328 m (51.9 m es también una solución).

7.89 $I_{zz}^C = 18mR^2$; $I_t = 12mR^2$; razón = 1.5;

(i) es inestable y las otras tres estables.

7.91 Para un cuerpo $\mathcal{B}$ libre de pares, en movimiento general en un marco inercial $\mathcal{I}$, con $\omega_{\mathcal{B}|\mathcal{I}}$ no paralelo a $\mathbf{H}_C$, se tiene $\mathbf{M}_{rC} = 0 = {}^{\mathcal{B}}\dot{\mathbf{H}}_C + \omega_{\mathcal{B}|\mathcal{I}} \times \mathbf{H}_C$,

y los dos términos *suman* cero.

7.93 Si $\mathcal{B}$ está en equilibrio en $\mathcal{I}$, todos sus puntos son ahí estacionarios; entonces $\mathbf{a}$ = 0 para todos esos puntos y también $\omega_{\mathcal{B}|\mathcal{I}}$ = 0. Por ello, $\mathcal{B}$ es un marco inercial. Pero si $\mathcal{B}$ es un marco inercial, podrá a lo sumo trasladarse a velocidad constante con respecto a otro marco inercial $\mathcal{I}$. Entonces no necesita ser estacionario en $\mathcal{I}$, o sea, no necesita estar en equilibrio en $\mathcal{I}$ aunque ninguno de sus puntos está acelerado en $\mathcal{I}$).

7.95 La respuesta concuerda con la del Ej. 7.14.

7.97 $\dfrac{11.4v_bm}{s(15M + 24m)}\hat{i} - \dfrac{33v_bm}{s(15M + 24m)}\hat{k}$

7.99 No. Se obtienen dos resultados diferentes para F_y.

7.101 815m pie · lb, en donde m en la masa en slugs.

7.103 $W = T_f = \dfrac{4\pi^2m(b^2 - r^2)(b^2 - 0.75r^2)}{b^2T^2}$

7.105 (a) $\dfrac{a^2b^2m\omega^2}{12(a^2 + b^2)}$; (b) $\sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{12}}$

7.107 (a) Par = 0, en B: $\dfrac{ma\omega^2}{12}$ ←, en A: $\dfrac{ma\omega^2}{4}$ ←;

(b) $I_1 = \dfrac{5}{6}ma^2$, eje Z

$I_2 = 0.116\ ma^2$, cosenos (0.290, 0.957, 0);
$I_3 = 0.717\ ma^2$, directores (0.957, −0.290, 0);
(c) ningún agujero es físicamente posible; (d) $ma^2\omega^2/12$

7.109 358 J

7.111 $0.339\dfrac{g}{r} = \omega_x^2 - 1.33\omega_x\omega_y + 2.03\,\omega_y^2$

7.113 Algunos valores de comprobación son:

$\left(\alpha, \dfrac{v_Q^2}{gR}\right)$ = (1°, 913), (45°, 0.842), y (80°, 0.031)

Capítulo 8

8.1 $\omega_n = \sqrt{\dfrac{gr^2/R}{k_C^2 + r^2}}$; para $k_C = \sqrt{\dfrac{2}{5}}r$, $\omega_n = \sqrt{\dfrac{5g}{7R}}$

8.3 $m\ell^2\ddot{\theta} + ka^2\theta - mg\ell\theta = 0$; $2\pi\sqrt{\dfrac{m\ell^2}{ka^2 - mg\ell}}$

8.5 $\sqrt{2k/(12m\pi^2)}$ **8.7** 40.0 pie

8.9 La respuesta se da en el problema.

8.11 $\omega_n = 3\sqrt{\dfrac{T}{2m\ell}}$

8.13 (a) 0.278 pie (b) 0.876 s (c) 0.291 s

8.15 (1) se mueve hacia la izquierda con

$$x = \frac{6\mu gm}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

(2) se mueve hacia la derecha con

$$x = \frac{4\mu gm}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

(3) se mueve hacia la izquierda con

$$x = \frac{2\mu gm}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \text{ y}$$

se detiene finalmente en $\mu gm/k$ a la izquierda de la posición indeformada. El tiempo en *cada* intervalo es $\pi\sqrt{m/k}$, y la distancia recorrida total $= 24\ \mu gm/k$.

8.17 0.107 s

8.19 (a) Trabajo $= \displaystyle\int_0^{L/v} Pvt[\dot{\theta}(t)]\,dt =$

$$(P^2/k)\left[\frac{1}{2} - \frac{v}{\omega L}\operatorname{sen}\frac{\omega L}{v} - \frac{v^2}{\omega^2 L^2}\cos\frac{\omega L}{v} + \frac{\dot{v}^2}{\omega^2 L^2}\right],$$

(b) que concuerda con $T + \phi$.

8.21 $\dfrac{2\ell}{b^2}\sqrt{(mg\ell + ka^2)m}$

8.23 8 (lb · s)/plg; 8 veces mayor $\theta_o e^{-100t}(1 + 100t)$; 0.0628 s

8.25 Sí, ocurren periódicamente. (Comience con $x = Ae^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_d t - \varphi)$ e investigue cuando $\dot{x} = 0$)

8.27 (a) 0.109 plg.; (b) 1.36 rad, o bien 78.1°, con x atrasada respecto a y

8.29 $x(t) = 0.5[1 - (1 + 100t)e^{-100t}]$ plg

8.31 (a) $x = 0.025\cos 100t - 0.0269e^{-26.8t} + 0.0019e^{-373t}$ plg

(b) $x = 0.025\cos 100t - e^{-50t}\cdot(0.0144\operatorname{sen} 86.6t + 0.025\cos 86.6t)$ plg

8.33 $-Y\omega^2\sqrt{\dfrac{(c\omega)^2 + (2k)^2}{(2k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}\operatorname{sen}(\omega t - \phi)$,

en donde $\phi = \tan^{-1}\left[\dfrac{cm\omega^3}{2k(2k - m\omega^2) + (c\omega)^2}\right]$; el radicando es < 1 si $\omega > \sqrt{2}\,\omega_n$, y para esas ω', el radicando es más pequeño para los valores menos de c.

8.35 $wA|\mathbf{v}|\mathbf{v}/g - \mathbf{W}$, en donde W es el peso del tanque más el líquido.

8.37 $Q_u/Q = (1 + \cos\theta)/2$; $Q_l/Q = (1 - \cos\theta)/2$

8.39 $q(u - v) + fu$

8.41 $MP/(M + qt)^2$ **8.43** $2480\hat{\imath}$ lb

8.45 (a) 0.553 pie/s^2; (b) 328 ← lb

8.47 (a,c) La respuesta se da en el problema.

(b) $4.95\dfrac{m_o g}{k_o}(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)$

8.49 La respuesta seda en el problema.

8.51 $v(t) = -gt + v_e\ln[m_0/(m_0 - \mu t)]$, válida hasta que el combustible se agote.

8.53 $x(t) = -gt^2/2 + v_e\left[\left(\dfrac{m_0}{\mu} - t\right)\ln\left(1 - \dfrac{\mu t}{m_0}\right) + t\right]$;

$$v_{\text{terminal}} = \frac{-gfm_0}{\mu} - v_e\ln(1 - f);$$

$$x_{\text{terminal}} = \frac{-gf^2m_0^2}{2\mu^2} + \frac{v_e m_0}{\mu}[(1 - f)\ln(1 - f) + f]$$

8.55 (a) $v = \sqrt{2gx/3}$; (b) $a = g/3$;
(c) Se pierde energía mecánica (por calor, deformación, vibración, etc.) cuando los eslabones se juntan con la parte caída de la cadena.

8.57 Las respuestas se dan en el problema.

8.59 (b) Las respuesta se dan en el problema.

8.61 La respuesta se da en el problema.

8.63 Respuesta dada en el problema. (Use las leyes de Kepler.)

8.65 1.67×10^9 mi

8.67 107 min. No se requiere suponer que no hay resistencia del aire en esta ocasión.

8.69 4320 mi; 583 mi y 137 mi

8.71 r_p^* es de 3620 mi y esto es $< r_{\text{Tierra}}$

8.73 La respuesta se da en el problema. (Aísle el radical y elévense al cuadrado ambos miembros.)

8.75 La respuesta se da en el problema.

8.77 $0.00530\sqrt{GM}$ mi/h **8.79** 5960 mi; 77.5°

8.81 Respuesta dada en el problema.

8.83 No; 4980 mph **8.85** $GMm(n - 1)/(2Rn)$

8.87 104 mi/h

Apéndice A

A.1 (a) (lb · pie^2)/slug^2; (b) N · m^2/kg^2 **A.3** 143 N

A.5 (a) 0.456 (slug · pie)/s ; (b) 2.03 kg · m/s

A.7 (a) $\dfrac{L}{T^2}L^2 = L^3\left(\dfrac{1}{T}\right)^2$;

(b) 6.61, usando $g = 32.17$ pie/s^2

$$\omega = 2\pi\left(1 + \frac{1}{365}\right)\text{ rad/día, y } r_{Tierra} = 3960\text{ mi}$$

INDICE